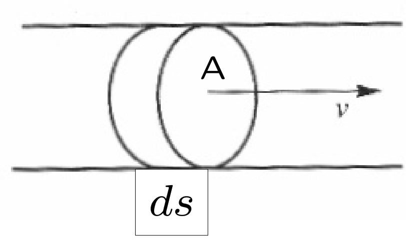
Alcuni utili principi di conservazione

Portata massica e volumetrica



- Portata massica: massa di fluido che attraversa la sezione A di una tubazione nell'unità di tempo [kg/s]

$$\boxed{w_S = \rho A v}$$

ρ = densità (massa/volume)
A = area sezione
v = velocità media del fluido in direzione normale a A

- Portata volumetrica: volume di fluido che attraversa la sezione A nell'unità di tempo [m^3/s]

$$\boxed{q_S = A v}$$

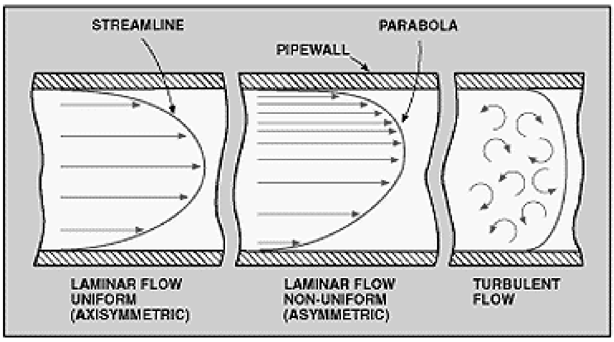
Portata massica e volumetrica

- Tipi di moto del fluido:
  - Moto laminare: il fluido scorre per filetti paralleli. La velocità è massima al centro.
  - Moto turbolento: la velocità è sostanzialmente uniforme (NB: le componenti trasversali non influiscono sulla portata)

  - Numero di Reynolds [adimensionale]:

$$\boxed{Re = \frac{\rho v D}{\mu}}$$

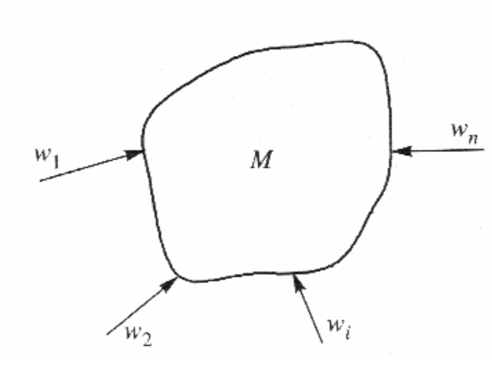
ρ = densità (massa/volume)
v = velocità media del fluido
D = diametro nominale
μ = viscosità (=resistenza che
il fluido oppone alla deformazione)



Moto laminare: $Re < 2000$
Moto turbolento: $Re > 4000$

(per $2000 < Re < 4000$ si ha una condizione intermedia)

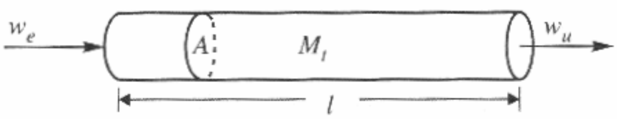
Principio di conservazione della massa



$$\boxed{\frac{dM(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)}$$

M = massa contenuta nel volume
w_i = portate massiche

- Esempio #1:



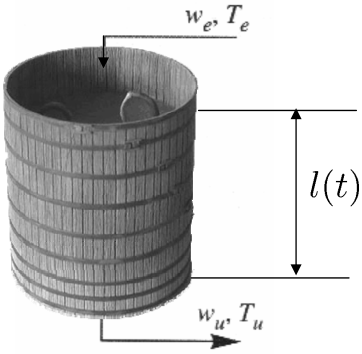
$$\frac{dM_t(t)}{dt} = w_e(t) - w_u(t)$$

Essendo $M_t(t) = lA\rho(t)$, si ha $Al\dfrac{d\rho(t)}{dt} = w_e(t) - w_u(t)$.

Per fluidi incomprimibili $\rho(t)$ = costante, e quindi $w_e(t) = w_u(t)$

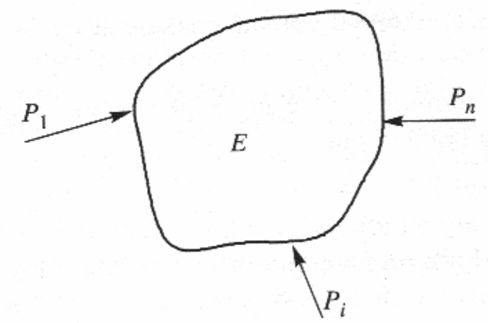
Principio di conservazione della massa

- Esempio #2: $$\frac{dM(t)}{dt} = w_e(t) - w_u(t)$$



Essendo $M(t) = \rho A l(t)$, si ha $\frac{dl(t)}{dt} = \frac{1}{\rho A}(w_e(t) - w_u(t))$.

Principio di conservazione dell'energia



$$\boxed{\frac{dE(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} P_i(t)}$$

E = energia contenuta nel volume
P_i = potenze che transitano attraverso la superficie di confine

Le potenze entranti possono essere:

- potenze associate alle masse entranti (es: cinetico, gravitazionale, ...)
- potenze termiche
- potenze meccaniche (lavoro/unita' di tempo) fatte dal/sul volume considerato

Equazione di Bernoulli

Daniel Bernoulli

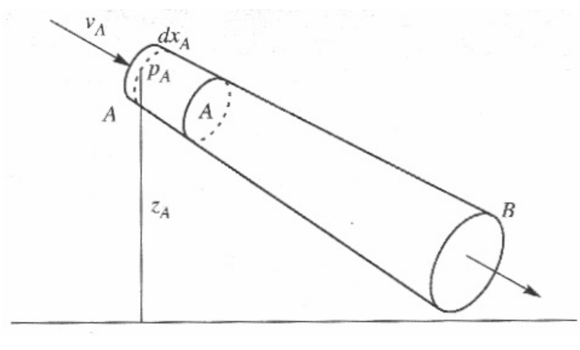
(1700-1782)

$$\boxed{\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{cost}}$$

ρ = densità (massa/volume)
v = velocità media del fluido
p = pressione del fluido
g = accelerazione di gravità
z = quota a cui si trova il fluido

- Ipotesi:
  1. Condizioni stazionarie (dE/dt=0)
  2. Pareti della tubazione: adiabatiche e rigide
  3. Non si considera l'energia termica (si suppone indipendente da quella meccanica)
  4. Densità ρ del fluido costante
  5. Si trascurano gli attriti (interni al fluido e fra fluido e pareti), e quindi l'energia meccanica trasformata in calore per attrito

Equazione di Bernoulli



- Ipotesi:
  1. Condizioni stazionarie (dE/dt=0)
  2. Pareti adiabatiche e rigide
  3. Non si considera l'energia termica
  4. Densità ρ del fluido costante
  5. Si trascurano gli attriti

$$0 = \frac{dE(t)}{dt} = P_A(t) - P_B(t) \Rightarrow P_A(t) = P_B(t) \Rightarrow \frac{dE_A(t)}{dt} = \frac{dE_B(t)}{dt} \Rightarrow dE_A(t) = dE_B(t)$$

$dE_A(t)$ = energia associata ad un elemento infinitesimo di fluido di lunghezza dx entrante nel tubo

$$dE = A\,dx\,\rho\,\frac{v^2}{2} + A\,dx\,\rho\,z\,g + p\,A\,dx$$

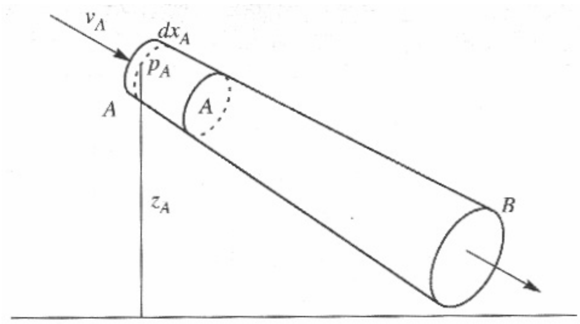
massa

E. cinetica

E. potenziale

lavoro delle forze di pressione

Equazione di Bernoulli



- Ipotesi:
  1. Condizioni stazionarie (dE/dt=0)
  2. Pareti adiabatiche e rigide
  3. Non si considera l'energia termica
  4. Densità ρ del fluido costante
  5. Si trascurano gli attriti

$$dE_A = dE_b \Rightarrow A_A\, dx_A\, \rho\, g \left(\frac{v_A^2}{2g} + z_A + \frac{p_A}{\rho g} \right) = A_B\, dx_B\, \rho\, g \left(\frac{v_B^2}{2g} + z_B + \frac{p_B}{\rho g} \right)$$

Per il principio di conservazione della massa si deve avere $A_A\ dx_A = A_B\ dx_B$ da cui:

$$\frac{v_A^2}{2g} + z_A + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{v_B^2}{2g} + z_B + \frac{p_B}{\rho g} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{cost}}$$

carico idrostatico

In presenza di perdite (energia meccanica diventa energia termica):

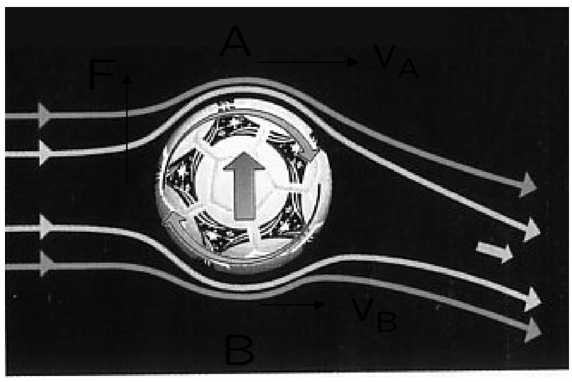
$$\frac{v_A^2}{2g} + z_A + \frac{p_A}{\rho g} = \frac{v_B^2}{2g} + z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \alpha\, \frac{v_B^2}{2g}$$

(sperimentalmente proporzionali al quadrato della velocità)

Equazione di Bernoulli - Esempio

Moto di un pallone "con effetto"

- Per effetto della rotazione, sul lato A l'aria è più veloce che sul lato B, perché si somma il contributo v=ωr dato dalla rotazione
- Per il teorema di Bernoulli, la pressione in A è quindi minore che in B
- Si sviluppa quindi una forza risultante F diretta da B ad A



(l'effetto per cui un corpo in rotazione che si muove in un fludo è soggetto ad una forza ortogonale alla sua traiettoria è detto "effetto Magnus")

Alcuni utili
principi di conservazione

Fine