Corso di

Teoria dei Sistemi

Alberto Bemporad
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Università degli Studi di Siena

`bemporad@dii.unisi.it`

`http://www.dii.unisi.it/~bemporad`

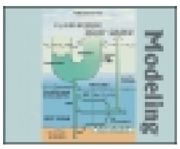
Corso di Diploma in Ingegneria Informatica
Anno accademico 2000/2001

Scopo del Corso

- La scienza consiste in gran parte nel descrivere mediante un *modello matematico* alcuni aspetti della realtà, catturandone i meccanismi di funzionamento fondamentali.
- La *teoria dei sistemi* è lo studio delle proprietà dei modelli matematici associati a *sistemi dinamici*, cioè a quei processi reali che evolvono nel tempo.

Il corso fornirà:

Gli strumenti matematici necessari per studiare le proprietà dei sistemi dinamici



Esempi di come ottenere modelli matematici per diversi tipi di processi fisici

Tecniche al calcolatore per l'analisi, la simulazione e il controllo di sistemi dinamici (Matlab)

1. Sistemi e Modelli

1 Sistemi e Modelli

Sistemi ed Esperimenti

- Un *sistema dinamico* è un oggetto o insieme di oggetti che evolvono nel tempo di cui vogliamo studiare le proprietà
- Esempio: il sistema solare, un impianto per la produzione della carta, un condensatore collegato ad una resistenza elettrica
- Proprietà a cui siamo interessati. Ad esempio: Quando avverrà la prossima eclisse ? Come devo manovrare le valvole dell' impianto per produrre carta di buona qualità ? Cosa succede se collego il condensatore alla resistenza ?

Prima possibilità: fare esperimenti !

1 Sistemi e Modelli

Perché **non** fare esperimenti:

- Troppo costoso
- Troppo pericoloso (es: centrale nucleare)
- Impossibile (il sistema ancora non e' stato costruito)

Soluzione:

1. Fare un *modello matematico* del sistema, cioè descrivere i fenomeni essenziali che avvengono nel sistema mediante le leggi della fisica, biologia, economia, ecc.

2. *Analizzare* le equazioni del modello matematico e *simulare* il sistema risolvendo (manualmente o al computer) tali equazioni.

Risultato:

- La simulazione ha costo quasi nullo, ma . . .
- . . . l'utilità della simulazione dipende da quando il modello matematico è vicino al sistema fisico
- Fare un buon modello è un arte !

1 Sistemi e Modelli

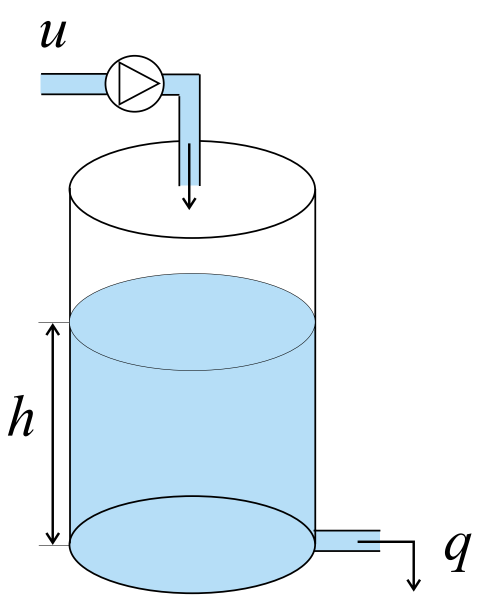
Esempio: Serbatoio

Variabili:

altezza serbatoio	h	m
flusso d'ingresso	u	m^3/s
flusso d'uscita	q	m^3/s
velocità d'uscita	v	m/s

Parametri:

sezione serbatoio	A	m^2
sezione apertura	a	m^2
accelerazione di gravità	g	m/s^2



- Leggi della fisica:

$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ Legge di Torricelli

$q(t) = av(t)$ Flusso di uscita

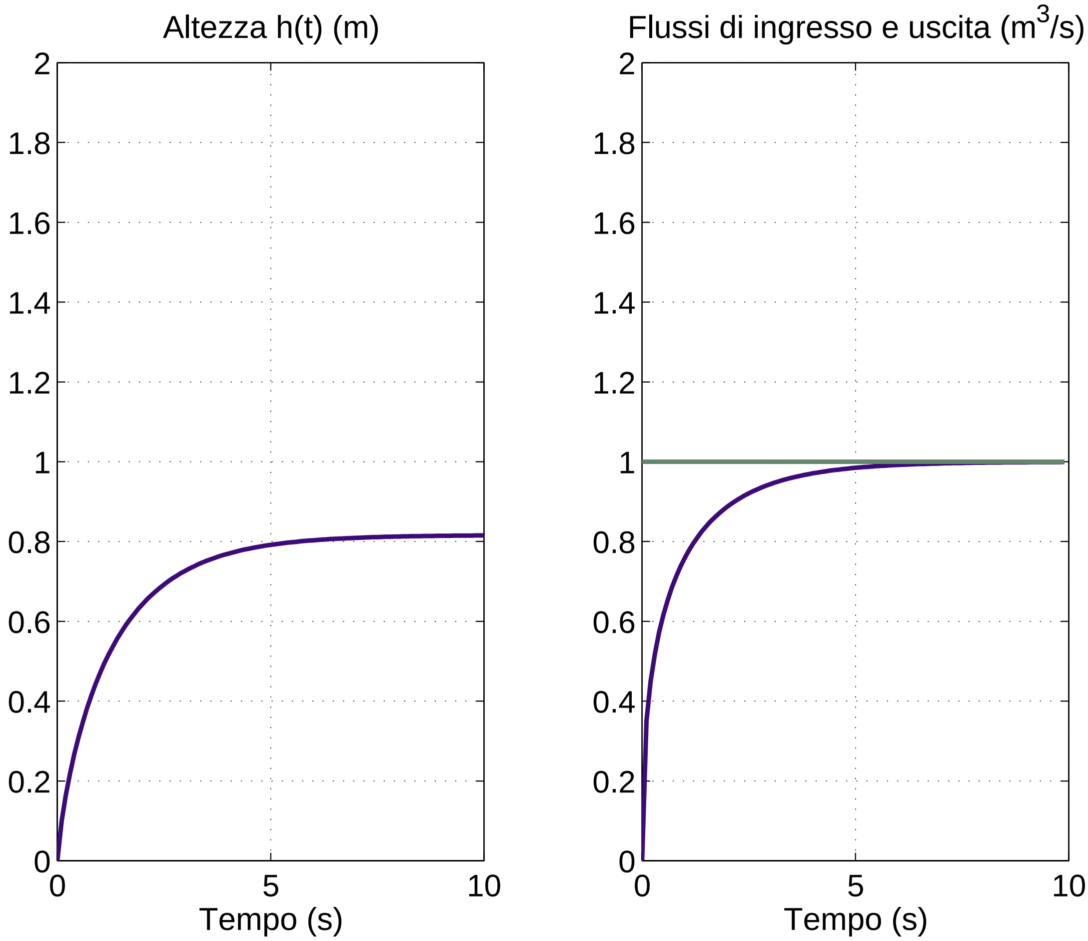
$\frac{d}{dt}[Ah(t)] = u(t) - q(t)$ Bilancio di massa

- Modello matematico del serbatoio:

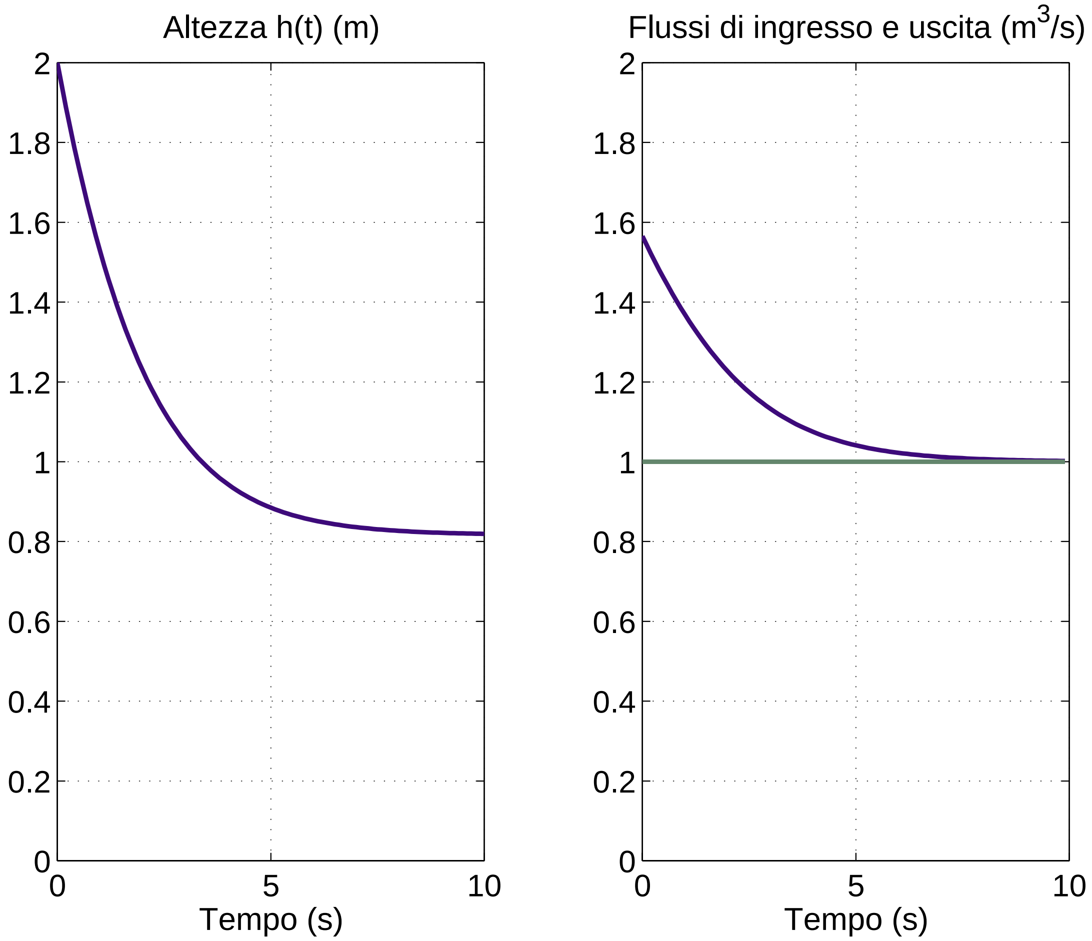
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}h(t) & = & -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t) \\ q(t) & = & a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \end{cases}$$

1 Sistemi e Modelli

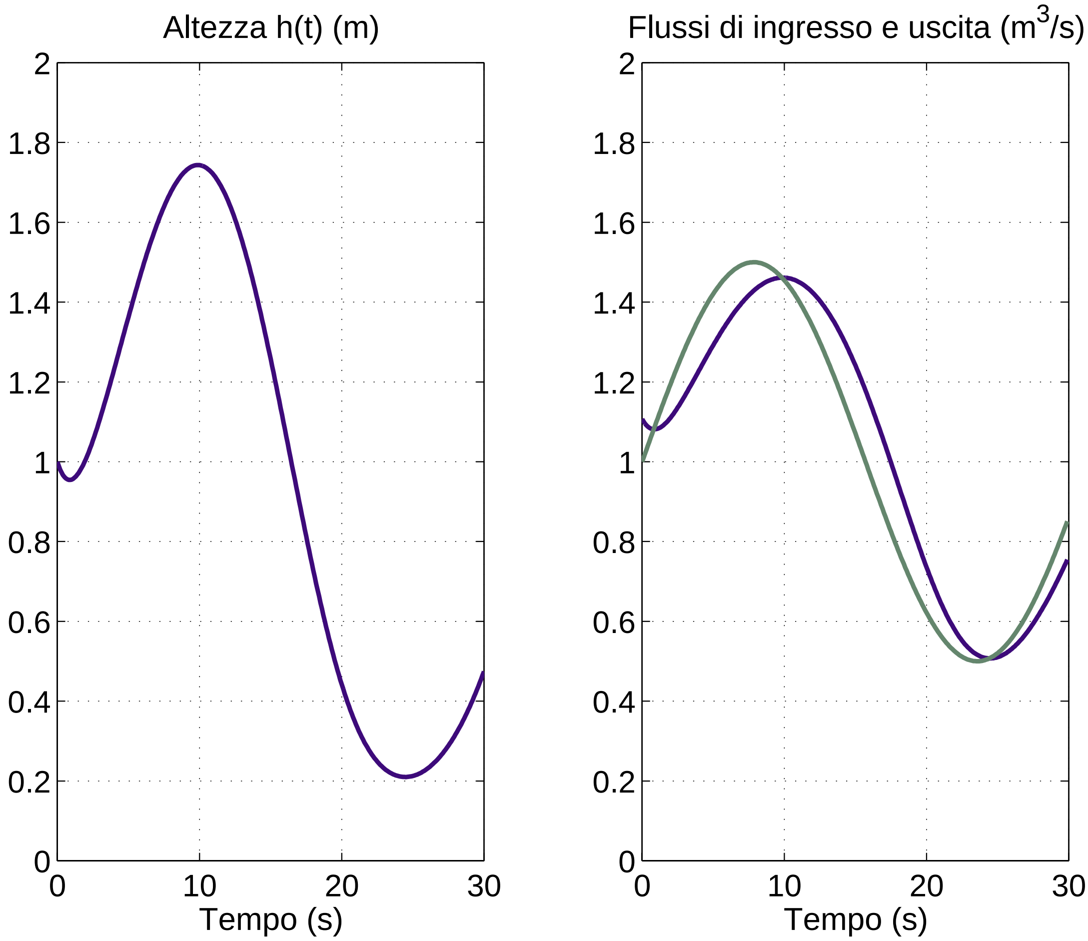
Simulazione per $A = 1\ \mathrm{m}^2$, $a = 0.25\ \mathrm{m}^2$, $h(0) = 0\ \mathrm{m}$, $u(t) \equiv 1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$



Simulazione per $A = 1\ \mathrm{m}^2$, $a = 0.25\ \mathrm{m}^2$, $h(0) = 2\ \mathrm{m}$, $u(t) \equiv 1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$



Simulazione per $A = 1$ m^2, $a = 0.25$ m^2, $h(0) = 1$ m, $u(t) = 0.5\sin(t/5) + 1$ m^3/s



Modelli in forma *state-space* (spazio di stato)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \qquad \dot{x} \triangleq \frac{dx}{dt}$$

- $u(t)$ è l' *ingresso* del sistema (variabili esogene)
- $y(t)$ è l' *uscita* del sistema (variabili di interesse o misure)
- $x(t)$ è lo *stato* del sistema

$x(t_0)$ = tutta l'informazione necessaria al tempo t_0 per poter predire l'evoluzione futura dell'uscita $y(t)$ del sistema, $t \geq t_0$, per un dato ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$.

$\Rightarrow$ il concetto di stato è fondamentale per poter simulare i sistemi dinamici.

Esempio: modello matematico del serbatoio

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}h(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t) \\ q(t) = a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \end{cases}$$

$h(t)$=stato, $q(t)$=uscita, $u(t)$=ingresso.

(In generale, x, u, y sono vettori, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$).

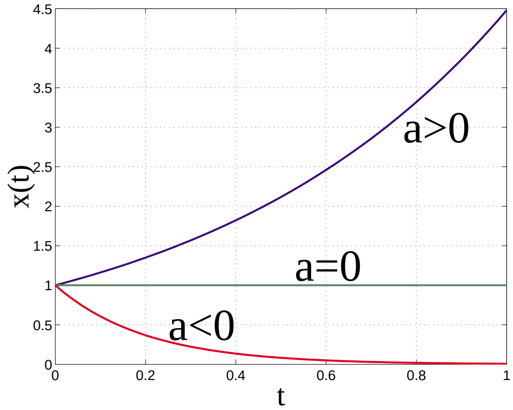
2. Sistemi Lineari a Tempo Continuo

2 Sistemi Lineari a Tempo Continuo

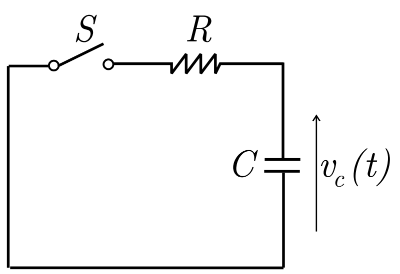
- Considera l'*equazione differenziale* del primo ordine

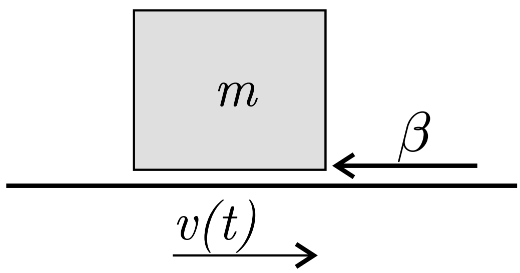
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \dot{x} \triangleq \frac{dx}{dt}$$

- Esiste una e una sola soluzione: $x(t) = e^{at}x_0$



- Esempi fisici:





$$v_c(t) + RC\dot{v}_c(t) = 0$$

$$v_c(t) = v_c(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$-\beta v(t) = m\dot{v}(t)$$

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

2 Sistemi Lineari a Tempo Continuo

- Considera l'*equazione differenziale* del primo ordine con ingresso

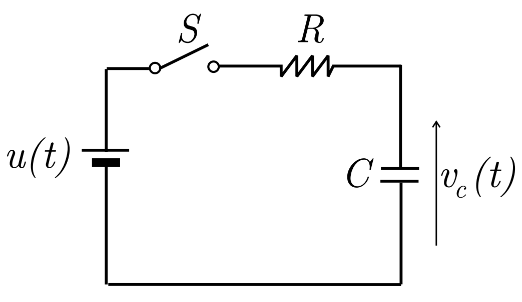
$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & ax(t) + bu(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

- La soluzione esiste ed è unica:

$$x(t) = \underbrace{e^{at}x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}$$

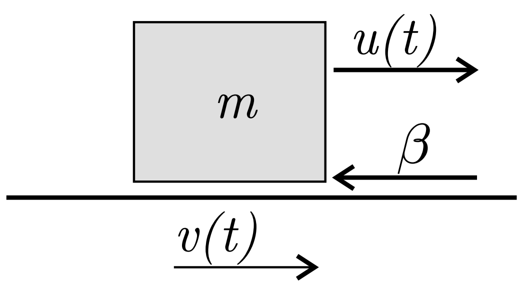
$$\begin{array}{lcll} x_\ell(t) & = & e^{at}x_0 & \text{effetto delle condizioni iniziali} \\ x_f(t) & = & \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau & \text{effetto dell'ingresso} \end{array}$$

- **Esempi fisici:**



$$u(t) - RC\dot{v}_c(t) - v_c(t) = 0$$

$$x = V_c,\ a = -\frac{1}{RC},\ b = \frac{1}{RC}$$



$$-\beta v(t) + u(t) = m\dot{v}(t)$$

$$x = v,\ a = -\frac{\beta}{m},\ b = \frac{1}{m}$$

2.1 Richiami di Algebra Lineare

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ matrice quadrata di ordine n

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$ matrice identità di ordine n

- Equazione caratteristica di A:

$$\det(sI - A) = 0$$

- Polinomio caratteristico di A:

$$P(s) = \det(sI - A)$$

- Autovettori di A: vettori v_i tali che

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Autovalori di A: Le n soluzioni[a] $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dell'equazione caratteristica di A

$$\det(\lambda_i I - A) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Diagonalizzazione di A:

$$A = T^{-1}\Lambda T, \; T^{-1} = [v_1|v_2|\dots|v_n], \; \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

[a] N.B.: In generale le soluzioni sono numeri complessi

- **Esempio 1**:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI-A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{vmatrix} = s^3+6s^2+11s+6$$

Autovalori: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$

- **Esempio 2**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-1 & -3 \\ 5 & s-2 \end{vmatrix} = s^2 - 3s + 17$$

Autovalori: $\lambda_1 = \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{59}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{59}}{2}$

Nota:

· $j \triangleq \sqrt{-1}$ unità immaginaria

· $|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$

· $\rho e^{j\theta} = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

2 Sistemi Lineari a Tempo Continuo

- *Sistema di equazioni differenziali* di ordine n con ingresso

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\ x_1(0) = x_{10}, \quad \ldots \quad x_n(0) = x_{n0} \end{cases}$$

- Forma matriciale equivalente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- La soluzione esiste ed è unica:

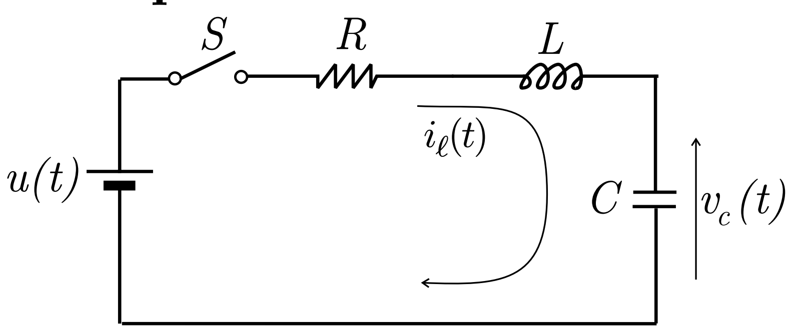
$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}$$

La *matrice esponenziale* è definita come
$e^{At} \triangleq I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots$
Se la matrice A è diagonalizzabile: $A = T^{-1}\Lambda T$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = T^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T$$

- Il modo di evolvere del sistema dipende dagli autovalori di A

- **Esempio fisico: Circuito RLC**



$$\begin{cases} u(t) - Ri_\ell - L\frac{di_\ell(t)}{dt} - v_c(t) = 0 & \text{Equilibrio tensione} \\ i_\ell(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} & \text{Equilibrio corrente} \end{cases}$$

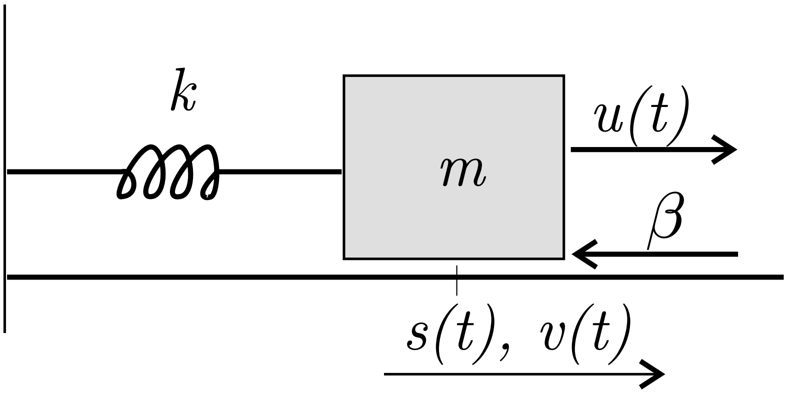
Equivale al sistema di equazioni differenziali di ordine 2:

$$\begin{cases} \frac{di_\ell(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i_\ell(t) - \frac{1}{L}v_c(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_\ell(t) \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_\ell(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} i_\ell(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

- **Esempio fisico: Massa-Molla-Smorzatore**



$$\begin{cases} \dot{s}(t) = v(t) & \text{Definizione di velocità} \\ m\dot{v}(t) = u - \beta v(t) - ks(t) & \text{Legge di Newton} \end{cases}$$

Equivale al sistema di equazioni differenziali di ordine 2:

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\beta}{m}v(t) - \frac{k}{m}s(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

- *Equazioni differenziali di ordine n*

$$\frac{dy^{(n)}(t)}{dt}+a_{n-1}\frac{dy^{(n-1)}(t)}{dt}+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=0$$

Ponendo $x_1(t) \triangleq y(t)$, $x_2(t) \triangleq \dot{y}(t)$, …, $x_n(t) \triangleq y^{n-1}(t)$, equivale al sistema di n equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n(t) &= -a_0x_1(t) + \ \ldots \ - a_{n-1}x_{n-1}(t) \\ x(0) &= [y(0)\ \dot{y}(0)\ldots\ y^{n-1}(0)]' \end{cases}$$

- **Esempio:**

$$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+5y(t)=0$$

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) &=& y(t) \\ x_2(t) &=& \dot{y}(t) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -5x_1(t)-2x_2(t) \\ x(0) &= [y(0)\ \dot{y}(0)]' \end{cases}$$

- *Equazioni differenziali di ordine n* con ingresso

$$\frac{dy^{(n)}(t)}{dt} + a_{n-1}\frac{dy^{(n-1)}(t)}{dt} + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$
$$b_{n-1}\frac{du^{(n-1)}(t)}{dt} + b_{n-2}\frac{du^{(n-2)}(t)}{dt} + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

- Equivale al sistema di n equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = -a_0x_1(t) + \ \dots \ - a_{n-1}x_{n-1}(t) + u(t) \\ y(t) = b_0x_1(t) + \ \dots \ + b_{n-1}x_n \end{cases}$$

- Equivale alla forma matriciale

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

- **Esempio 1:**

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}x(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{array} \right.$$

- **Esempio 2:**

$$\frac{d^{(3)}y(t)}{dt} + 5\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 6y(t) = 3u(t) + 4\dot{u}(t)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}x(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{array} \right.$$

Sistema lineare tempo-continuo, tempo-invariante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

- Dato lo *stato iniziale* $x(0)$ e un segnale di ingresso $u(t)$, $t \geq 0$, è possibile predire tutta l'evoluzione dello stato $x(t)$ e dell' *uscita* $y(t)$ del sistema, per ogni $t \geq 0$.
- Nota che lo stato $x(0)$ sintetizza tutta la storia passata del sistema.
- La dimensione n dello stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è detta *ordine* del sistema.
- Il sistema si dice *proprio* se $D = 0$.

In generale $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Soluzione di regime stazionario

- Ipotesi: A ha tutti autovalori a parte reale < 0
- Quale sarà il valore asintotico dell'uscita corrispondente ad un dato ingresso costante $u(t) \equiv u_r$, $t \geq 0$?
- Imponiamo $\dot{x}_r(t) = 0 \Rightarrow Ax_r + Bu_r = 0$

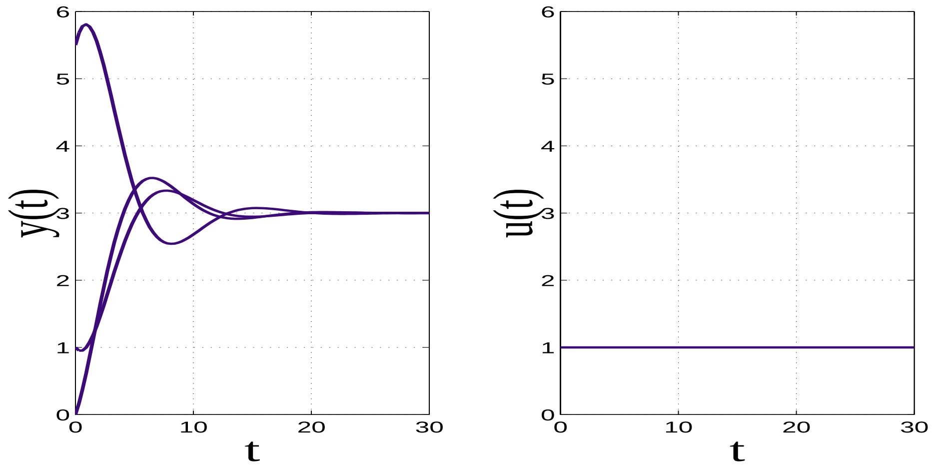
$$y_r = \underbrace{(-CA^{-1}B + D)}_{\text{guadagno in continua}} u_r$$

- **Esempio**:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Guadagno in continua:

$$-\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3$$



Evoluzione dell'uscita $y(t)$ per diverse cond. iniz. e ingresso $u(t) \equiv 1$

Definizione generale di equilibrio:

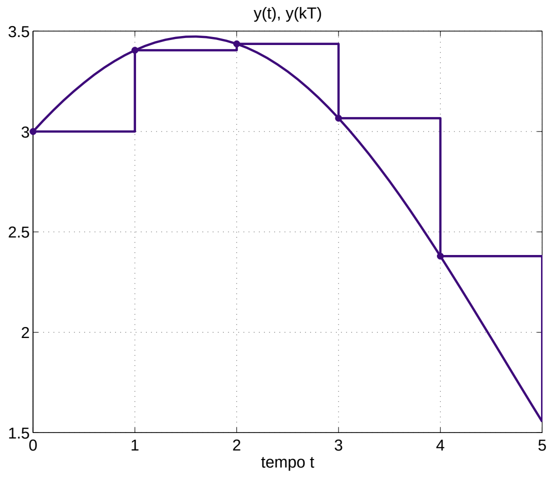
- Dato il sistema (tempo continuo, non lineare, tempo variante)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) & = & g(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

- Lo stato costante x_r e l'ingresso costante u_r sono un *equilibrio* del sistema se per $x(t_0) = x_r$ e $u(t) \equiv u_r$, $\forall t \geq t_0$, si ha $x(t) \equiv x_r$, $\forall t \geq t_0$.
- Definizione equivalente: $f(t, x(t), u(t)) = 0$, $\forall t \geq t_0$
- x_r è detto *stato di equilibrio*
- u_r è detto *ingresso di equilibrio*

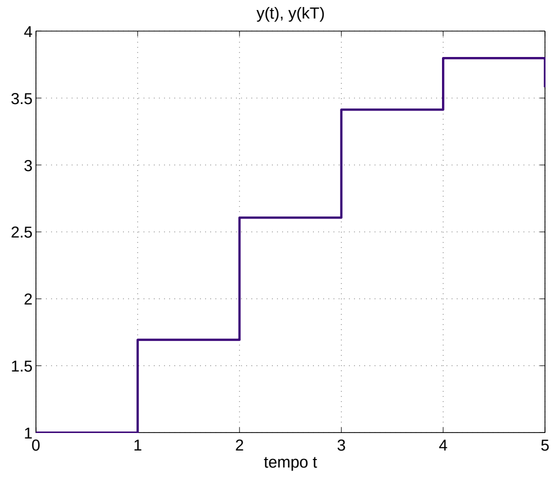
3. Sistemi Lineari a Tempo Discreto

3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto



Campionamento di un segnale continuo

Fig. (a)



Segnale discreto

Fig. (b)

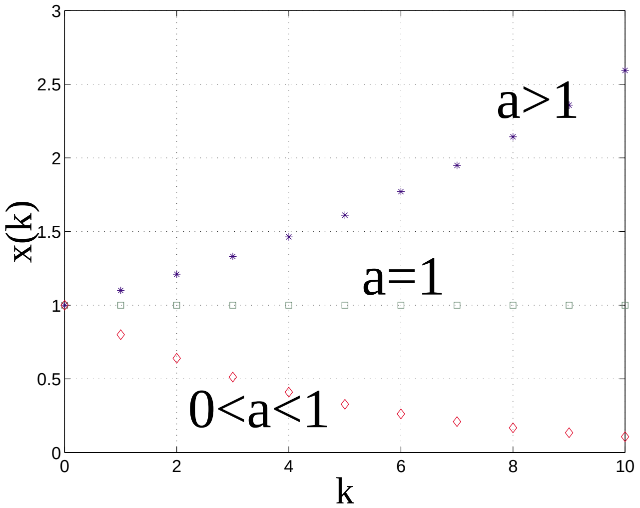
- Esprimono relazioni fra variabili *campionate* ad intervalli T: $x(kT)$, $u(kT)$, $y(kT)$, $k = 0, 1, \ldots,$
- Il segnale è $x(kT)$ è mantenuto costante durante l'*intervallo di campionamento* $[kT, (k+1)T)$.
- Il segnale può rappresentare il *campionamento* di un segnale *continuo* nel tempo (Fig. a), oppure essere intrinsecamente *discreto* nel tempo (Fig. b).
- Fondamentali per il progetto di *controllori digitali*

3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

- Considera l'*equazione alle differenze* del primo ordine

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- Esiste una e una sola soluzione: $x(k) = a^k x_0$



3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

- Considera l'*equazione alle differenze* del primo ordine con ingresso

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) + bu(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- La soluzione esiste ed è unica:

$$x(k) = \underbrace{a^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} a^i bu(k-1-i)}_{\text{risposta forzata}}$$

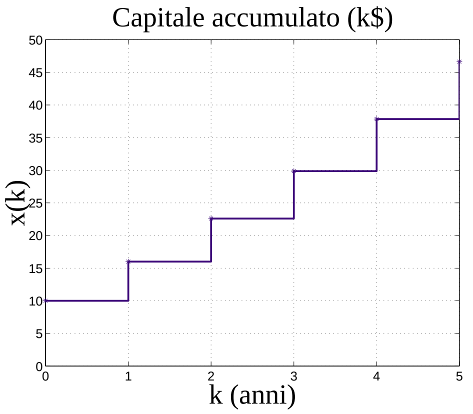
- **Esempio**: accumulo di capitale in un deposito bancario
  - ρ: tasso di interesse (fisso) praticato dalla banca
  - $x(k)$: capitale accumulato all'inizio dell'anno k
  - $u(k)$: capitale versato alla fine dell'anno k
  - x_0: capitale iniziale

$$\begin{cases} x(k+1) = (1+\rho)x(k) + u(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Esempio numerico:

x_0	10 k$
$u(k)$	5 k$
ρ	10%

$$x(k) = 60(1.1)^k - 50$$



3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

- *Sistema di equazioni alle differenze* di ordine n con ingresso

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_1 u(k) \\ x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + \dots + a_{2n}x_n(k) + b_2 u(k) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_n u(k) \\ x_1(0) = x_{10}, \quad \dots \quad x_n(0) = x_{n0} \end{cases}$$

- Forma matriciale equivalente

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- La soluzione esiste ed è unica:

$$x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(k-1-i)}_{\text{risposta forzata}}$$

- Se la matrice A è diagonalizzabile: $A = T^{-1}\Lambda T$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} T$$

- Il modo di evolvere del sistema dipende dagli autovalori di A

- **Esempio**

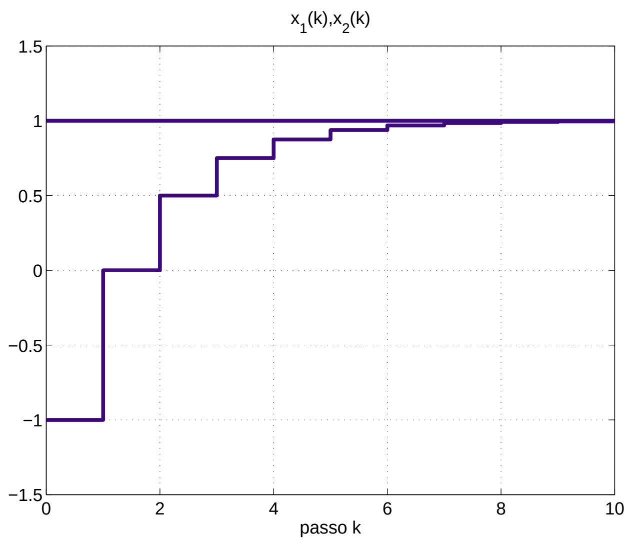
$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + u(k) \\ x_1(0) = -1 \qquad x_2(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \end{cases}$$

  – Autovalori di A: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$
  – Soluzione:

$$\begin{aligned} x(k) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] + \sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k-1-i) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 1-\frac{1}{2^k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] + \sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2^i} \\ 1 \end{bmatrix} u(k-1-i) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2^i} \\ 1 \end{bmatrix} u(k-1-i)}_{\text{risposta forzata}} \end{aligned}$$

  – Soluzione numerica per $u(k) \equiv 0$ (risposta libera):



3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

- *Equazioni alle differenze* di ordine n con ingresso

$$a_n y(k-n) + a_{n-1} y(k-n+1) + \cdots + a_1 y(k-1) + y(k) = b_n u(k-n) + \cdots + b_1 u(k-1) + b_0 u(k)$$

- Equivale al sistema di n equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ x_n(k+1) &= -a_n x_1(k) + \ \ldots \ - a_1 x_n(k) + u(k) \\ y(k) &= (b_n - b_0 a_n) x_1(k) + \cdots + (b_1 - b_0 a_1) x_n(k) + b_0 u(k) \end{cases}$$

- Equivale alla forma matriciale

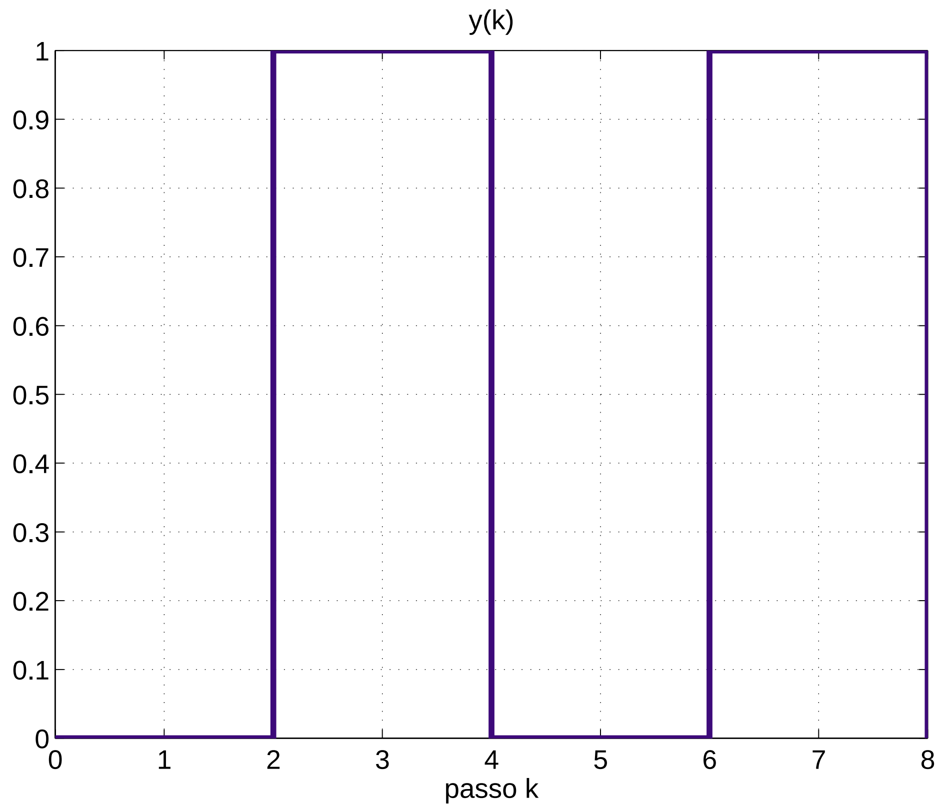
$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(k) = \begin{bmatrix} (b_n - b_0 a_n) & \ldots & (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} x(k) + b_0 u(k) \end{cases}$$

- **Esempio:**

$$y(k-2) + y(k) = u(k-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(k+1) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

– Soluzione numerica per $x(0) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $u(-2) = 0$, $u(-1) = 0$, $u(k) \equiv 1$ per $k \geq 0$ (risposta forzata):



Sistema lineare tempo-discreto, tempo-invariante:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

- Dato lo *stato iniziale* $x(0)$ e un segnale di ingresso $u(k)$, $k = 0, 1, \ldots$ è possibile predire tutta l'evoluzione dello stato $x(k)$ e dell' *uscita* $y(k)$ del sistema, per ogni $k = 0, 1, \ldots$.
- Nota che lo stato $x(0)$ sintetizza tutta la storia passata del sistema.
- La dimensione n dello stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è detta *ordine* del sistema.
- Il sistema si dice *proprio* se $D = 0$.

(cfr. sistemi lineari a tempo continuo)

In generale $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Soluzione di regime stazionario

- Ipotesi: A ha tutti autovalori in modulo < 1
- Quale sarà il valore asintotico dell'uscita corrispondente ad un dato ingresso costante $u(k) \equiv u_r \; k = 0, 1, \ldots$?
- Imponiamo $x_r(k+1) = x_r(k) \Rightarrow x_r = Ax_r + Bu_r$

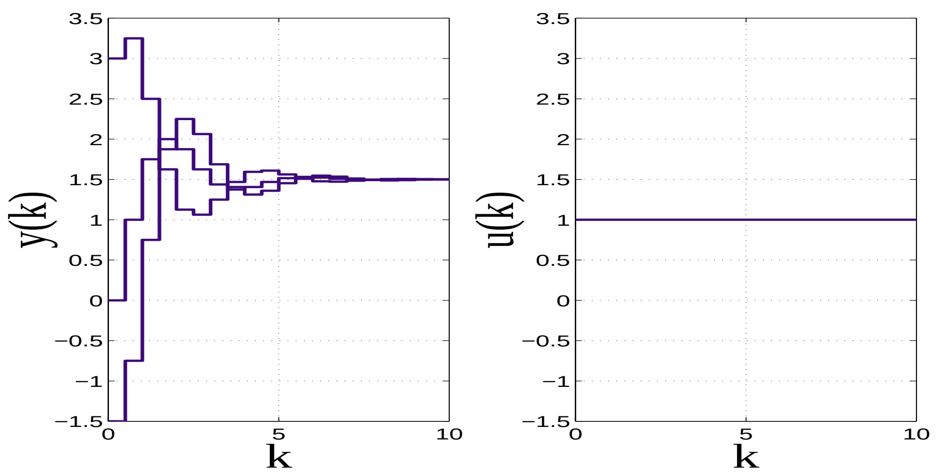
$$y_r = \underbrace{\left(C(I - A)^{-1}B + D\right)}_{\text{guadagno in continua}} u_r$$

- **Esempio**:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(k+1) & = & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) & = & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(k) \end{array} \right.$$

Guadagno in continua:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$



3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

Esempio: Dinamica studenti in un corso di laurea

Ipotesi:

Durata del corso di laurea: 3 anni
Percentuali di studenti promossi, ripetenti e abbandoni: costanti per ogni anno
Non è possibile iscriversi direttamente al II e III anno
Non sono ammessi studenti fuori corso

Notazione:

k	Anno accademico
$x_i(k)$	numero di studenti iscritti all' i-esimo anno di corso nell' anno k, $i = 1, 2, 3$
$u(k)$	numero di matricole nell'anno k
$y(k)$	numero di laureati nell'anno k
α_i	tasso di promossi nell'anno di corso i-esimo, $0 \leq \alpha_i \leq 1$
β_i	tasso di ripetenti nell'anno di corso i-esimo, $0 \leq \beta_i \leq 1$
	tasso di abbandoni nell'anno di corso i-esimo: $1 - \alpha_i - \beta_i \geq 0$

Sistema di equazioni alle differenze di ordine 3:

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= \beta_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= \alpha_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) &= \alpha_2 x_2(k) + \beta_3 x_3(k) \\ y(k) &= \alpha_3 x_3(k) \end{cases}$$

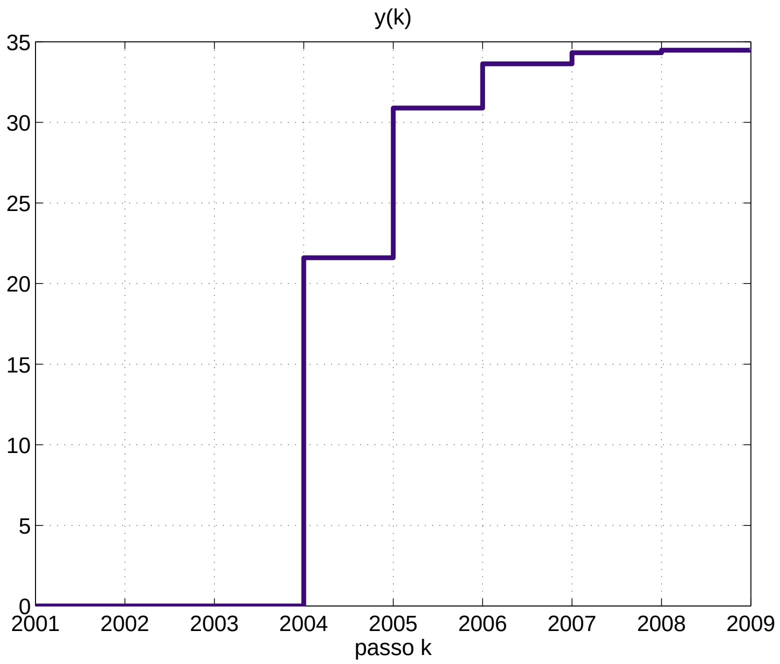
In forma matriciale:

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

Esempio:

$\alpha_1 = .60$	$\beta_1 = .20$
$\alpha_2 = .80$	$\beta_2 = .15$
$\alpha_3 = .90$	$\beta_3 = .08$

$$u(k) \equiv 50, \; k = 2001, 2002, \ldots$$



valore di regime:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.08 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{guadagno in continua}} 50 \approx 0.6905 \cdot 50 = 34.5269$$

Definizione generale di equilibrio:

- Dato il sistema (tempo discreto, non lineare, tempo variante)

$$\begin{cases} x(k+1) &= f(k, x(k), u(k)) \\ y(k) &= g(k, x(k), u(k)) \end{cases}$$

- Lo stato costante x_r e l'ingresso costante u_r sono un *equilibrio* del sistema se per $x(t_0) = x_r$ e $u(t) \equiv u_r$, $\forall k \geq k_0$, si ha $x(k) \equiv x_r$, $\forall k \geq k_0$.
- Definizione equivalente: $x(k) = f(k, x(k), u(k))$, $\forall k \geq k_0$
- x_r è detto *stato di equilibrio*
- u_r è detto *ingresso di equilibrio*

3.1 Campionamento di sistemi a t. continuo

Campionamento esatto:

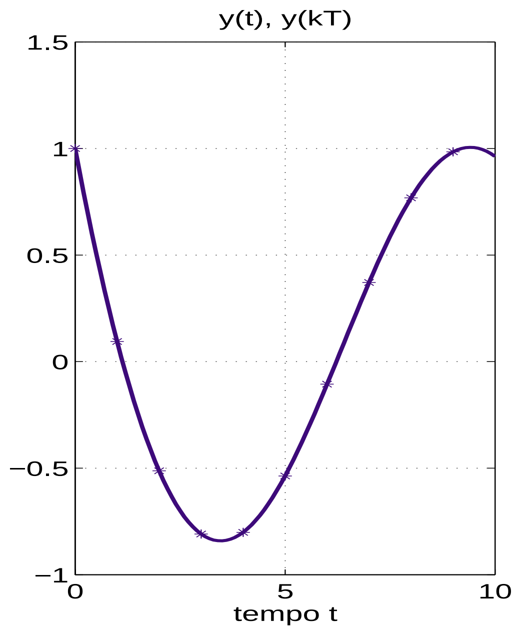
- Dato il sistema a tempo continuo

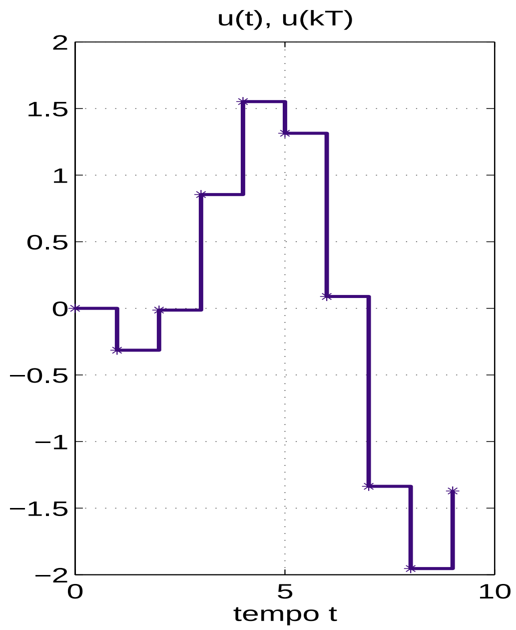
$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$
$$x(0) = x_0$$

  vogliamo esprimerne l'evoluzione agli istanti di campionamento $t = 0,\ T,\ 2T,\ \ldots,\ kT,\ \ldots,$ supponendo che l'ingresso $u(t)$ sia costante durante ogni intervallo di campionamento:

$$u(t) \equiv \tilde{u}(k),\ \ kT \le t < (k+1)T$$

- Siano $\tilde{x}(k) \triangleq x(kT)$ e $\tilde{y}(k) \triangleq y(kT)$ i campioni dello stato e dell'uscita, rispettivamente, all' istante di campionamento k-esimo.





3.1 Campionamento di sistemi a t. continuo

- Applichiamo la formula risolutiva

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

per $t = (k+1)T$, $t_0 = kT$, $x_0 = x(kT)$, e ingresso $u(\tau) \equiv \tilde{u}(k)$, $kT \le \tau < (k+1)T$:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau\right)B\tilde{u}(k)$$

ottenendo quindi

$$\tilde{x}(k+1) = e^{AT}\tilde{x}(k) + \left(\int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau\right)B\tilde{u}(k)$$

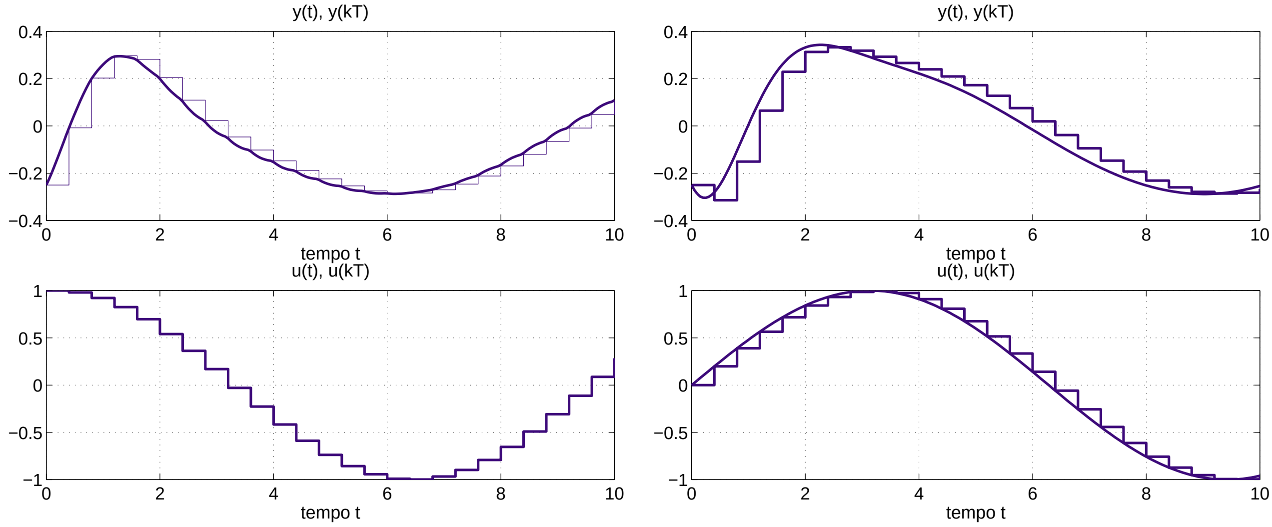
- Il sistema tempo-discreto a segnali campionati

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}\tilde{u}(k) \end{cases}$$

è legato al sistema tempo continuo dalle relazioni

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{A} \triangleq e^{AT} & \tilde{B} \triangleq \left(\int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau\right)B \\ \tilde{C} \triangleq C & \tilde{D} \triangleq D \end{array}}$$

3.1 Campionamento di sistemi a t. continuo



- Nota: in generale , affinchè il sistema a tempo discreto $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ e il sistema a tempo continuo (A, B, C, D) coincidano agli istanti di campionamento $t = kT$ occorre che l'ingresso $u(t)$ sia costante durante l'intervallo di campionamento .

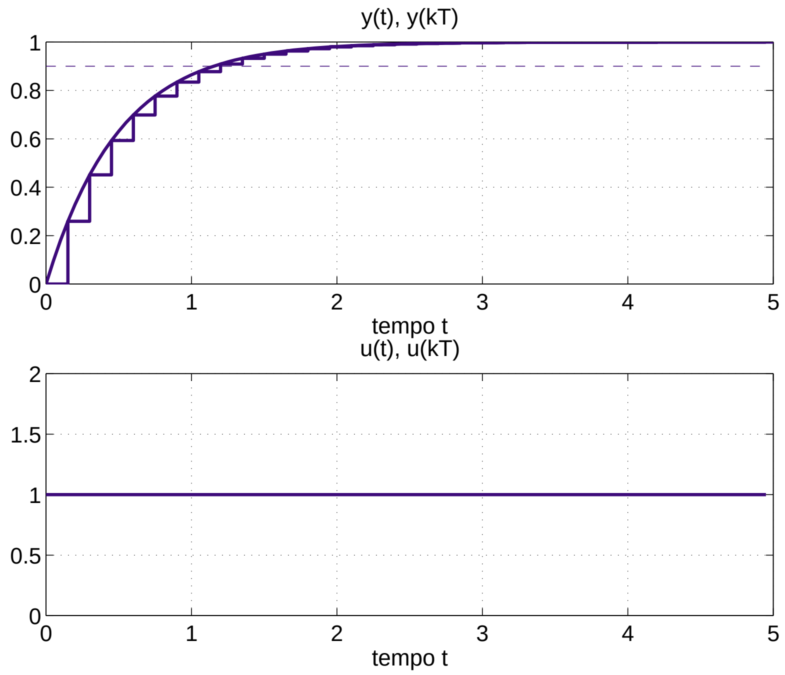
- Questo normalmente avviene nei sistemi di controllo digitale, dove il segnale di ingresso viene generato a frequenze regolari da un'unità di calcolo (microcontrollore/PC/DSP) e mantenuto costante.

- In ogni caso, $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ è una approssimazione del modello tempo continuo (A, B, C, D) .

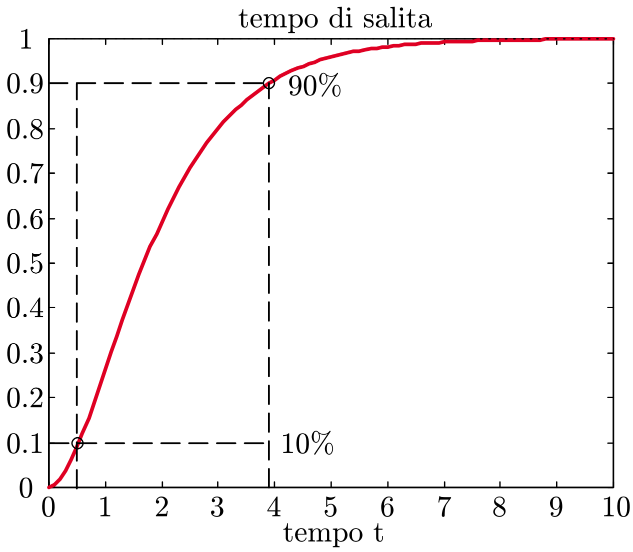
3.1 Campionamento di sistemi a t. continuo

- Come scegliere il tempo di campionamento T per discretizzare un dato sistema ?
- Buona scelta (per sistemi lineari):

$$\boxed{T \approx \frac{1}{10} \text{ tempo di salita per ingresso } u(t) = 1,\ x(0) = 0}$$

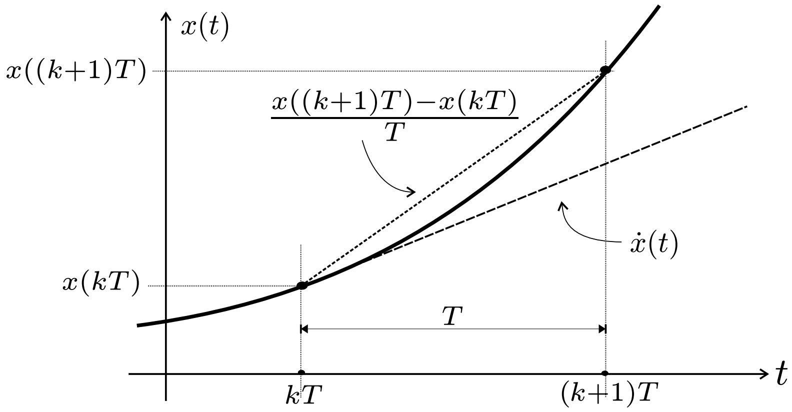


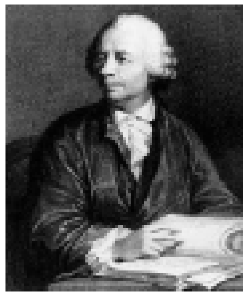
- *Tempo di salita* $\triangleq$ tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore di regime



3.1 Campionamento di sistemi a t. continuo

Campionamento con metodo di Eulero:





(1707-1783)

- Idea: approssimare $\dot{x}(t)$ con $\frac{x((k+1)T)-x(kT)}{T}$
- Approssimazione per sistema lineare:

$$x((k+1)T) = (I + TA)x(kT) + TBu(kT)$$

- Il sistema tempo-discreto a segnali campionati

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}\tilde{u}(k) \end{cases}$$

  è legato al sistema tempo continuo dalle relazioni

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{A} \triangleq I + AT & \tilde{B} \triangleq TB \\ \tilde{C} \triangleq C & \tilde{D} \triangleq D \end{array}}$$

- Nota: $e^{TA} = I + TA + \cdots + \frac{T^n A^n}{n!} + \ldots$
  il metodo di Eulero approssima il metodo esatto.
  Coincidono per $T \to 0$.
- Il metodo di Eulero è applicabile anche a sistemi non lineari $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.

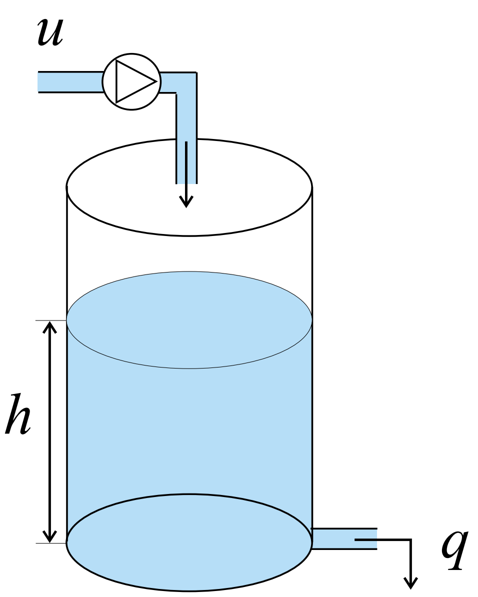
Esempio: Serbatoio

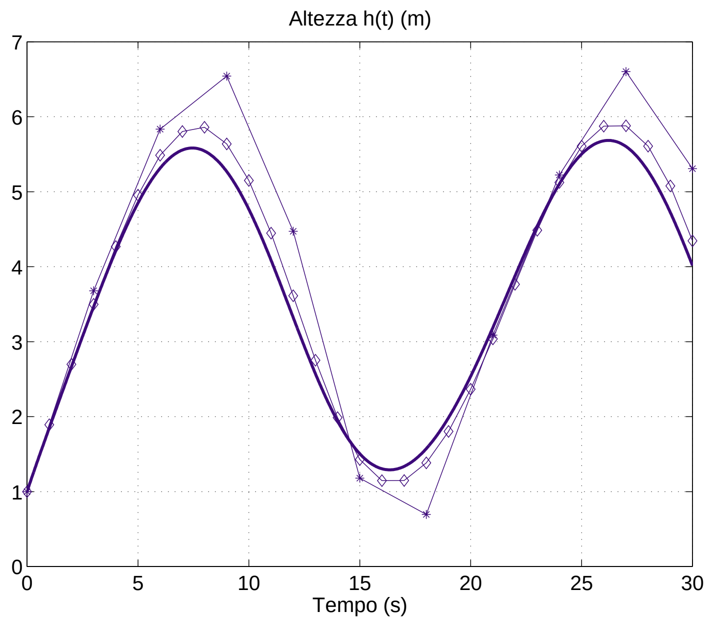
- Modello matematico del serbatoio (tempo continuo):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}h(t) & = & -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t) \\ q(t) & = & a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \end{cases}$$

- Modello matematico del serbatoio (tempo discreto):

$$\begin{cases} \tilde{h}(k+1) & = & \tilde{h}(k) - \frac{Ta\sqrt{2g}}{A}\sqrt{\tilde{h}(k)} + \frac{T}{A}\tilde{u}(k) \\ \tilde{q}(k) & = & a\sqrt{2g}\sqrt{\tilde{h}(k)} \end{cases}$$





- Minore il tempo di campionamento, migliore l'approssimazione (ma maggiore il numero di calcoli)

3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

4. Linearità e Linearizzazione

4 Linearità e Linearizzazione

Principio di sovrapposizione degli effetti

- Considera il sistema lineare tempo-discreto, tempo-invariante:

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)+Du(k) \end{cases}$$
$$x(0)=x_0$$

- La soluzione esiste ed è unica:

$$y(k,x_0,u)=CA^k x_0+\sum_{i=0}^{k-1} CA^i Bu(k-1-i)$$

- Indichiamo con $y(k,x_0,u)$ la risposta dell'uscita $y(k)$ per sottolineare l'*effetto* dello stato iniziale x_0 + ingresso $u(0),\ u(1),\ \ldots,\ u(k)$.

- *Principio di sovrapposizione degli effetti* :

  $$y(k,\alpha x_0+\beta x_1,\alpha u+\beta u_1)=\alpha y(k,x_0,u)+\beta y(k,x_1,u_1)$$

  l'uscita complessiva è data dalla sovrapposizione delle uscite dovute agli effetti di (x_0,u) e di (x_1,u_1).

- Vale anche per sistemi lineari tempo-continui
- Vale anche se il sistema è lineare tempo-variante
- **Non** vale se il sistema è nonlineare.

- Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
& y(k, \alpha x_0 + \beta x_1, \alpha u + \beta u_1) = CA^k(\alpha x_0 + \beta x_1) + \\
& \quad \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} CA^i B(\alpha u(k-1-i) + \beta u_1(k-1-i)) \\
& = CA^k \alpha x_0 + CA^k \beta x_1 + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} CA^i B \alpha u(k-1-i) + \\
& \quad \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} CA^i B \beta u_1(k-1-i)) \\
& = \alpha(CA^k x_0 + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} CA^i B u(k-1-i)) + \\
& \quad \beta(CA^k x_0 + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} CA^i B u(k-1-i)) \\
& = \alpha y(k, x_0, u) + \beta y(k, x_1, u_1)
\end{aligned}
$$

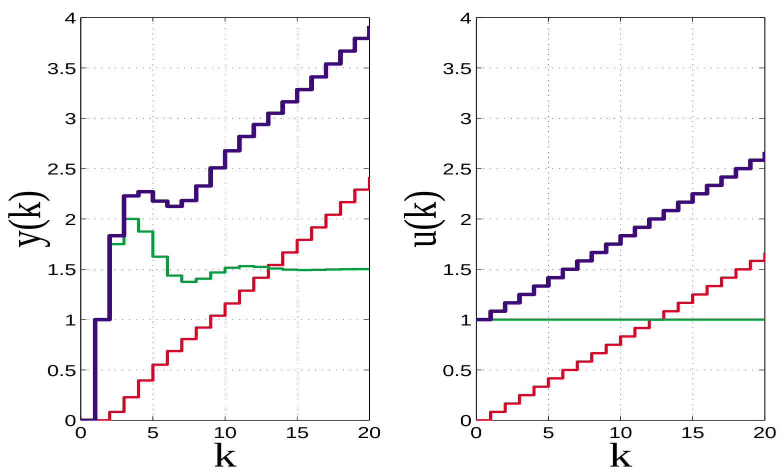
- Caso particolare: somma degli effetti ($\alpha = \beta = 1$)

$$y(k, x_0 + x_1, u + u_1) = y(k, x_0, u) + y(k, x_1, u_1)$$

- Caso particolare: moltiplicazione per costante ($\beta = 0$)

$$y(k, \alpha x_0, \alpha u) = \alpha y(k, x_0, u)$$

- **Esempio:** $x_0 = x_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $u(k) \equiv 1$, $u_1(k) = k/12$.



Linearizzazione

- Considera il sistema nonlineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- Sia (x_r, u_r) un equilibrio: $f(x_r, u_r) = 0$
- Obiettivo: studiare il sistema per piccole variazioni $\Delta u(t) \triangleq u(t) - u_r$ e $\Delta x(0) \triangleq x(0) - x_r$.
- L'evoluzione di $\Delta x(t) \triangleq x(t) - x_r$ è data da

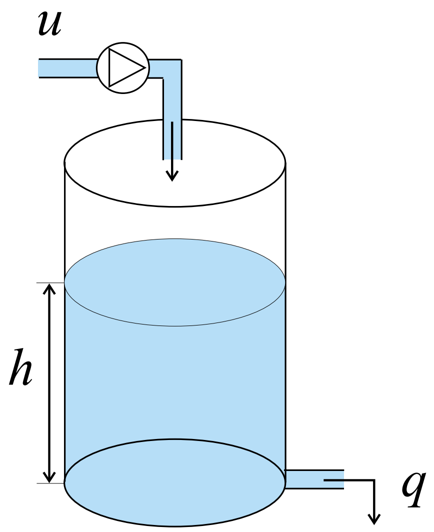
$$\begin{aligned} \dot{\Delta x}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}_r = f(x(t), u(t)) \\ &= f(\Delta x(t) + x_r, \Delta u(t) + u_r) \\ &\approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_r, u_r)}_{A} \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(x_r, u_r)}_{B} \Delta u(t) \end{aligned}$$

- In maniera simile,

$$\Delta y(t) \approx \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x_r, u_r)}_{C} \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u}(x_r, u_r)}_{D} \Delta u(t)$$

  dove $\Delta y(t) \triangleq y(t) - g(x_r, u_r)$ è la deviazione dell'uscita dall'equilibrio.

- Le variazioni $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, e $\Delta u(t)$ sono quindi governate (in prima approssimazione) dal sistema *linearizzato* (A, B, C, D) .
- Per sistemi nonlineari a tempo-discreto, vale un ragionamento analogo.



Esempio: Serbatoio

- Modello tempo continuo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}h(t) & = & -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t) \\ q(t) & = & a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \end{cases}$$

$h(0) = h_0$

- Equilibrio per ingresso costante $u(t) \equiv u_r$, $t \geq 0$:

$$\dot{h}_r = 0 = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h_r} + \frac{1}{A}u_r \;\Rightarrow\; h_r = \frac{1}{2g}\left(\frac{u_r}{a}\right)^2$$

- Sistema linearizzato:

$$\begin{aligned} A &\triangleq \frac{\partial}{\partial h}\left(-\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h} + \frac{1}{A}u\right)\Bigg|_{h_r,u_r} = -\frac{a^2 g}{A u_r} \\ B &\triangleq \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h} + \frac{1}{A}u\right)\Bigg|_{h_r,u_r} = \frac{1}{A} \\ C &\triangleq \frac{\partial}{\partial h}\left(-a\sqrt{2g}\sqrt{h}\right)\Bigg|_{h_r,u_r} = -\frac{a^2 g}{u_r} \\ D &\triangleq \frac{\partial}{\partial u}\left(-a\sqrt{2g}\sqrt{h}\right)\Bigg|_{h_r,u_r} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta\dot{h}(t) & = & -\frac{a^2 g}{A u_r}\Delta h(t) + \frac{1}{A}\Delta u(t) \\ \Delta q(t) & = & -\frac{a^2 g}{u_r}\Delta h(t) \end{cases}$$

$\Delta h(0) = h_0 - h_r$

- Il sistema linearizzato permette di analizzare in maniera semplice (seppur approssimata) la dinamica di h, q per piccole variazioni della portata di ingresso $u(t)$ dalla portata nominale u_r e per piccole variazioni della cond. iniz. $h(0)$ dall'equilibrio h_r.

4 Linearità e Linearizzazione

5. Stabilità

5 Stabilità

Concetto intuitivo di stabilità:

- Considera il sistema nonlineare

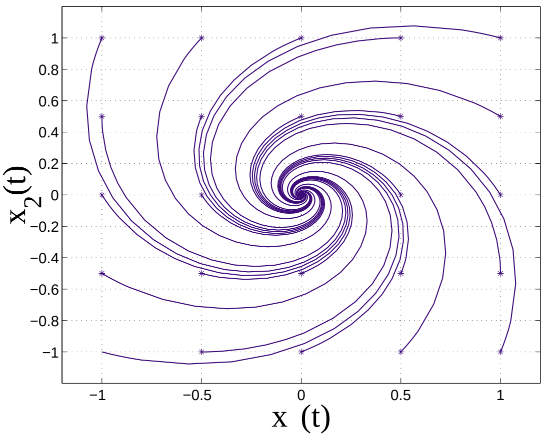
$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u_r) \\ y(t) &= g(x(t), u_r) \end{cases}$$

- Sia x_r lo stato di equilibrio relativo a u_r:
  $f(x_r, u_r) = 0$

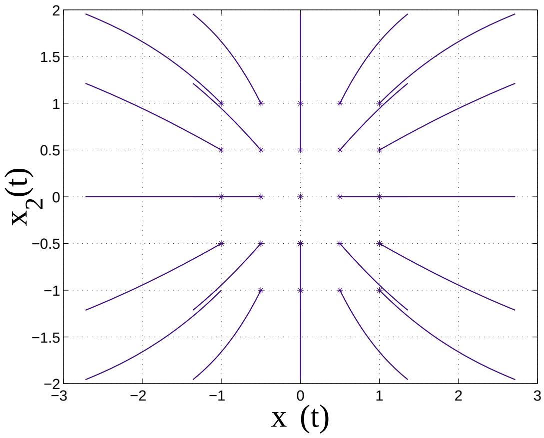
- Il punto di equilibrio x_r si dice *stabile* se per ogni condizione iniziale x_0 vicino a x_r la relativa traiettoria $x(t, x_0, u_r)$ rimane vicino a x_r per ogni $t \geq 0$.[a]

- Il punto di equilibrio x_r si dice inoltre *asintoticamente stabile* se è stabile e $x(t, x_0, u_r) \to x_r$ per $t \to \infty$

- Altrimenti, il punto di equilibrio x_r si dice *instabile*



(as.) stabile



instabile

[a]Def. analitica: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\|x_0 - x_r\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0, u_r) - x_r\| < \epsilon$, $\forall t \geq 0$.

5 Stabilità

Stabilità dei sistemi lineari (tempo-continuo):

- Considera il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{cases}$$

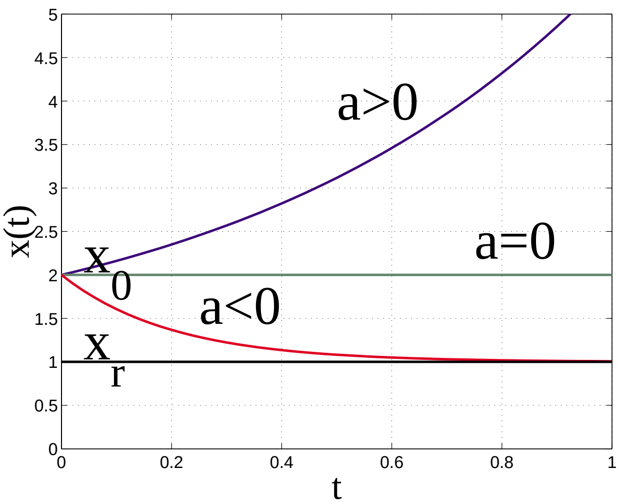
- Equilibrio per $u(t) \equiv u_r$: $0 = ax_r + bu_r \Rightarrow$ $x_r = -\frac{b}{a}u_r$.
- Per $u(t) \equiv u_r$, $t \geq 0$, la quantità $z(t) = x(t) - x_r$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\dot{z}(t) = ax(t) + bu_r = ax(t) - ax_r = az(t)$$

- da cui:

$$z(t) = e^{at}z_0 \ \Rightarrow x(t) = x_r + e^{at}(x_0 - x_r)$$

- Pertanto:
  - x_r è instabile se $a > 0$
  - x_r è stabile se $a \leq 0$
  - x_r è asintoticamente stabile se $a < 0$



Stabilità dei sistemi lineari (tempo-discreto):

- Considera il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) + bu(k) \\ y(k) = cx(k) \end{cases}$$

- Equilibrio per $u(k) \equiv u_r$: $x_r = ax_r + bu_r \Rightarrow$ $x_r = \frac{b}{1-a} u_r$.

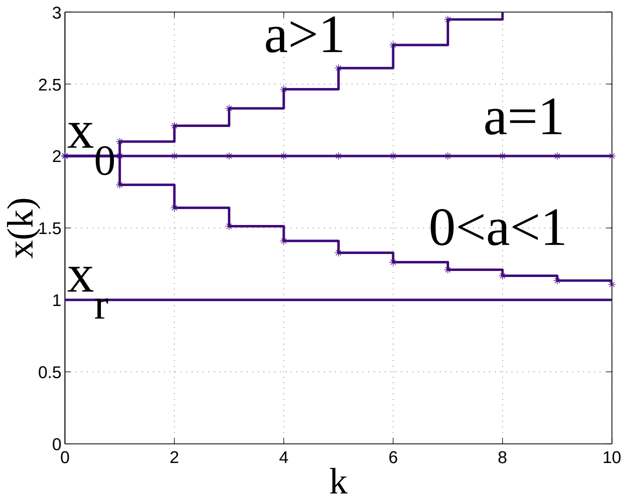
- Per $u(k) \equiv u_r$, $k = 0, 1, \ldots,$ la quantità $z(k) = x(k) - x_r$ soddisfa l'equazione alle differenze

$$z(k+1) = ax(k) + bu_r - x_r = ax(k) + (1-a)x_r - x_r = az(k)$$

- da cui:

$$z(k) = a^k z_0 \;\Rightarrow x(k) = x_r + a^k (x_0 - x_r)$$

- Pertanto:
  - x_r è instabile se $|a| > 1$
  - x_r è stabile se $|a| \leq 1$
  - x_r è asintoticamente stabile se $|a| < 1$



sistema	tempo continuo	tempo discreto
stabile	$a \leq 0$	$\|a\| \leq 1$
as. stabile	$a < 0$	$\|a\| < 1$
instabile	$a > 0$	$\|a\| > 1$

Definizione di stabilità dei sistemi lineari

- Un sistema lineare (A, B, C, D) si dice *stabile* se la risposta libera è limitata per ogni valore di $x(0)$.
- Un sistema lineare (A, B, C, D) si dice *asintoticamente stabile* se la risposta libera tende a 0 per ogni valore di $x(0)$.
- Un sistema lineare (A, B, C, D) si dice *instabile* se per almeno una condizione iniziale $x(0)$ la risposta libera è illimitata.

Relazione fra stabilità e autovalori di A (tempo continuo):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{At}x_0$$

- **Teorema 1.** *Un sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa.*
- **Teorema 2.** *Un sistema è instabile se esiste almeno un autovalore di A con parte reale positiva.*
- Ricorda: la matrice esponenziale è definita come $e^{At} \triangleq I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ \dots \ + \frac{A^nt^n}{n!} + \ \dots$

  Se la matrice A è diagonalizzabile: $A = T^{-1}\Lambda T$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = T^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T$$

- Per autovalori complessi $\lambda = a + jb$:

$$|e^{\lambda t}| = e^{at}|e^{jbt}| = e^{at}$$

  È quindi la parte reale degli autovalori che determina la stabilità del sistema.

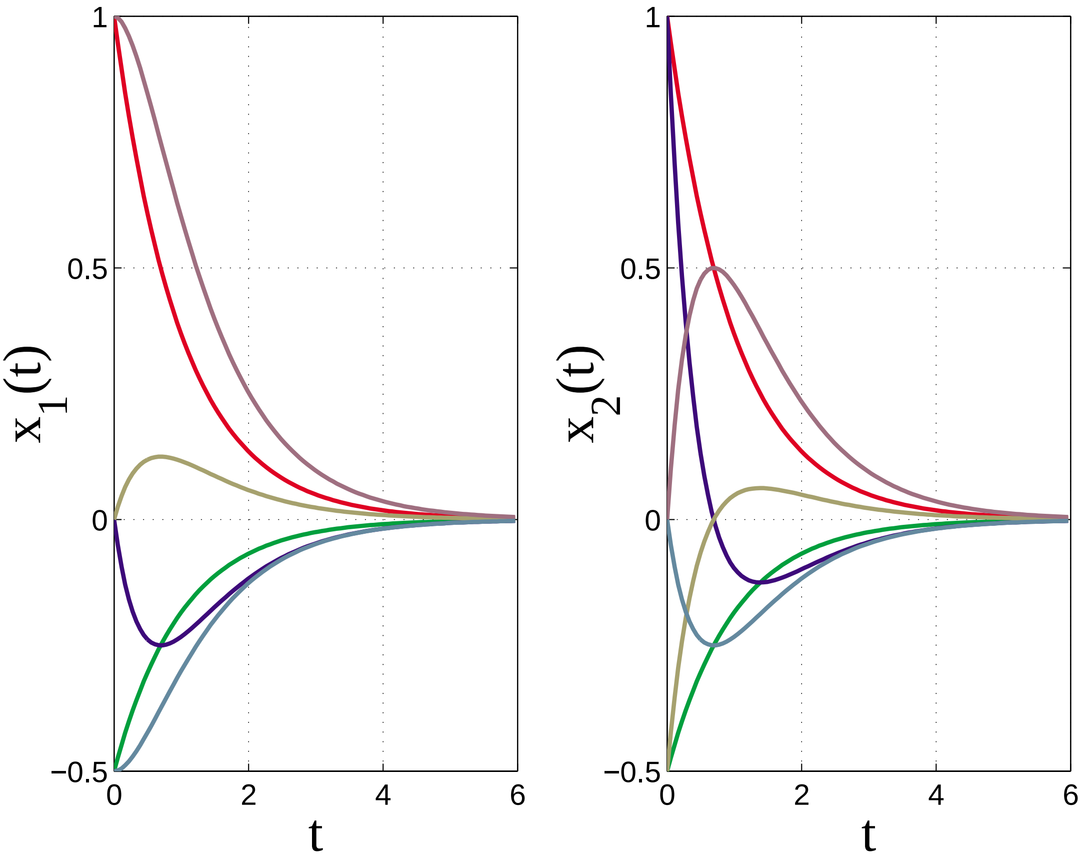
- **Esempio 1**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x(t) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{-1, -2\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10}(2e^{-t} - e^{-2t}) + x_{20}(-e^{-t} + e^{-2t}) \\ x_2(t) = x_{10}(2e^{-t} - 2e^{-2t}) + x_{20}(-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{cases}$$

Asintoticamente stabile



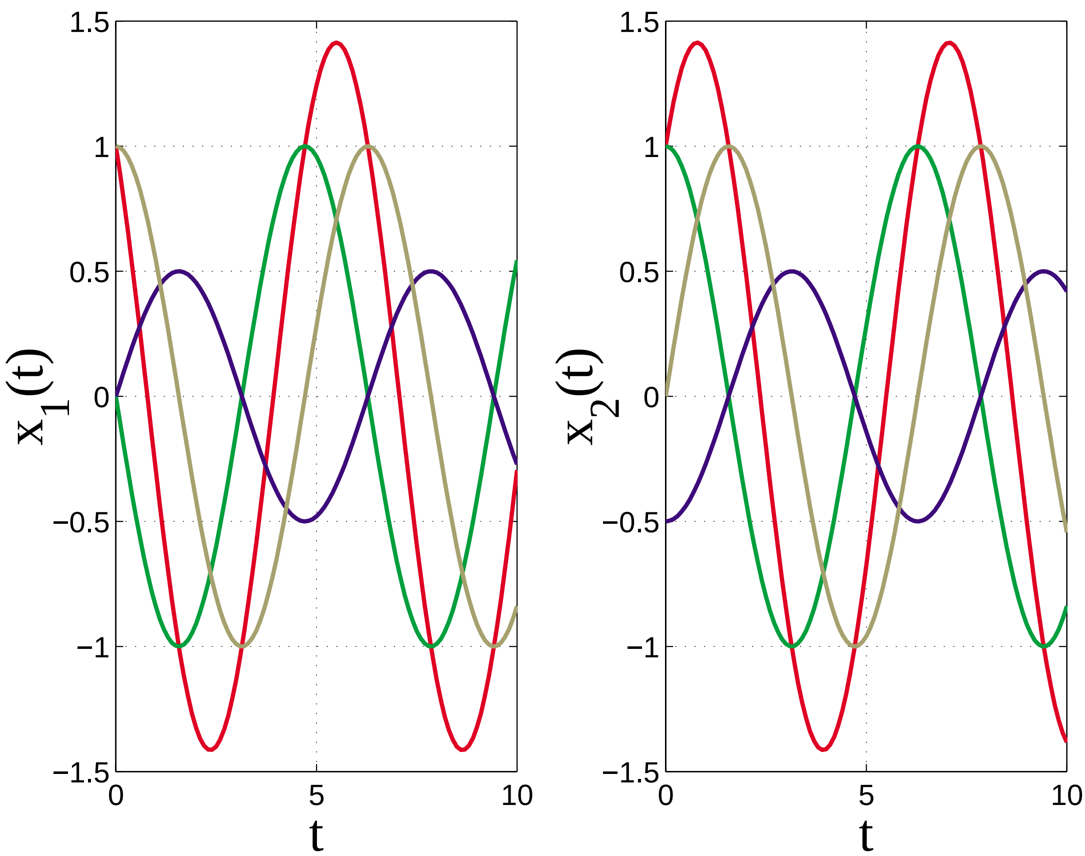
- **Esempio 2**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{+j, -j\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(t) &=& x_{10}\cos t - x_{20}\sin t \\ x_2(t) &=& x_{10}\sin t + x_{20}\cos t \end{cases}$$

Stabile



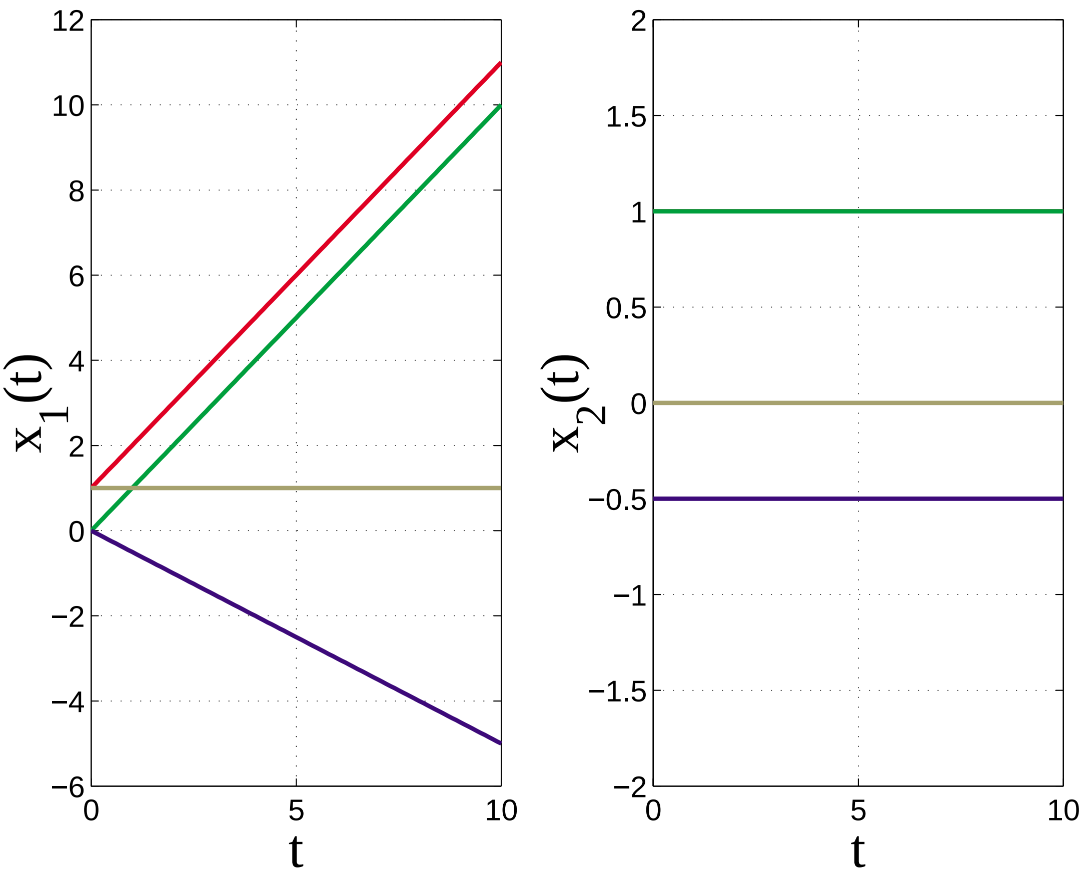
- **Esempio 3**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{0, 0\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(t) &= & x_{10} + x_{20}t \\ x_2(t) &= & x_{20} \end{cases}$$

Instabile



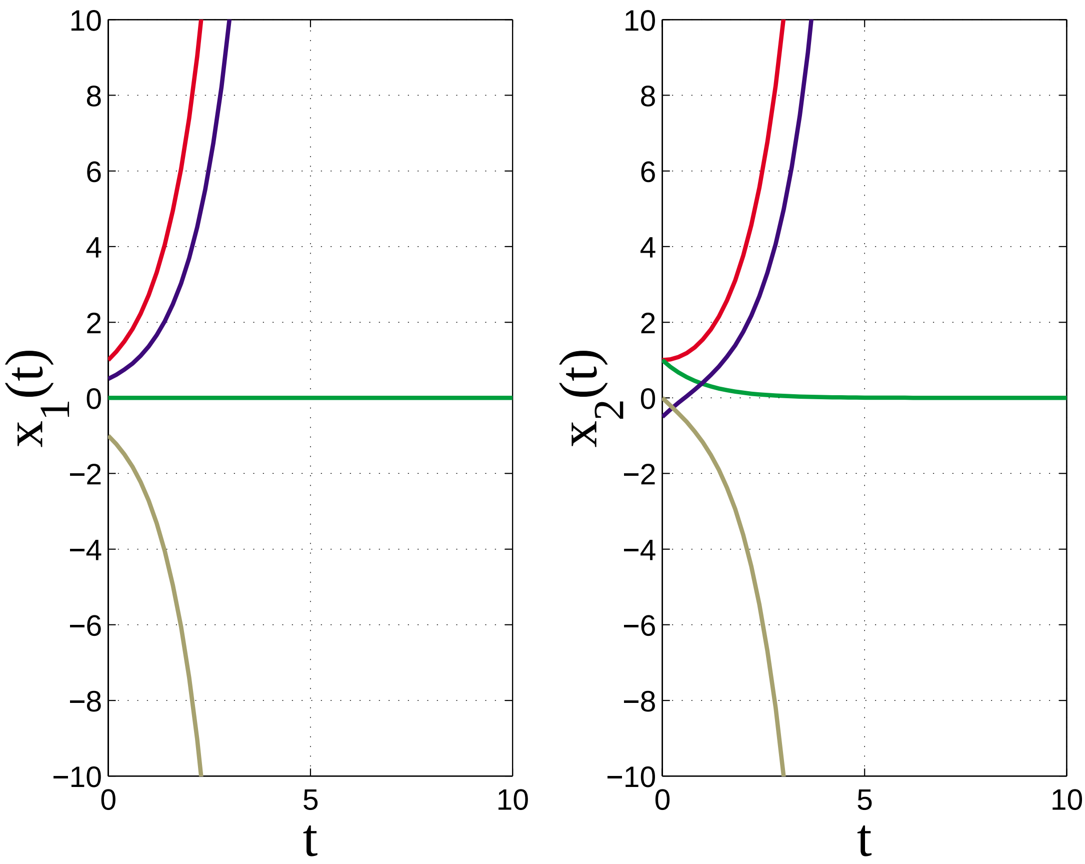
- **Esempio 4**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{ Autovalori di } A\text{: } \{-1, 1\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10}e^t \\ x_2(t) = \frac{1}{2}x_{10}e^t + (x_{20} - \frac{1}{2}x_{10})e^{-t} \end{cases}$$

Instabile



Relazione fra stabilità e autovalori di A (tempo discreto):

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(k) = A^k x_0$$

- **Teorema 1**. *Un sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno modulo minore di 1.*

- **Teorema 2**. *Un sistema è instabile se esiste almeno un autovalore di A con modulo maggiore di 1.*

- Ricorda: se la matrice A è diagonalizzabile: $A = T^{-1}\Lambda T$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} T$$

- Per autovalori complessi $\lambda = \rho e^{j\theta}$:

$$|\lambda^k| = |\rho^k e^{jk\theta}| = \rho^k |e^{jk\theta}| = \rho^k$$

È quindi il modulo degli autovalori che determina la stabilità del sistema.

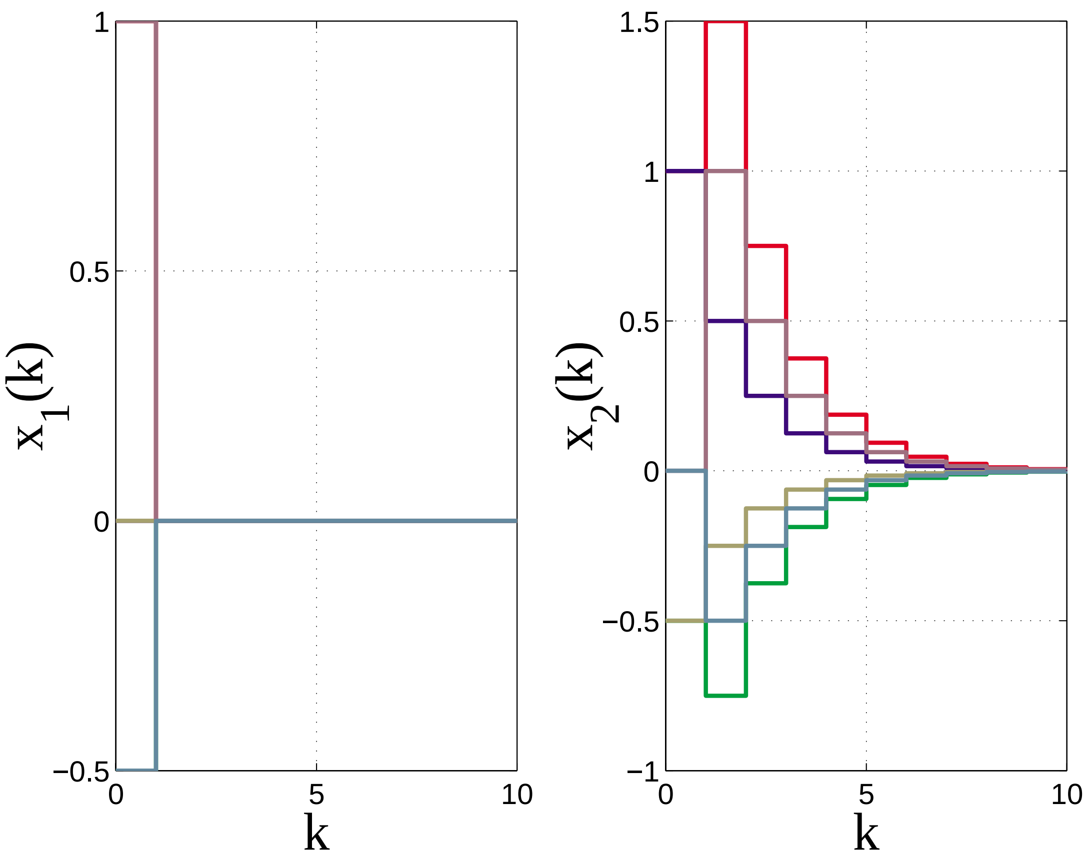
- **Esempio 1**

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(k) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{0, \frac{1}{2}\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(k) = 0, \ k = 1, 2, \ldots \\ x_2(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} x_{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k} x_{20}, \ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Asintoticamente stabile



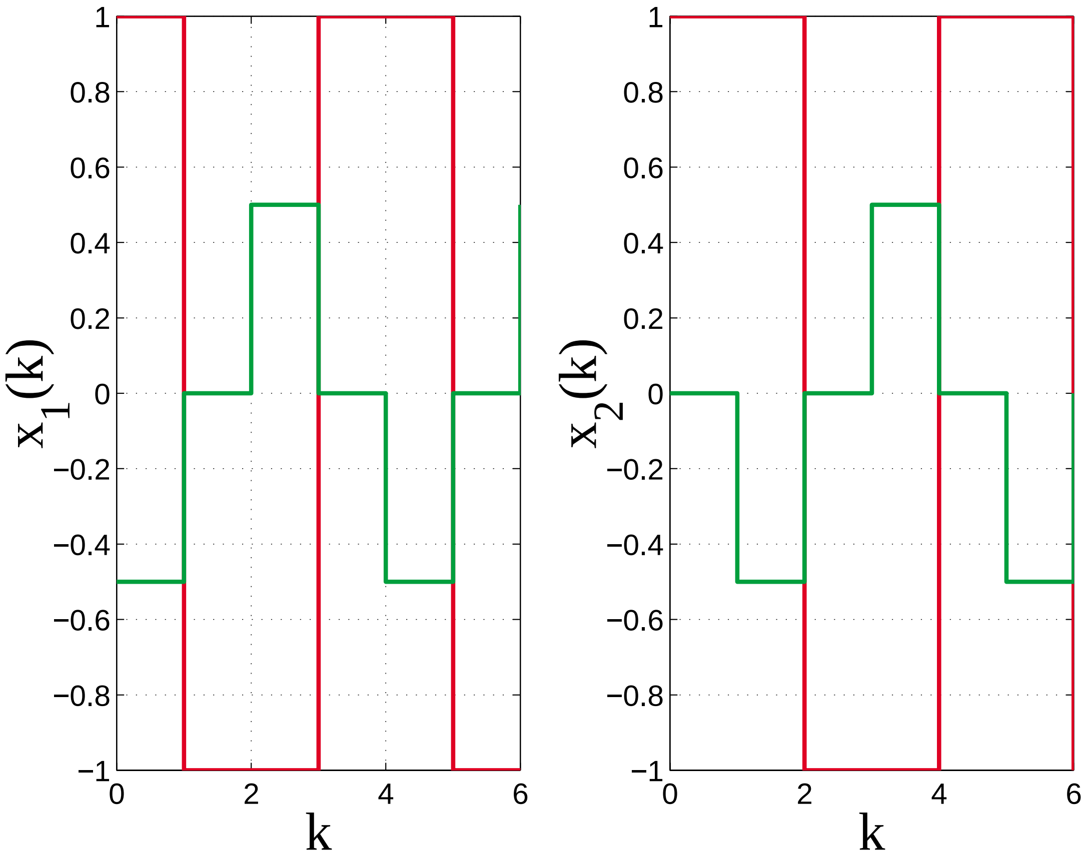
- **Esempio 2**

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{ Autovalori di } A\text{: } \{+j, -j\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(k) = x_{10} \cos \frac{k\pi}{2} + x_{20} \sin \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots \\ x_2(k) = x_{10} \sin \frac{k\pi}{2} + x_{20} \cos \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

Stabile



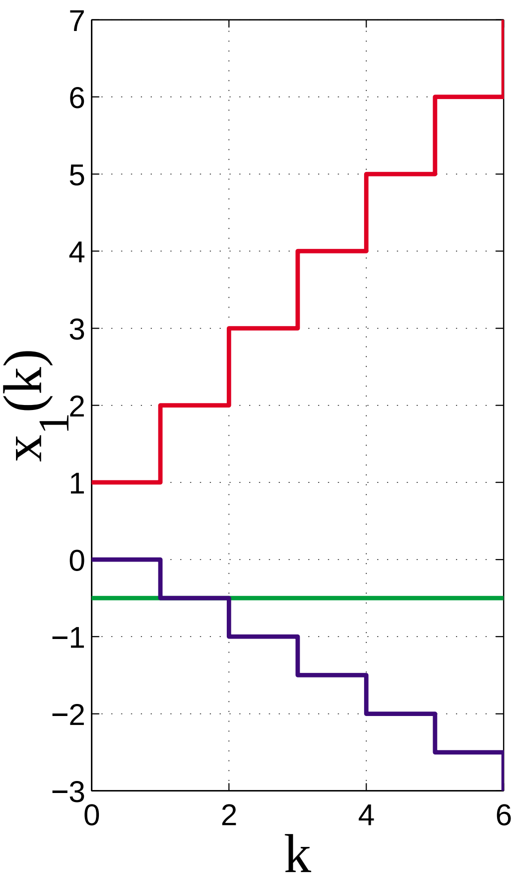
- **Esempio 3**

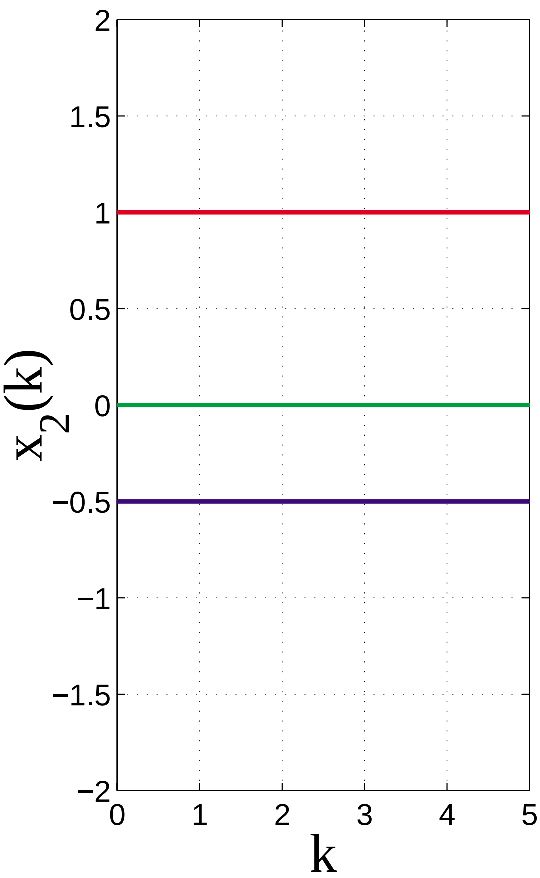
$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{1, 1\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(k) = x_{10} + x_{20}k, \;\; k = 0, 1, \ldots \\ x_2(k) = x_{20}, \;\; k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Instabile





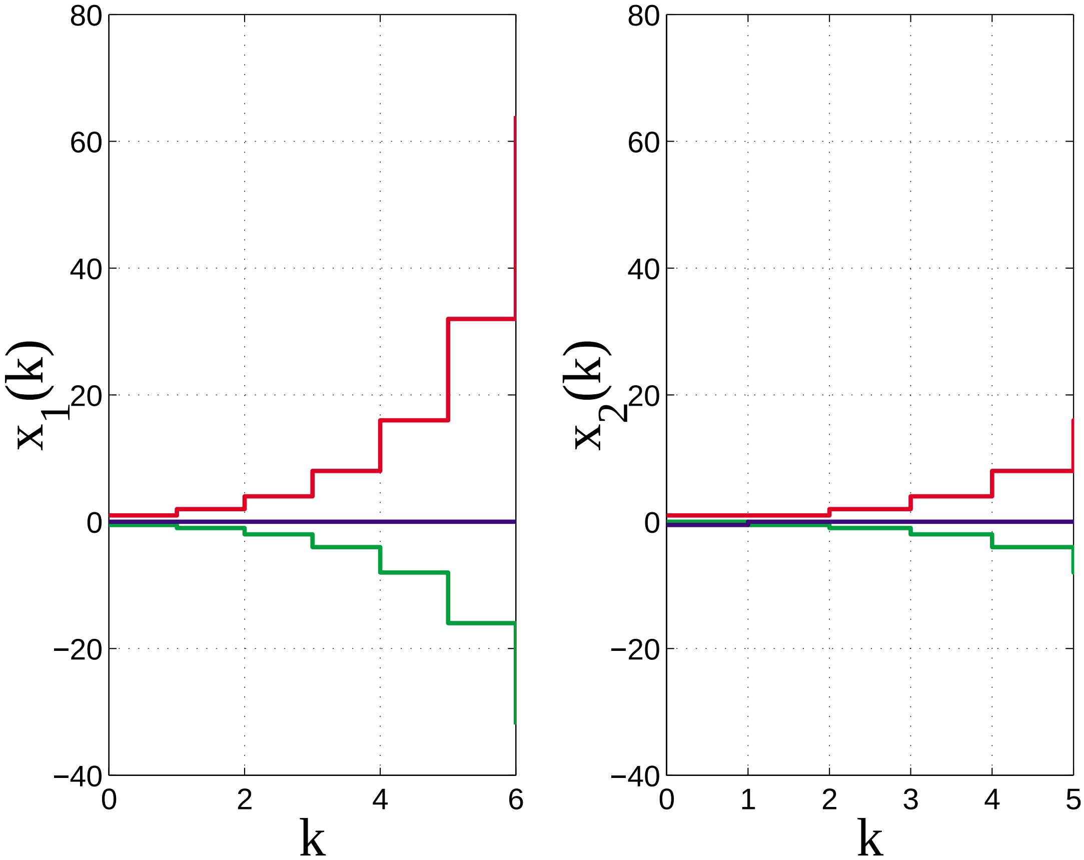
- **Esempio 4**

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{0, 2\}$$

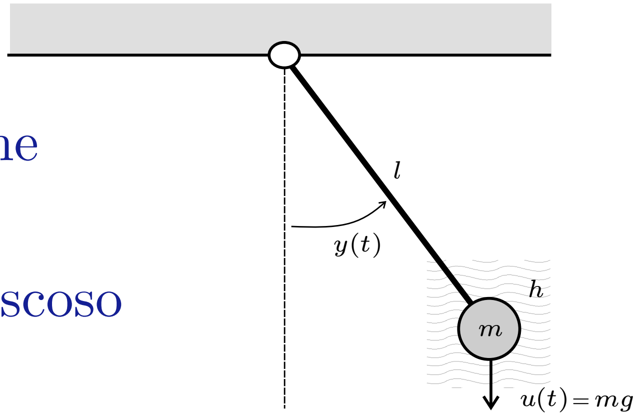
soluzione:

$$\begin{cases} x_1(k) &= & 2^k x_{10}, \; k = 0, 1, \ldots \\ x_2(k) &= & 2^{k-1} x_{10}, \; k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Instabile



Esempio: Pendolo



$y(t) \triangleq$ angolo di deflessione
$u(t) \triangleq mg$ forza peso
$h\dot{y}(t) \triangleq$ forza di attrito viscoso

Modello matematico:

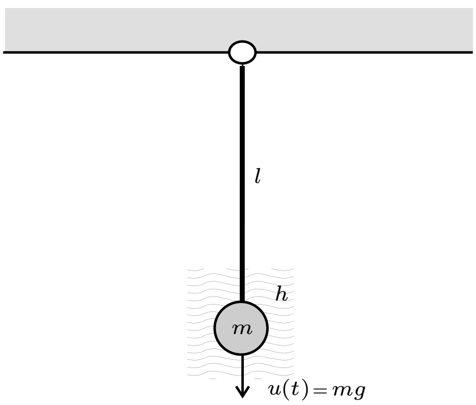
$$ml^2\ddot{y}(t) = -lmg\sin y(t) - h\dot{y}(t)$$

Equazione in forma di stato: $(x_1 = y,\ x_2 = \dot{y})$

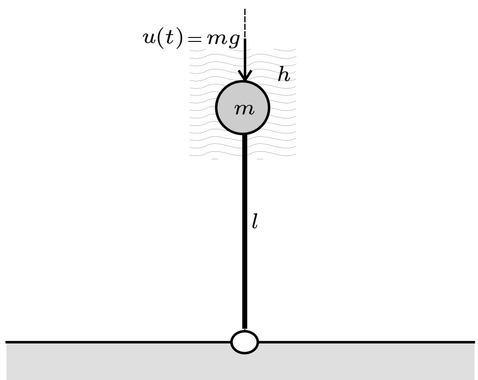
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 - Hx_2, \qquad H \triangleq \frac{h}{ml^2} \end{cases}$$

Equilibrio:

$$\begin{bmatrix} x_{2r} \\ -\frac{g}{l}\sin x_{1r} - Hx_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{2r} = 0 \\ x_{1r} = \pm k\pi,\ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$



$x_{2r} = 0,\ x_{1r} = 0, \pm 2\pi, \ldots$

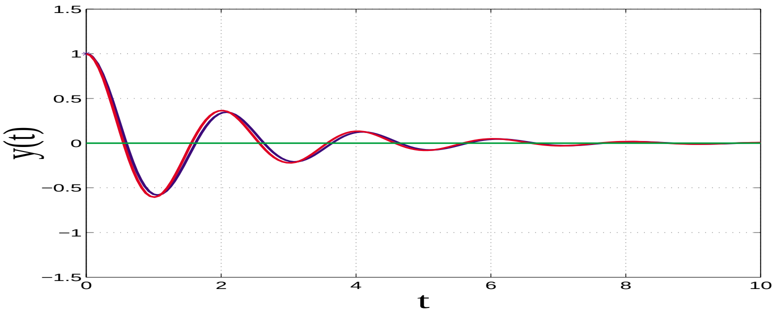


$x_{2r} = 0,\ x_{1r} = 0, \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$

- Sistema linearizzato ($x_{1r} = 0$, $x_{2r} = 0$)

$$\Delta\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -H \end{bmatrix}}_{A} \Delta x(t)$$

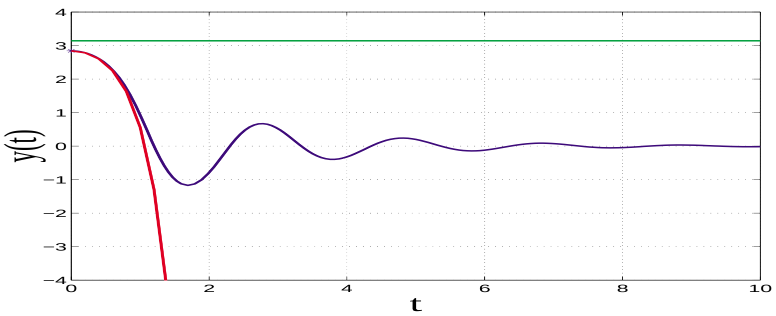
Autovalori di A: $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + H\lambda + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow$
$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(-H \pm \sqrt{H^2 - 4\frac{g}{l}}\right)$
Parte reale < 0: as. stabile



- Sistema linearizzato ($x_{1r} = \pi$, $x_{2r} = 0$)

$$\Delta\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -H \end{bmatrix}}_{A} \Delta x(t)$$

Autovalori di A: $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + H\lambda - \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow$
$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(-H \pm \sqrt{H^2 + 4\frac{g}{l}}\right)$
Parte reale > 0 e < 0: instabile



5 Stabilità

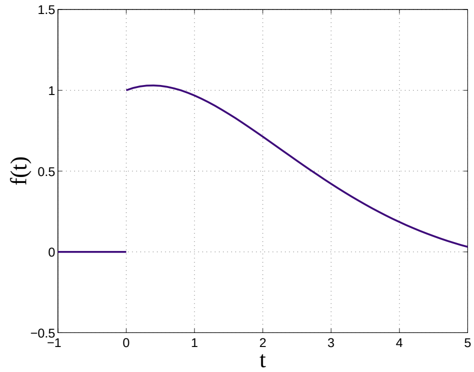
6. Trasformate e Funzioni di Trasferimento

6.1 Trasformata di Laplace

Definizione

La *trasformata di Laplace* di $f(t)$ è la funzione di variabile complessa $s \in \mathbb{C}$, $(s = \sigma + j\omega)$,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \triangleq \mathcal{L}[f]$$



Esempi

- *Funzione impulso (Delta di Dirac)* [a]:

$$f(t) = \delta(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ +\infty & \text{se } t = 0 \end{cases} \quad \text{tale che} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta] = F(s) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

- *Funzione gradino* :

$$f(t) = 1\!\!1(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[1\!\!1] = F(s) = \frac{1}{s}$$

---

[a] La funzione $\delta(t)$ is può considerare come il limite della successione di funzioni $f_\epsilon(t)$ per $\epsilon \to 0$ tali che

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{se } 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

6.1 Trasformata di Laplace

Proprietà della trasformata di Laplace

- **Linearità** :

$$\mathcal{L}[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + k_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Esempio: $f(t) = \delta(t) - 2\,1\!\!1(t) \Rightarrow \mathcal{L}[f] = 1 - \frac{2}{s}$.

- **Traslazione nel tempo** :

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}\mathcal{L}[f(t)]$$

Esempio: $f(t) = 3\,1\!\!1(t-2) \Rightarrow \mathcal{L}[f] = \frac{3e^{-2s}}{s}$.

- **Traslazione nella frequenza** :

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a), \text{ dove } F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Esempio: $f(t) = e^{at}\,1\!\!1(t) \Rightarrow \mathcal{L}[f] = \frac{1}{s-a}$
Esempio: $f(t) = \cos(\omega t)\,1\!\!1(t) \Rightarrow \mathcal{L}[f] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
(Nota: $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$)

- **Derivazione nel tempo** [a]:

$$\mathcal{L}[\frac{d}{dt} f(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^+)$$

Esempio: $f(t) = \sin(\omega t)\,1\!\!1(t) \Rightarrow L[f] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

- **Derivazione nella frequenza** :

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]$$

Esempio: $f(t) = t\,1\!\!1(t) \Rightarrow L[f] = \frac{1}{s^2}$.

[a] $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$. Se f è continua in 0, $f(0^+) = f(0)$

6.1 Trasformata di Laplace

- **Teorema del valore iniziale** :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \;\Rightarrow\; f(0^+) \triangleq \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Esempio: $f(t) = 1\!\!1(t) - t\,1\!\!1(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$
$f(0^+) = 1 = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

- **Teorema del valore finale** :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \;\Rightarrow\; f(+\infty) \triangleq \lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Esempio: $f(t) = 1\!\!1(t) - e^{-t}\,1\!\!1(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$
$f(+\infty) = 1 = \lim_{s\to 0} sF(s)$

Pierre-Simon Laplace

(1749-1827)

6.2 Funzioni di Trasferimento - T. Continuo

- Considera il sistema a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

- Applichiamo la trasformata di Laplace[a]:

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

dove $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$, $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$.

- Esplicitando rispetto a x_0 e $U(s)$:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1}x_0}_{Y_L(s)} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)}_{Y_F(s)} \end{aligned}$$

$Y_L(s)$=trasformata di Laplace della risposta libera
$Y_F(s)$=trasformata di Laplace della risposta forzata

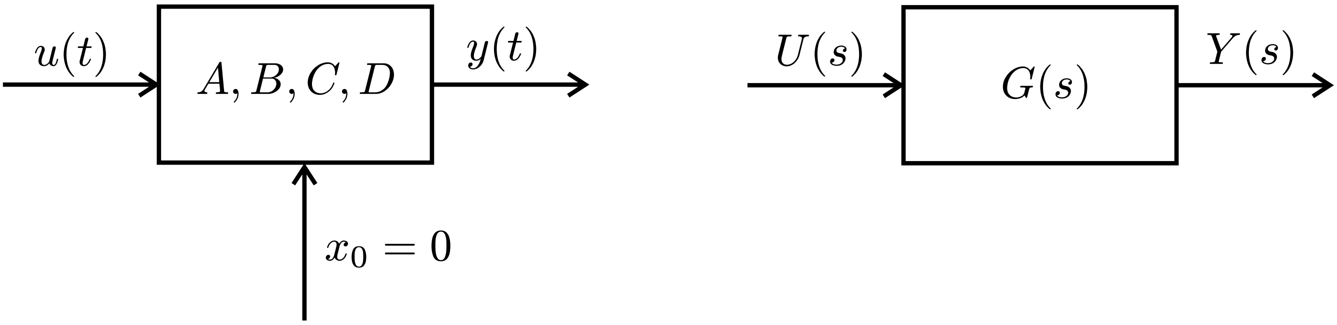
- **Definizione**: La *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo continuo (A, B, C, D) è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

cioè il rapporto fra la trasf. di Laplace $Y(s)$ dell' uscita $y(t)$ e la trasf. di Laplace $U(s)$ dell' ingresso per $u(t)$ per condizione iniziale nulla $x_0 = 0$.

[a] $x(t)$ è una funzione derivabile, e quindi continua $\Rightarrow x(0^+) = x(0) = x_0$

6.2 Funzioni di Trasferimento - T. Continuo



- **Esempio**: Il sistema lineare

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} x(t)
\end{cases}
$$

ha per funzione di trasferimento

$$
G(s) = \frac{2s + 22}{s^2 + 11s + 10}
$$

- **Nota**: La funzione di trasferimento non dipende dall'ingresso ! È una proprietà del sistema lineare.

6.2 Funzioni di Trasferimento - T. Continuo

- Considera l'eq. diff. con ingresso

$$\frac{dy^{(n)}(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dy^{(n-1)}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$
$$b_m\frac{du^{(m)}(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{du^{(m-1)}(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

- Ponendo condizioni iniziali $y(0)$, $\dot{y}(0)$, ..., $y^{(n-1)}(0)$ nulle, si ottiene immediatamente la funzione di trasferimento equivalente

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- **Esempio**: $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + u(t)$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1}$$

- Nota: la stessa f.d.t. $G(s)$ si ottiene dalla forma matriciale equivalente dell'eq. differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.2 Funzioni di Trasferimento - T. Continuo

Alcune funzioni di trasferimento:

- *Integratore*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & u(t) \\ y(t) & = & x(t) \end{cases} \qquad U(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{s}} \longrightarrow Y(s)$$

- *Doppio integratore*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & u(t) \\ y(t) & = & x_1(t) \end{cases} \qquad U(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{s^2}} \longrightarrow Y(s)$$

- *Oscillatore*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -x_1(t) + u(t) \\ y(t) & = & x_1(t) \end{cases} \qquad U(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{s^2+1}} \longrightarrow Y(s)$$

Antitrasformata di Laplace

- Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)} \quad (m < n)$$

  possiamo scomporla in fratti semplici (Hp: $p_i \neq p_j$)

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s - p_n}$$

  dove α_i è detto *residuo* di $G(s)$ in $p_i \in \mathbb{C}$

$$\alpha_i = \lim_{s \to p_i} (s - p_i) G(s)$$

  (nota che se $p_i = \bar{p}_j$, allora $\alpha_i = \bar{\alpha}_j$)

- L'*antitrasformata di Laplace* di $G(s)$ è la funzione $g(t)$ tale che $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$:

$$g(t) = \alpha_1 e^{p_1 t} + \cdots + \alpha_n e^{p_n t}$$

Nel caso di radici coincidenti $(s - p_i)^k$, nello sviluppo si hanno tutti i termini del tipo

$$\frac{\alpha_{i1}}{(s - p_i)} + \cdots + \frac{\alpha_{ik}}{(s - p_i)^k}$$

la cui antitrasformata è

$$\alpha_{i1} e^{p_i t} + \cdots + \alpha_{ik} \frac{t^{k-1}}{k!} e^{p_i t}$$

6.2 Funzioni di Trasferimento - T. Continuo

Risposta all'impulso

- Considera l'ingresso impulsivo $u(t) = \delta(t) \Rightarrow$ $U(s) = 1$. L'uscita corrispondente $y(t)$ è detta *risposta all'impulso* .

- La trasformata di Laplace di $y(t)$ è $Y(s) = G(s) \cdot 1 = G(s)$.

- Pertanto la *risposta all'impulso* coincide con l'antitrasformata $g(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$

Esempi

- *Integratore*

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{s}] = 1\!\!1(t) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{U(s)} \boxed{\frac{1}{s}} \xrightarrow{Y(s)}$$

- *Doppio integratore*

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{s^2}] = t\, 1\!\!1(t) \end{aligned}$$

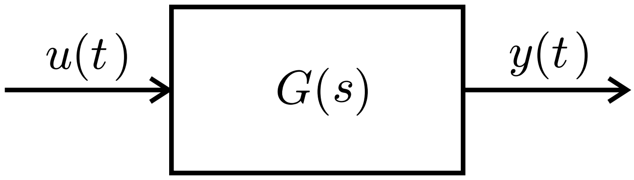
$$\xrightarrow{U(s)} \boxed{\frac{1}{s^2}} \xrightarrow{Y(s)}$$

- *Oscillatore*

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{s^2+1}] = \sin t\, 1\!\!1(t) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{U(s)} \boxed{\frac{1}{s^2+1}} \xrightarrow{Y(s)}$$

6.3 Poli e zeri



- Considera il sistema lineare descritto dalla funzione di trasferimento $(m < n)$

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Si dicono *poli* del sistema le radici di $D(s)$
- Si dicono *zeri* del sistema le radici di $N(s)$
- A tempo discreto le definizioni sono analoghe
- **Esempio**:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2} = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+s+2)}$$

poli: $\{-1, -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2}\}$, zeri: $\{-2\}$.

6.3 Poli e zeri

- Considera il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$
$$x(0) = 0$$

  e la funzione di trasferimento corrispondente

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \triangleq \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Il denominatore $D(s) = \det(sI - A)$. Quindi i poli di $G(s)$ corrispondono agli autovalori di A.

- La stabilità del sistema si può quindi studiare sia tramite $G(s)$ che tramite A

Attenzione: alcuni autovalori di A possono non risultare poli di $G(s)$. Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(sI - A) = (s-1)(s+1)$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

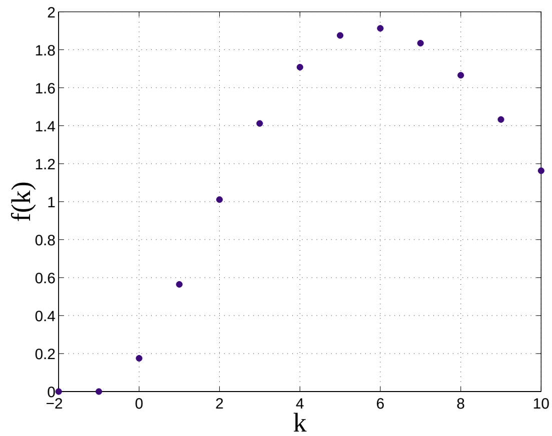
Il polo $s = 1$ non ha influenza sul comportamento ingresso-uscita del sistema, ma ha influenza sulla risposta libera: $x_1(t) = e^t x_{10}$ (il sistema è instabile).

6.4 Trasformata zeta

Definizione

La *trasformata zeta* di $f(k)$ è la funzione di variabile complessa $z \in \mathbb{C}$, $(z = \sigma + j\omega)$,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \triangleq \mathcal{Z}[f]$$



Esempi

- *Funzione impulso discreto* :

$$f(k) = \delta(k) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}[\delta] = F(z) \equiv 1$$

- *Funzione gradino discreto* :

$$f(k) = 1\!\!1(k) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ 1 & \text{se } k \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}[1\!\!1] = F(z) = \frac{z}{z-1}$$

- *Funzione esponenziale discreto* :

$$f(k) = a^k \, 1\!\!1(k) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}[f] = F(z) = \frac{z}{z-a}$$

Proprietà della trasformata zeta

- **Linearità** :

$$\mathcal{Z}[k_1 f_1(k) + k_2 f_2(k)] = k_1 \mathcal{Z}[f_1(k)] + k_2 \mathcal{Z}[f_2(k)]$$

Esempio: $f(k) = 3\delta(k) - \frac{5}{2^k}\,1\!\!1(t) \Rightarrow \mathcal{Z}[f] = 3 - \frac{5z}{z-\frac{1}{2}}$.

- **Anticipo temporale** :

$$\mathcal{Z}[f(k+1)\,1\!\!1(k)] = z\mathcal{Z}[f] - zf(0)$$

Esempio: $f(k) = a^{k+1}\,1\!\!1(k) \Rightarrow \mathcal{Z}[f] = z\frac{z}{z-a} - z = \frac{az}{z-a}$

z è detto anche *operatore di anticipo unitario*

- **Ritardo temporale** :

$$\mathcal{Z}[f(k-1)] = z^{-1}\mathcal{Z}[f]$$

Esempio: $f(k) = 1\!\!1(k-1) \Rightarrow \mathcal{Z}[f] = \frac{z}{z(z-1)}$

z^{-1} è detto anche *operatore di ritardo unitario*

- **Derivazione nella frequenza** :

$$\mathcal{Z}[kf(k)] = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[f]$$

Esempio: $f(k) = k\,1\!\!1(k) \Rightarrow \mathcal{Z}[f] = \frac{z}{(z-1)^2}$

6.4 Trasformata zeta

- **Teorema del valore iniziale** :

$$\mathcal{Z}[f(k)] = F(z) \;\Rightarrow\; f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

Esempio: $f(k) = 1\!\!\mathrm{I}(k) - k\, 1\!\!\mathrm{I}(k) \Rightarrow$
$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2} \Rightarrow f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = 1$

- **Teorema del valore finale** :

$$\mathcal{Z}[f(k)] = F(z) \;\Rightarrow\; f(+\infty) \triangleq \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

Esempio: $f(k) = 1\!\!\mathrm{I}(k) + (-0.7)^k\, 1\!\!\mathrm{I}(t) \Rightarrow$
$F(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+0.7} \Rightarrow$
$f(+\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = 1$

Witold Hurewicz

(1904-1957)

6.5 Funzioni di Trasferimento - T. Discreto

- Considera il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

- Applichiamo la trasformata zeta:

$$\begin{aligned} zX(z) - zx_0 &= AX(z) + BU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned}$$

dove $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$, $U(z) = \mathcal{Z}[u(k)]$,
$Y(z) = \mathcal{Z}[y(k)]$.

- Esplicitando rispetto a x_0 e $U(z)$:

$$\begin{aligned} X(z) &= z(zI - A)^{-1}x_0 + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) &= \underbrace{zC(zI - A)^{-1}x_0}_{Y_L(z)} + \underbrace{(C(zI - A)^{-1}B + D)U(z)}_{Y_F(z)} \end{aligned}$$

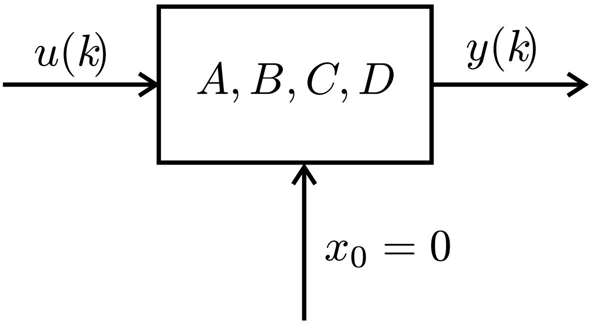
$Y_L(z)$=trasformata zeta della risposta libera
$Y_F(z)$=trasformata zeta della risposta forzata

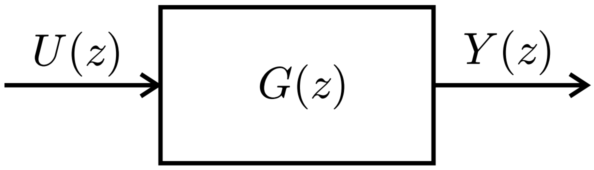
- **Definizione**: La *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo discreto (A, B, C, D) è

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

cioè il rapporto fra la trasf. zeta $Y(z)$ dell' uscita $y(k)$ e la trasf. zeta $U(z)$ dell' ingresso per $u(k)$ per condizione iniziale nulla $x_0 = 0$.

6.5 Funzioni di Trasferimento - T. Discreto





- **Esempio**: Il sistema lineare

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

ha per funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{-z + 1.5}{z^2 - 0.25}$$

- **Nota**: Anche per i sistemi tempo-discreto, la funzione di trasferimento non dipende dall'ingresso, ma è una proprietà del sistema lineare.

6.5 Funzioni di Trasferimento - T. Discreto

- Considera l'equazione alle differenze con ingresso

$$a_n y(k-n) + a_{n-1} y(k-n+1) + \cdots + a_1 y(k-1) + y(k) =$$
$$b_n u(k-n) + \cdots + b_1 u(k-1)$$

- Ponendo condizioni iniziali nulle, si ottiene la funzione di trasferimento equivalente

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{b_n z^{-n} + b_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + b_1 z^{-1}}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + a_1 z^{-1} + 1} \\ &= \frac{b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \end{aligned}$$

- **Esempio**: $3y(k-2) + 2y(k-1) + y(k) = 2u(k-1)$

$$G(z) = \frac{2z^{-1}}{3z^{-2} + 2z^{-1} + 1} = \frac{2z}{z^2 + 2z + 3}$$

- Nota: la stessa f.d.t. $G(z)$ si ottiene dalla forma matriciale equivalente dell'eq. alle differenze:

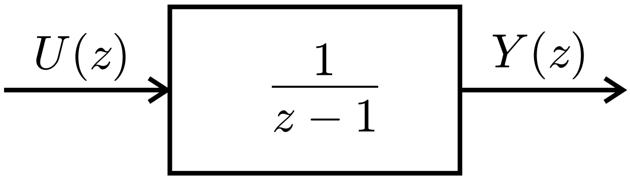
$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(z) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \left(z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alcune funzioni di trasferimento:

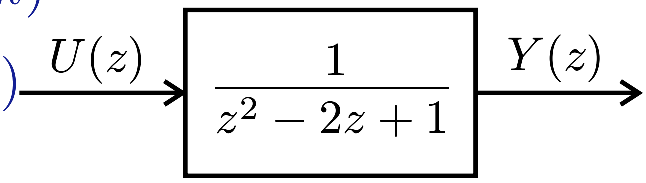
- *Integratore*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & x(k)+u(k) \\ y(k) & = & x(k) \end{array}\right.$$

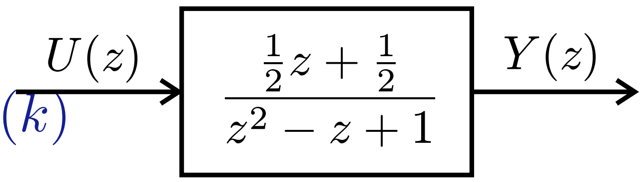


- *Doppio integratore*

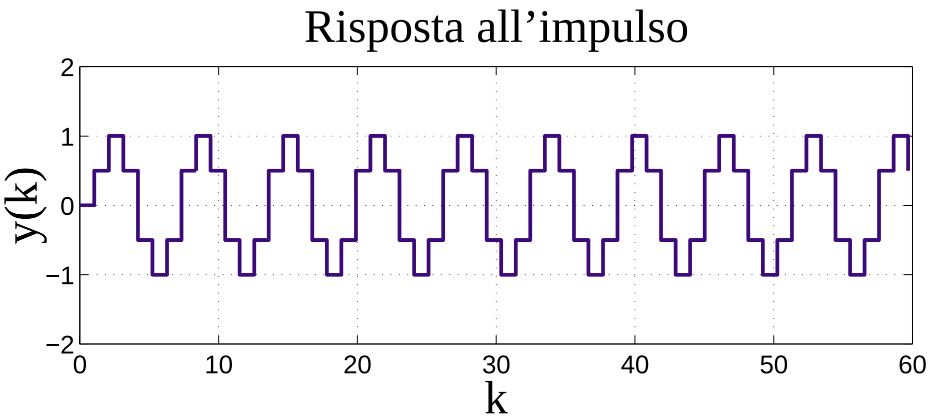
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(k+1) & = & x_1(k)+x_2(k) \\ x_2(k+1) & = & x_2(k)+u(k) \\ y(k) & = & x_1(k) \end{array}\right.$$



- *Oscillatore*



$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(k+1) & = & x_1(k)-x_2(k)+u(k) \\ x_2(k+1) & = & x_1(k) \\ y(k) & = & \frac{1}{2}x_1(k)+\frac{1}{2}x_2(k) \end{array}\right.$$



Antitrasformata zeta

- Data la funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)} \qquad (m < n)$$

Analogamente alla trasformata di Laplace, possiamo scomporla in fratti semplici (Hp: $p_i \neq p_j$)

$$G(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\alpha_1 z}{z-p_1} + \cdots + \frac{\alpha_n z}{z-p_n}\right)$$

dove α_i è il *residuo* di $G(z)$ in $p_i \in \mathbb{C}$

$$\alpha_i = \lim_{z \to p_i} (z-p_i) G(z)$$

- L'*antitrasformata zeta* di $G(z)$ è la funzione $g(k)$ tale che $\mathcal{Z}[g(k)] = G(z)$:

$$g(k) = \left(\alpha_1 p_1^{k-1} + \cdots + \alpha_n p_n^{k-1}\right) 1\!\!\mathrm{I}(k)$$

- **Esempio.**

$$\begin{aligned} G(z) &= \overbrace{\frac{z^2+1}{z^2-1.5z+0.5}}^{m \not< n} = 1 + \overbrace{\frac{1.5z+0.5}{z^2-1.5z+0.5}}^{m<n} = \\ &\quad 1 + \frac{1}{z}\left(\frac{4z}{z-1} - \frac{2.5z}{z-0.5}\right) \\ g(k) &= \delta(k) + \left(4\, 1\!\!\mathrm{I}(k-1) - 2.5(0.5)^{k-1}\right) 1\!\!\mathrm{I}(k) \end{aligned}$$

6.5 Funzioni di Trasferimento - T. Discreto

Risposta all'impulso

- Considera l'ingresso impulsivo $u(k) = \delta(k) \Rightarrow$ $U(z) = 1$. L'uscita corrispondente $y(k)$ è detta *risposta all'impulso* .

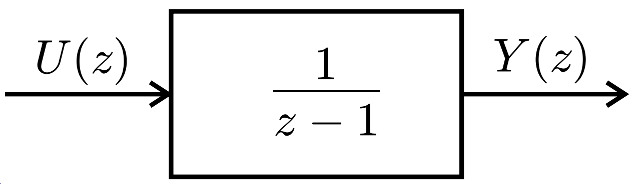
- La trasformata zeta di $y(k)$ è $Y(z) = G(z) \cdot 1 = G(z)$.

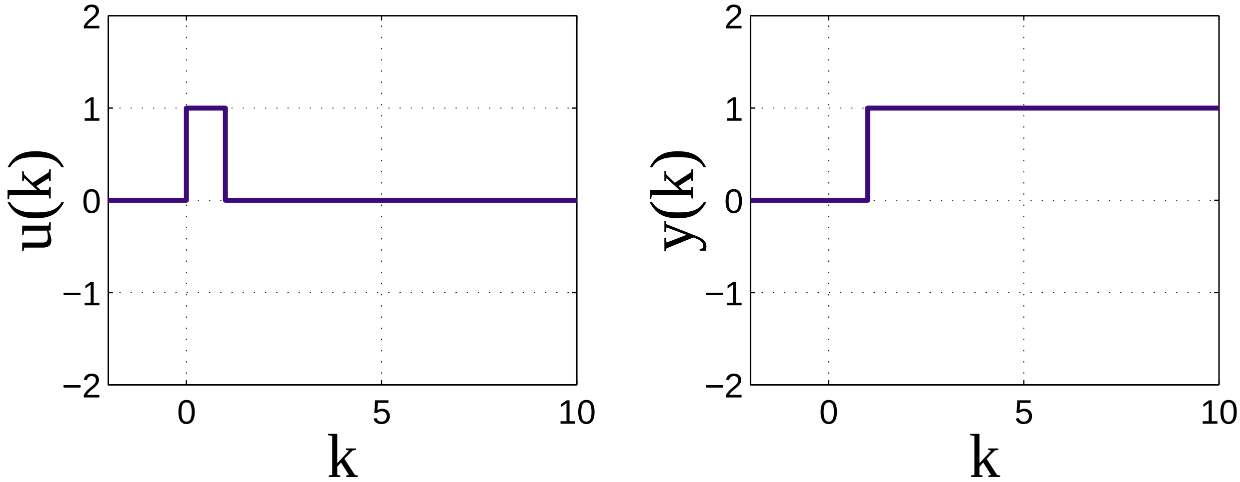
- Pertanto la *risposta all'impulso* coincide con l'antitrasformata $g(k)$ della funzione di trasferimento $G(z)$

Esempi

- *Integratore*

$$
\begin{aligned}
u(k) &= \delta(k) \\
y(k) &= \mathcal{Z}^{-1}[\tfrac{1}{z-1}] = 1\!\!1(k-1)
\end{aligned}
$$

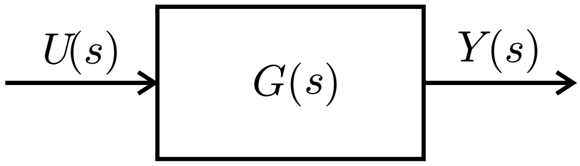




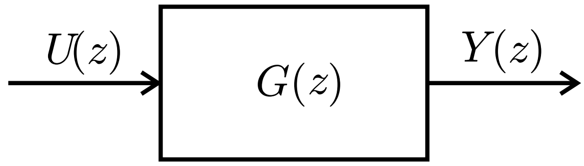
6.5 Funzioni di Trasferimento - T. Discreto

7. Diagrammi a Blocchi

7 Diagrammi a Blocchi



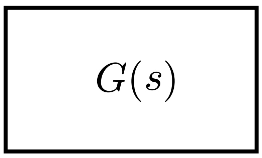
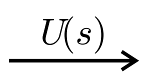
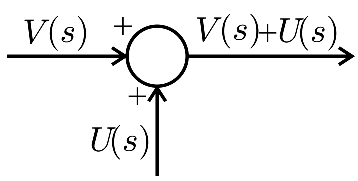
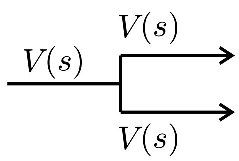
Sistema tempo continuo



Sistema tempo discreto

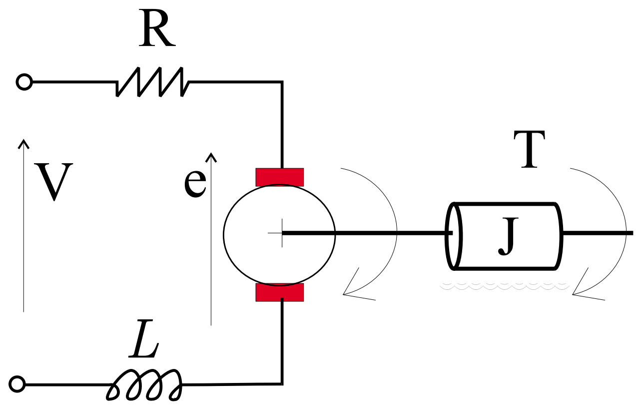
- Esprimono le *interconnessioni* fra sistemi lineari (tempo-continuo o tempo discreto)
- Permettono di determinare in maniera diretta le funzioni di trasferimento da una qualsiasi grandezza ad un'altra
- Esprimono relazioni ingresso-uscita (risposta forzata o regime permanente): gli effetti delle condizioni iniziali non sono considerati.

Elementi fondamentali:

Blocco	
Freccia	
Sommatore	
Punto di diramazione	

7 Diagrammi a Blocchi

Esempio



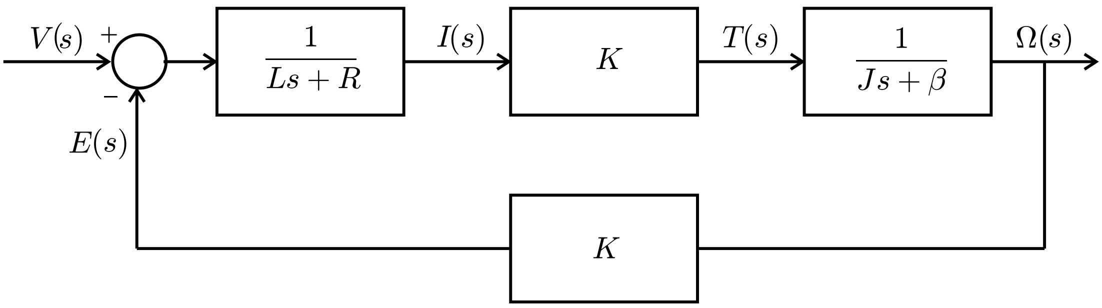
- Equazioni nel dominio del tempo:

$$\begin{cases} V - Ri - e - L\frac{di}{dt} = 0 \\ e = k\omega \\ J\frac{d\omega}{dt} = T - \beta\omega \\ T = ki \end{cases}$$

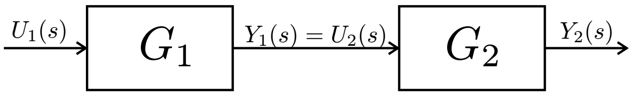
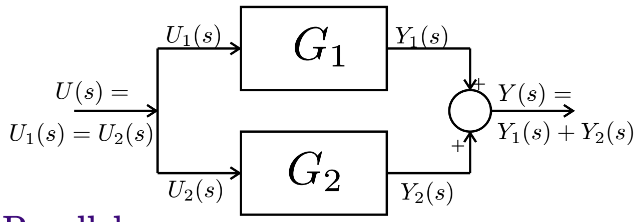
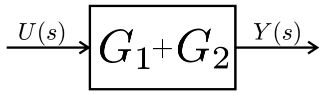
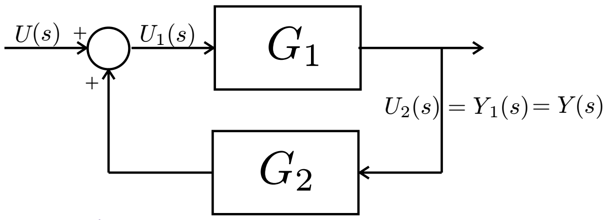
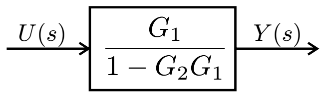
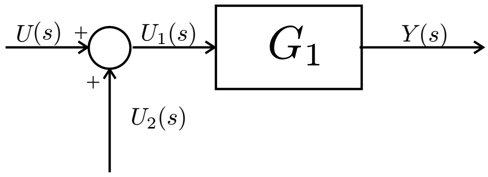
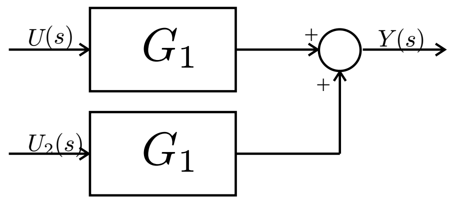
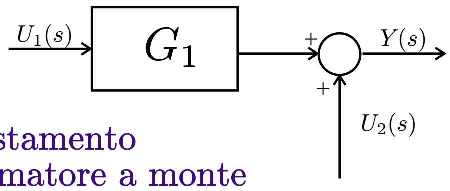
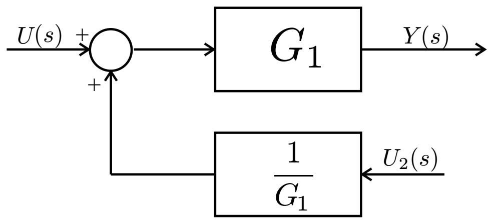
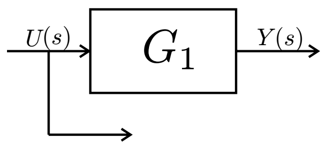
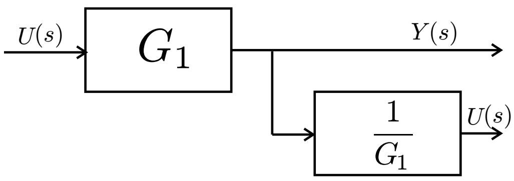
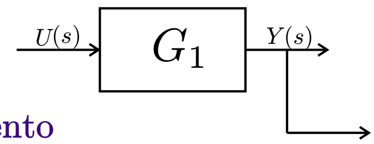
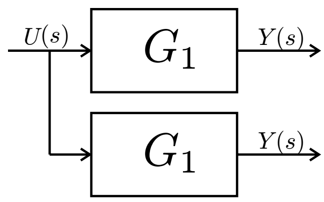
- Equazioni nel dominio di Laplace:

$$\begin{cases} (sL + R)I(s) = V(s) - E(s) \\ E(s) = k\Omega(s) \\ (Js + \beta)\Omega = T \\ T(s) = kI(s) \end{cases}$$

- Diagramma a blocchi:

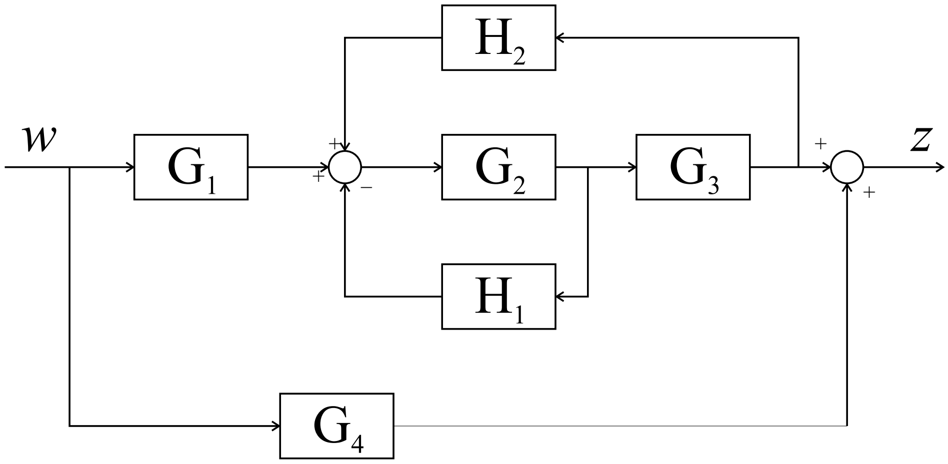


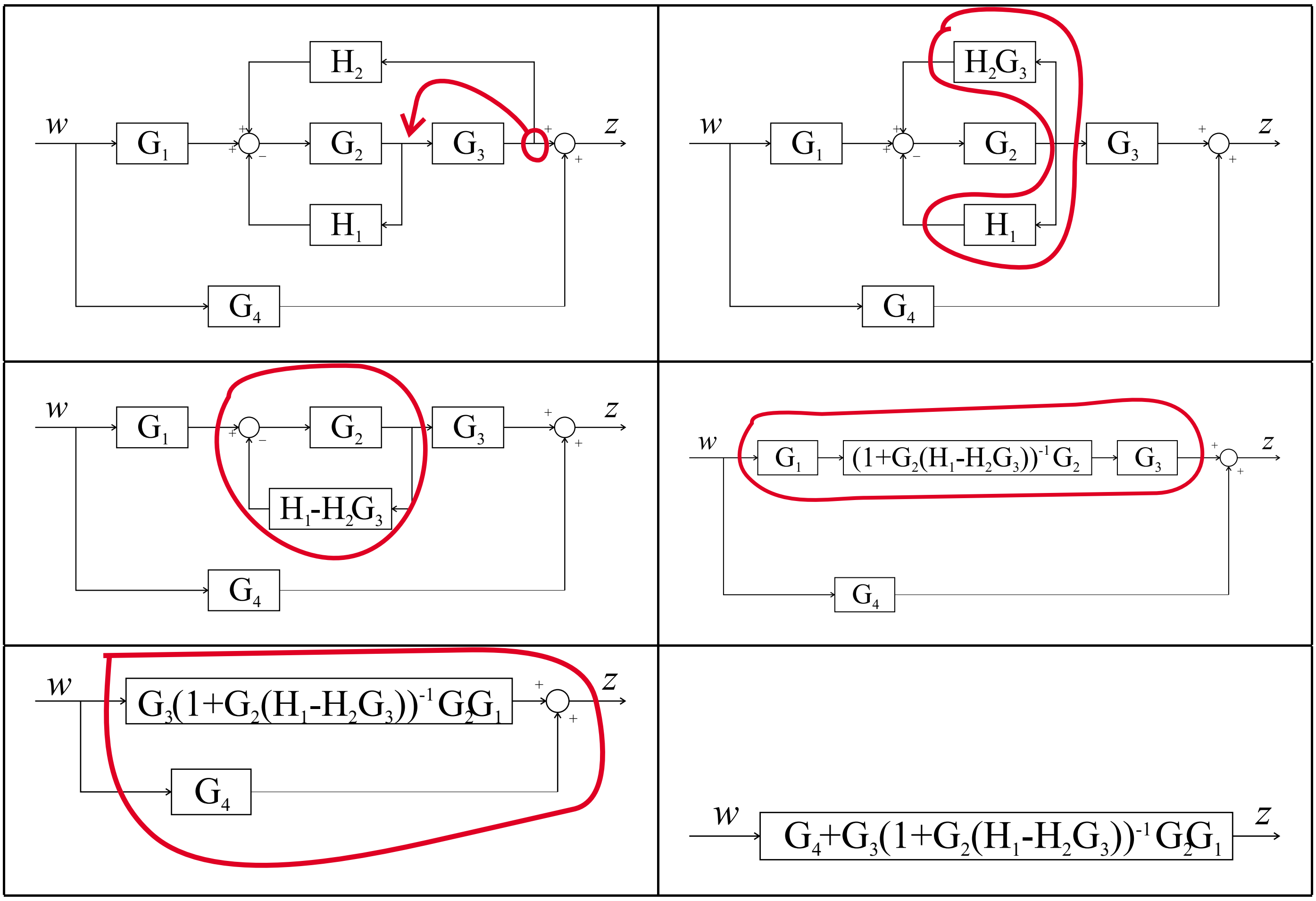
7 Diagrammi a Blocchi

 Cascata	
 Parallelo	
 Retroazione	
 Spostamento sommatore a valle	
 Spostamento sommatore a monte	
 Spostamento punto di prelievo a valle	
 Spostamento punto di prelievo a monte	

7 Diagrammi a Blocchi

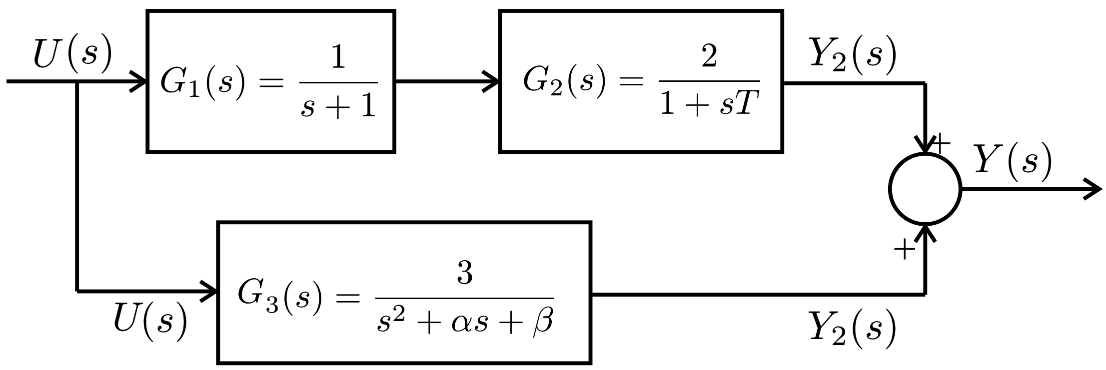
Esempio





Teorema. Un sistema costituito da un numero qualunque di sottosistemi fra loro connessi in cascata e/o parallelo è asintoticamente stabile se e solo se sono asintoticamente stabili tutti i sottosistemi che lo compongono.

Esempio

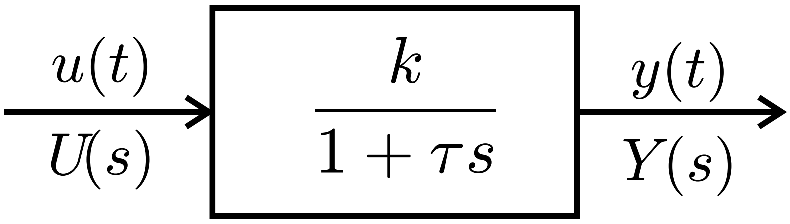


Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $T > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

8. Risposte Tipiche nel Tempo

8 Risposte Tipiche nel Tempo

Sistema del primo ordine



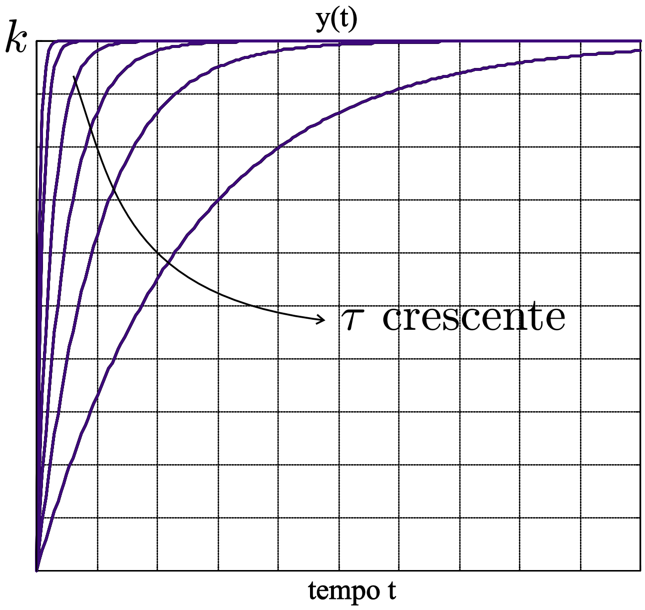
$(k, \tau > 0)$

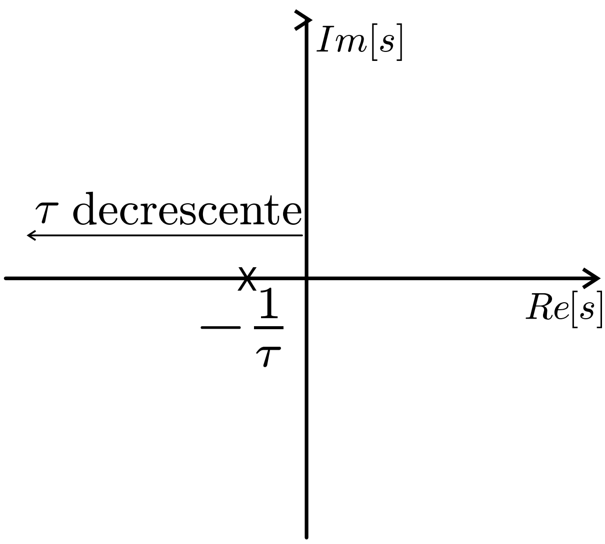
- *Risposta all'impulso* : $u(t) = \delta(t)$, $U(s) = 1$,

$$Y(s) = \frac{k}{1+\tau s}, \;\; y(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \, 1\!\!1(t)$$

- *Risposta al gradino* : $u(t) = 1\!\!1(t)$, $U(s) = \frac{1}{s}$,

$$Y(s) = \frac{k}{s(1+\tau s)}, \;\; y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \, 1\!\!1(t)$$





8 Risposte Tipiche nel Tempo

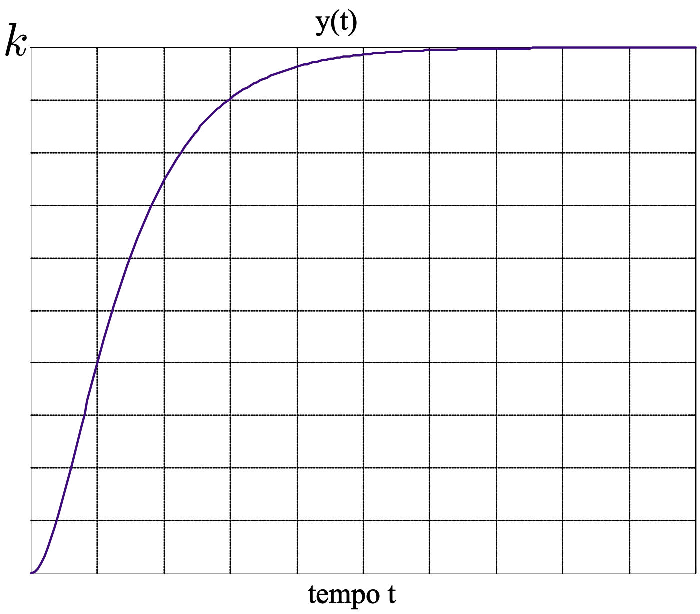
Sistema del secondo ordine (poli reali)

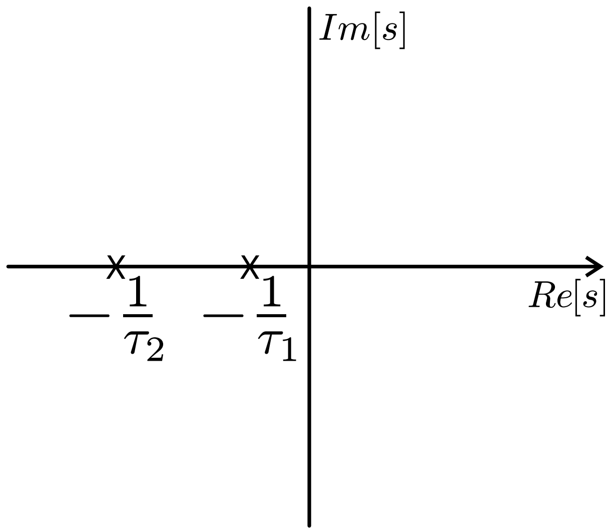
$$\xrightarrow[U(s)]{u(t)} \boxed{\frac{k}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}} \xrightarrow[Y(s)]{y(t)}$$

$(k, \tau_1, \tau_2 > 0)$

- *Risposta al gradino* : $u(t) = 1\!\!1(t)$, $U(s) = \frac{1}{s}$,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{k}{s(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)} \\ y(t) &= k\left(1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) 1\!\!1(t) \end{aligned}$$





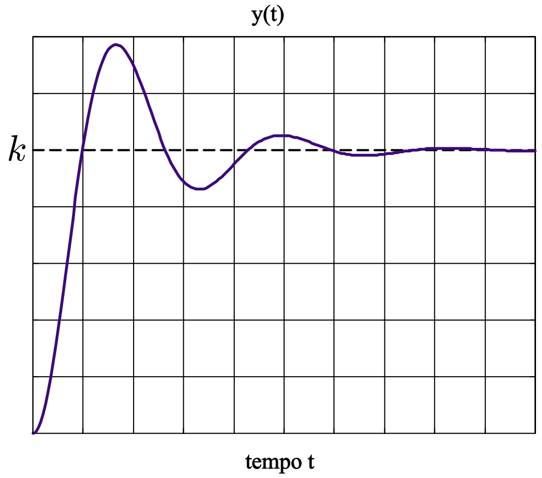
Sistema del secondo ordine (poli complessi)

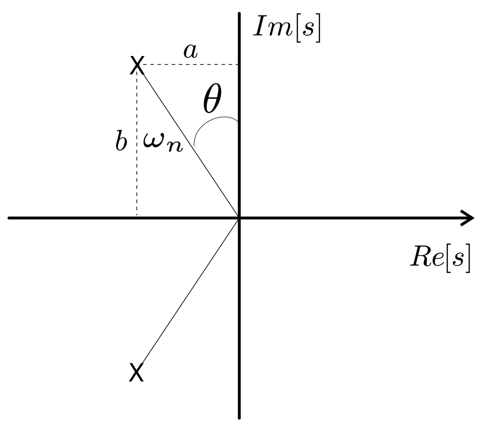
$$u(t),\ U(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{k}{1+2\frac{\zeta}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2}} \longrightarrow y(t),\ Y(s)$$

$(k, \omega_n > 0, 0 < \zeta < 1)$

- *Risposta al gradino* : $u(t) = 1\!\!1(t)$, $U(s) = \frac{1}{s}$,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{k}{s(1+2\frac{\zeta}{\omega_n}s+\frac{1}{\omega_n^2}s^2)} \\ y(t) &= k\left[1 - e^{-\omega_n\zeta t}\left(\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\right)\right]1\!\!1(t) \end{aligned}$$



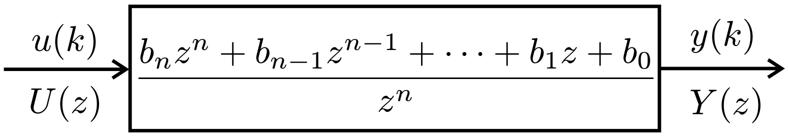


- $s = -a + jb = \omega_n e^{j(\theta+\frac{\pi}{2})}$, $\theta = \arcsin\zeta$

$$\begin{cases} a = \omega_n\zeta \\ b = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{a^2+b^2} \\ \zeta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

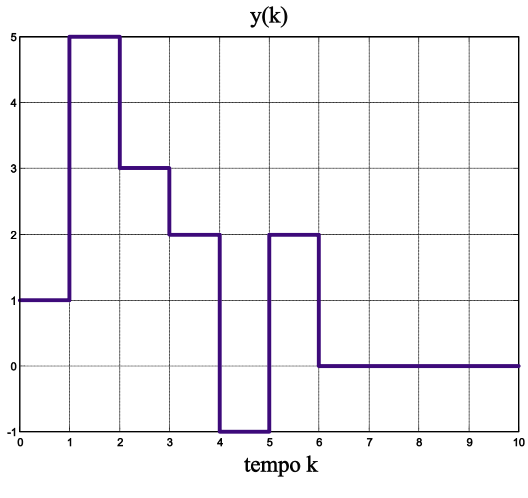
8 Risposte Tipiche nel Tempo

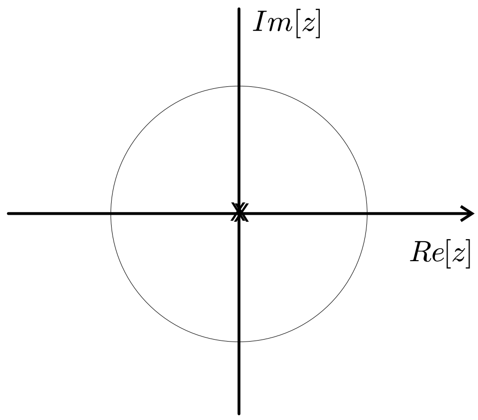
Sistema tempo discreto nilpotente



- *Risposta all'impulso* : $u(k) = \delta(k)$, $U(z) = 1$,

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n} \\
y(k) &= \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}\right] \\
&= \begin{cases} b_k & 0 \le k \le n \\ 0 & k > n,\ k < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$



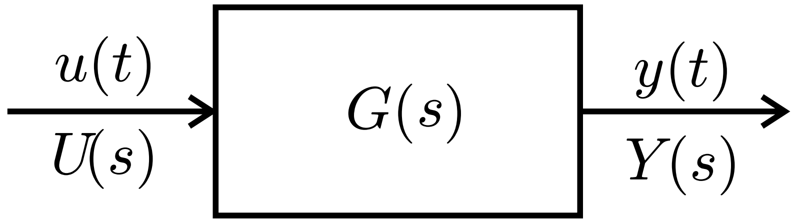


- L'effetto dell'impulso svanisce dopo un numero finito n di passi. Idem per l'effetto delle condizioni iniziali.

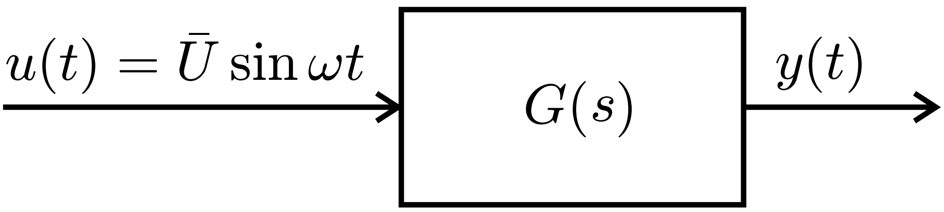
8 Risposte Tipiche nel Tempo

9. Risposta in Frequenza

9 Risposta in Frequenza



- Ricorda: la *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo continuo è il rapporto fra la trasf. di Laplace $Y(s)$ dell' uscita $y(t)$ e la trasf. di Laplace $U(s)$ dell' ingresso per $u(t)$ per condizione iniziale nulla $x_0 = 0$.
- **Definizione**: La *risposta in frequenza* di un sistema $G(s)$ è la funzione complessa di variabile reale $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \geq 0$.



- **Teorema**: Se $G(s)$ è asintoticamente stabile (poli a parte reale negativa), allora **in condizioni di regime permanente** (o **asintoticamente per** $t \to \infty$)

$$y(t) \to y_{rp}(t) \triangleq \bar{U}|G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

La risposta in frequenza permette quindi di analizzare la risposta del sistema ad eccitazioni sinusoidali a diverse frequenze.

Dimostrazione:

L'ingresso $u(t) = \sin \omega t \, 1\!\!1(t)$ ha per trasformata di Laplace

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

La trasformata di Laplace della risposta forzata è quindi

$$Y_f(s) = G(s)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{G(s)\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

(la risposta libera $y_\ell(t)$ non è rilevante, visto che $G(s)$ è asintoticamente stabile e quindi $y_\ell(t) \to 0$ per $t \to \infty$).

Scomponendo in fratti semplici[a]:

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{\omega G(j\omega)}{2j\omega(s - j\omega)} + \frac{\omega G(-j\omega)}{-2j\omega(s + j\omega)}}_{Y_{rp}(s)=\text{risp. regime permanente}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s - p_i}}_{\text{risp. forz. transitoria}}$$

Poiché $G(s)$ è asintoticamente stabile, l'antitrasformata di $\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s-p_i}$ tende a zero asintoticamente. Rimane quindi

$$\begin{aligned}
y_{rp}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(j\omega)}{2j(s - j\omega)} + \frac{G(-j\omega)}{-2j(s + j\omega)}\right] \\
&= \frac{-j}{2}G(j\omega)e^{j\omega t} + \frac{j}{2}G(-j\omega)e^{-j\omega t} \\
&= \frac{-j}{2}G(j\omega)e^{j\omega t} + \overline{\left(\frac{-j}{2}G(j\omega)e^{j\omega t}\right)} \\
&= 2\text{Re}\left[\frac{-j}{2}G(j\omega)e^{j\omega t}\right] \\
&= \text{Im}\left[|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)+j\omega t})\right] \\
&= |G(j\omega)|\sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \qquad \square
\end{aligned}$$

[a]**Nota**: La risposta forzata $Y_f(s)$ ha due componenti: $Y_{rp}(s)$=risposta di regime permanente, $Y_{ft}(s)$=risposta forzata transitoria.

Esempio

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "u(t) = \bar{U}\sin\omega t"] & \boxed{G(s) = \dfrac{10}{(1+0.1s)^2}} \arrow[r, "y(t)"] & {}
\end{tikzcd}
$$

Calcolare la risposta in condizioni di regime permanente per ingresso $u(t) = 5\sin 10t$.

- Il sistema è asintoticamente stabile, avendo $G(s)$ poli reali negativi:

$$G(s) = \frac{10}{(1+0.1s)^2}, \qquad p_1 = p_2 = -10$$

- Posso quindi definire la risposta di regime permanente

$$y_{rp}(t) = 5|G(j\omega)|\sin(10t + \angle G(j\omega))$$

dove

$$G(j\omega) = \frac{10}{(1+0.1j\omega)^2} = \frac{10}{1+0.2j\omega - 0.01\omega^2}$$

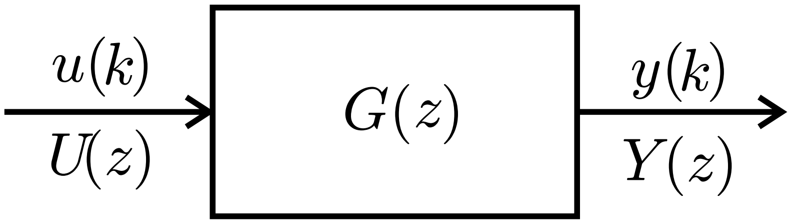
- Per $\omega = 10$ rad/s,

$$G(10j) = \frac{10}{1+2j-1} = \frac{5}{j} = -5j$$

e quindi

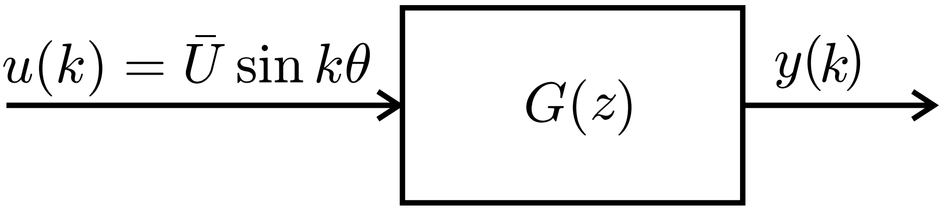
$$y_{rp}(t) = 5 \cdot 5\sin(10t - \frac{\pi}{2}) = 25\sin(10t - \frac{\pi}{2})$$

9 Risposta in Frequenza



- Ricorda: la *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo discreto è il rapporto fra la trasf. zeta $Y(z)$ dell' uscita $y(k)$ e la trasf. zeta $U(z)$ dell' ingresso per $u(k)$ per condizione iniziale nulla $x_0 = 0$.

- **Definizione**: La *risposta in frequenza* di un sistema $G(z)$ è la funzione complessa di variabile reale $G(e^{j\theta})$, $\theta \in [0, \pi]$.



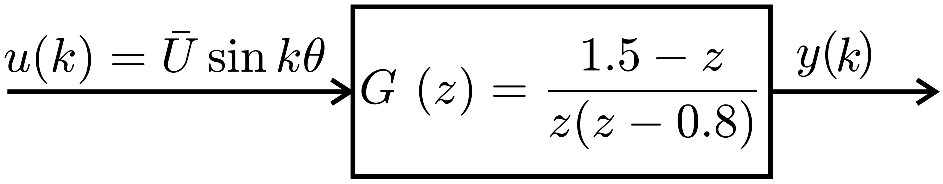
- **Teorema**: Se $G(z)$ è asintoticamente stabile (poli in modulo < 1), allora **in condizioni di regime permanente** (o **asintoticamente per** $k \to \infty$)

$$y(k) \to y_{rp}(k) \triangleq \bar{U}|G(e^{j\theta})| \sin(k\theta + \angle G(e^{j\theta}))$$

La risposta in frequenza permette quindi di analizzare la risposta del sistema ad eccitazioni sinusoidali a diverse frequenze.

9 Risposta in Frequenza

Esempio



Calcolare la risposta in condizioni di regime permanente per ingresso $u(k) = 100 + 20 \sin \frac{\pi}{6} k$.

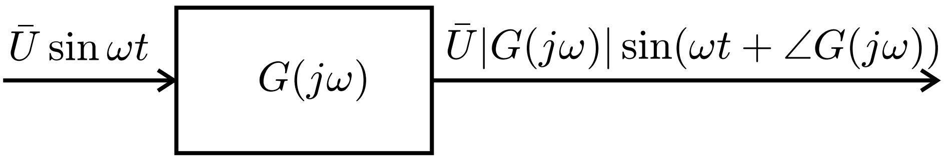
- Il sistema è asintoticamente stabile, avendo $G(z)$ poli in modulo minore di 1

$$G(z) = \frac{1.5 - z}{z(z - 0.8)}, \quad p_1 = 0, \ = p_2 = 0.8$$

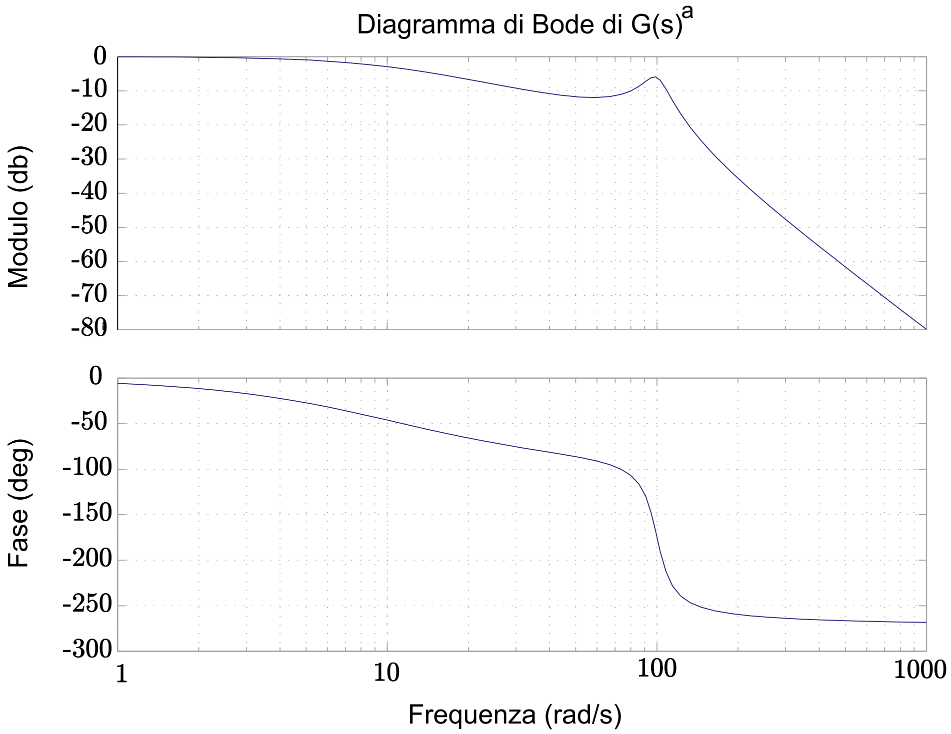
- Posso quindi definire la risposta di regime permanente

$$\begin{aligned}
y_{rp}(k) &= 100|G(e^{j0})| \sin(0 \cdot k + \angle G(e^{j0})) + \\
&\quad 20|G(e^{j\frac{\pi}{6}})| \sin(\frac{\pi}{6} k + \angle G(e^{j\frac{\pi}{6}})) \\
&= 100 \underbrace{|G(1)| \mathrm{sgn}(G(1))}_{G(1)} + 20 \left| \frac{1.5 - e^{j\frac{\pi}{6}}}{e^{j\frac{\pi}{6}}(e^{j\frac{\pi}{6}} - 0.8)} \right| \cdot \\
&\quad \sin(\frac{\pi}{6} k + \angle(1.5 - e^{j\frac{\pi}{6}}) - \angle(e^{j\frac{\pi}{6}}(e^{j\frac{\pi}{6}} - 0.8))) \\
&\approx 100 \cdot \frac{0.5}{0.2} + 20 \cdot 1.6009 \sin(\frac{\pi}{6} k - 0.6678 - 1.9631) \\
&= 250 + 32.018 \sin(\frac{\pi}{6} k - 2.6309)
\end{aligned}$$

9.1 Diagrammi di Bode



- Il diagramma di Bode esprime modulo $|G(j\omega)|$ e fase $\angle G(j\omega)$ di $G(j\omega)$ in funzione di ω . Serve ad analizzare la risposta del sistema a diverse frequenze ω.



- Il modulo $|G(j\omega)|$ è espresso in *decibel (db)* :

$$|G(j\omega)|_{\text{db}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

- La pulsazione ω è visualizzata in *scala logaritmica* (si disegnano cioè i grafici $(\log_{10} \omega, |G(j\omega)|_{\text{db}})$ e $(\log_{10} \omega, \angle G(j\omega))$)

[a] $G(s) = \frac{1}{(1+0.1s)(1+0.002s+0.0001s^2)}$

9.1 Diagrammi di Bode

- Sistema in forma di Bode:

$$G(s) = \frac{K}{s^h} \frac{\Pi_i(1+s\tau_i)}{\Pi_j(1+sT_j)}, \qquad \tau_i, T_j \in \mathbb{C}$$

K=*guadagno di Bode* ;
h=*tipo* del sistema=numeri di poli in 0;
T_j=*costante di tempo* (se reale > 0).

- Spesso la funzione di trasferimento è data in forma poli/zeri

$$G(s) = \frac{K'}{s^h} \frac{\Pi_i(s-z_i)}{\Pi_j(s-p_j)}, \qquad z_i, p_j \in \mathbb{C}$$

Vale quindi

$$z_i = -\frac{1}{\tau_i}, \quad p_j = -\frac{1}{T_i}, \quad K' = K\frac{\Pi_i \tau_i}{\Pi_j T_j}, \quad K = K' \frac{\Pi_i(-z_i)}{\Pi_j(-p_j)}$$

9.1 Diagrammi di Bode

Diagramma di Bode del modulo:

$$|G(j\omega)|_{\rm db} = 20\log_{10}\left|\frac{K}{(j\omega)^h}\frac{\Pi_i(1+j\omega\tau_i)}{\Pi_j(1+j\omega T_j)}\right|$$

- Per le proprietà dei logaritmi[a]:

$$\begin{aligned}|G(j\omega)|_{\rm db} \quad &= \quad 20\log_{10}|K| - h20\log_{10}\omega \\ &+\sum_i 20\log_{10}|1+j\omega\tau_i| - 20\sum_j \log_{10}|1+j\omega T_j|\end{aligned}$$

- Si hanno quindi 4 casi diversi:
  1. $20\log_{10}|K|$
  2. $20\log_{10}|\omega|$
  3. $20\log_{10}|1+j\omega T|$, $T \in \mathbb{R}$
  4. $20\log_{10}|1+j\omega T|+20\log_{10}|1+j\omega\overline{T}|$, $T \in \mathbb{C}$, cioè

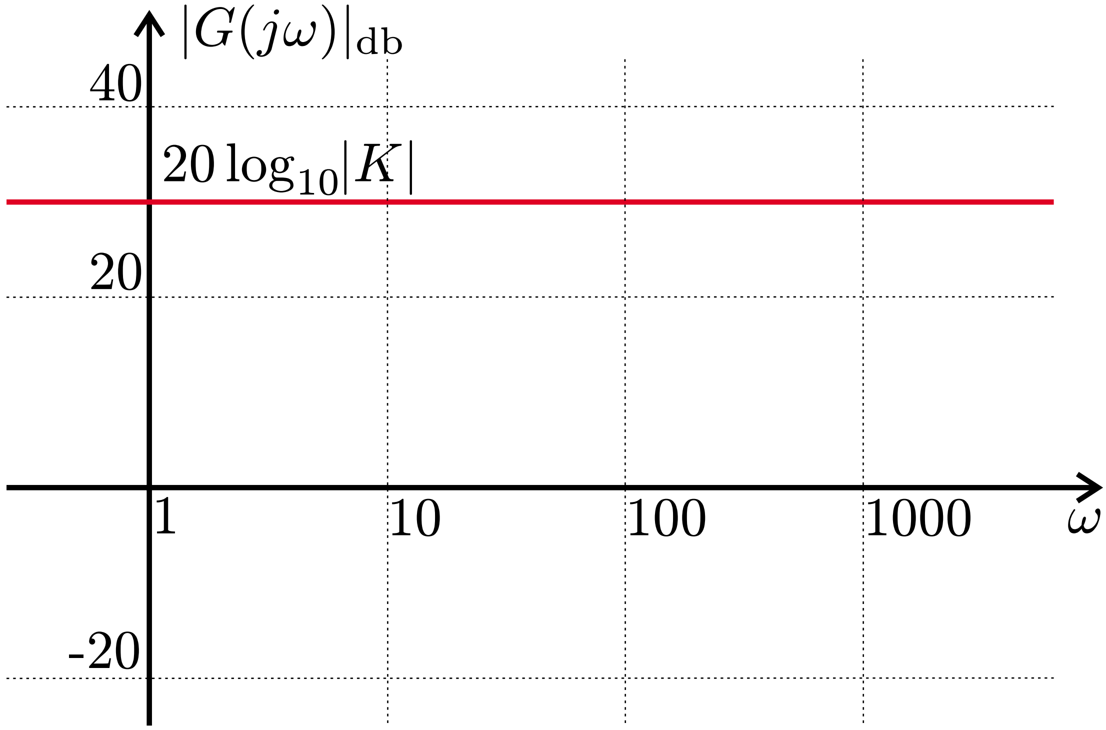
     $$20\log_{10}|1+2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}|$$

     dove

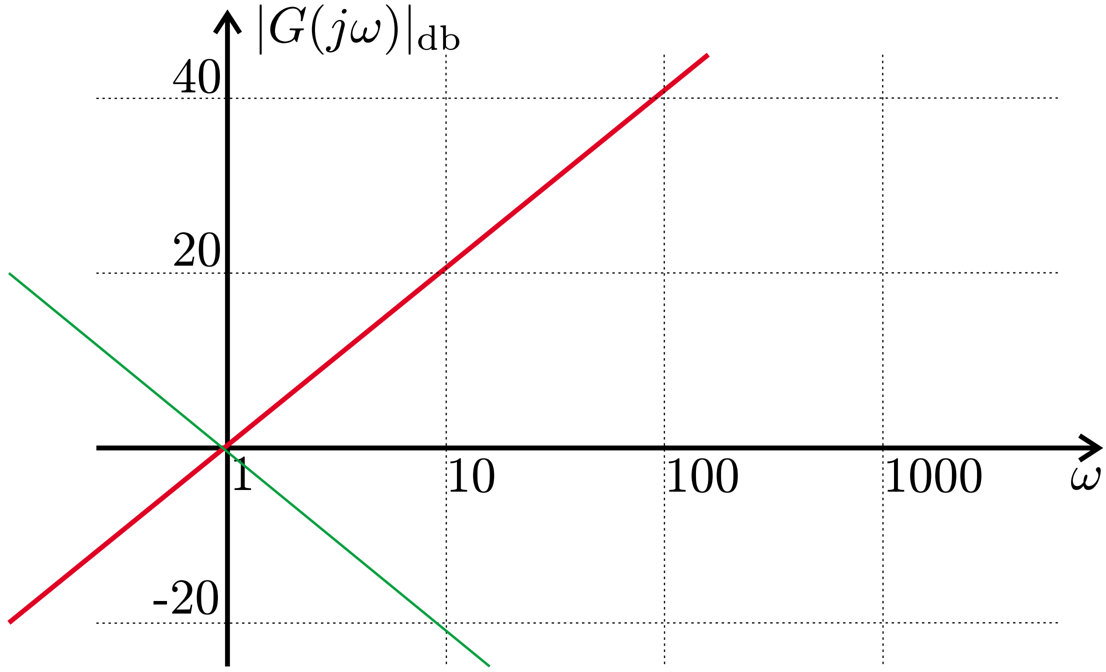
     $$\omega_n^2 = \frac{1}{T^2}, \quad \zeta = \frac{\mathrm{Re}[T]}{|T|}$$

[a] $\log\alpha\beta = \log\alpha + \log\beta$, $\log\frac{\alpha}{\beta} = \log\alpha - \log\beta$, $\log\alpha^\beta = \beta\log\alpha$

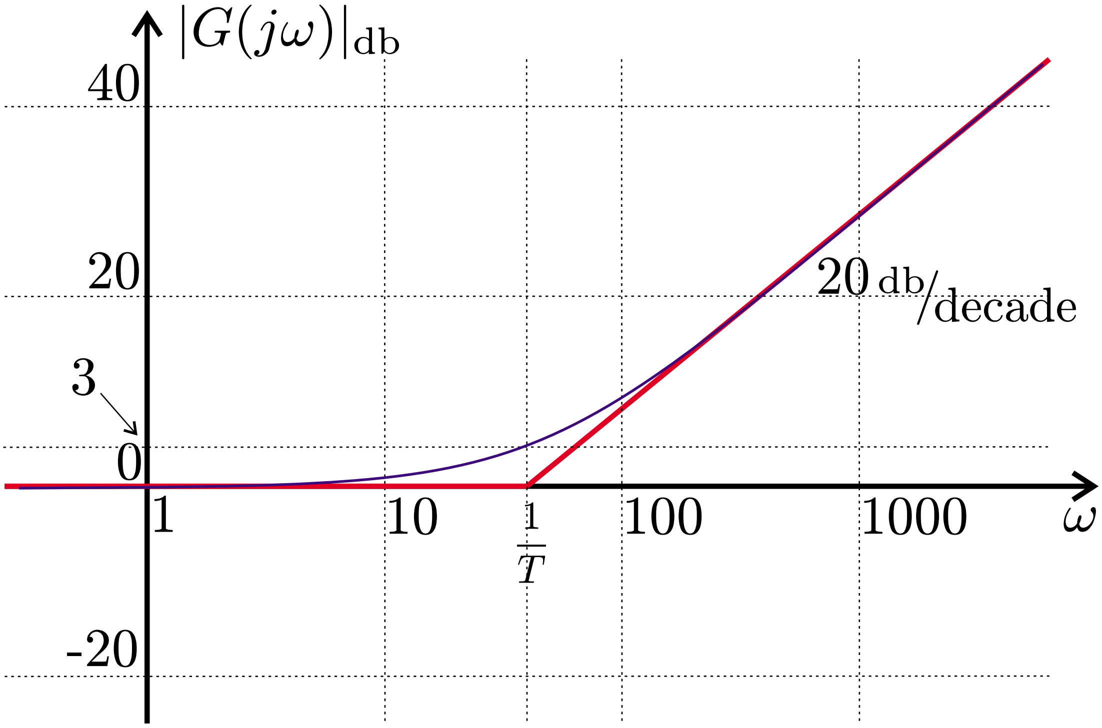
- Caso 1: $20\log_{10}|K|$



- Caso 2: $20\log_{10}|\omega|$ $(-20\log_{10}|\omega|\ )$

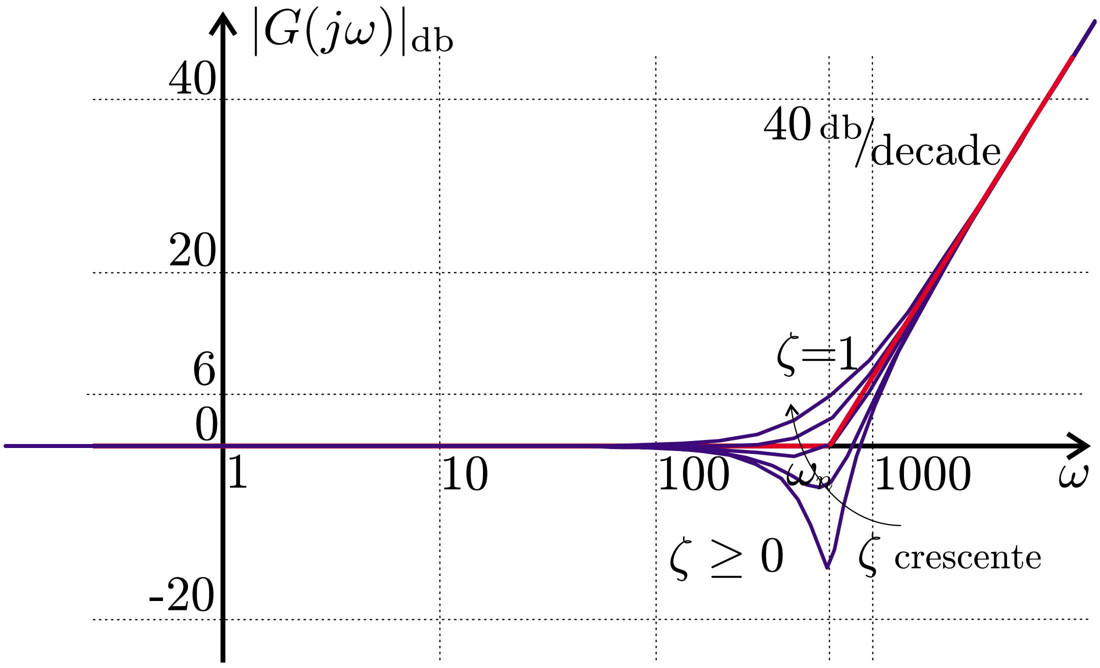


- Caso 3: $20\log_{10}|1+j\omega T|$



Nota: $|G(j\omega)| \approx 1$ per $\omega \ll \frac{1}{T}$, $|G(j\omega)| \approx \omega T$ per $\omega \gg \frac{1}{T}$.

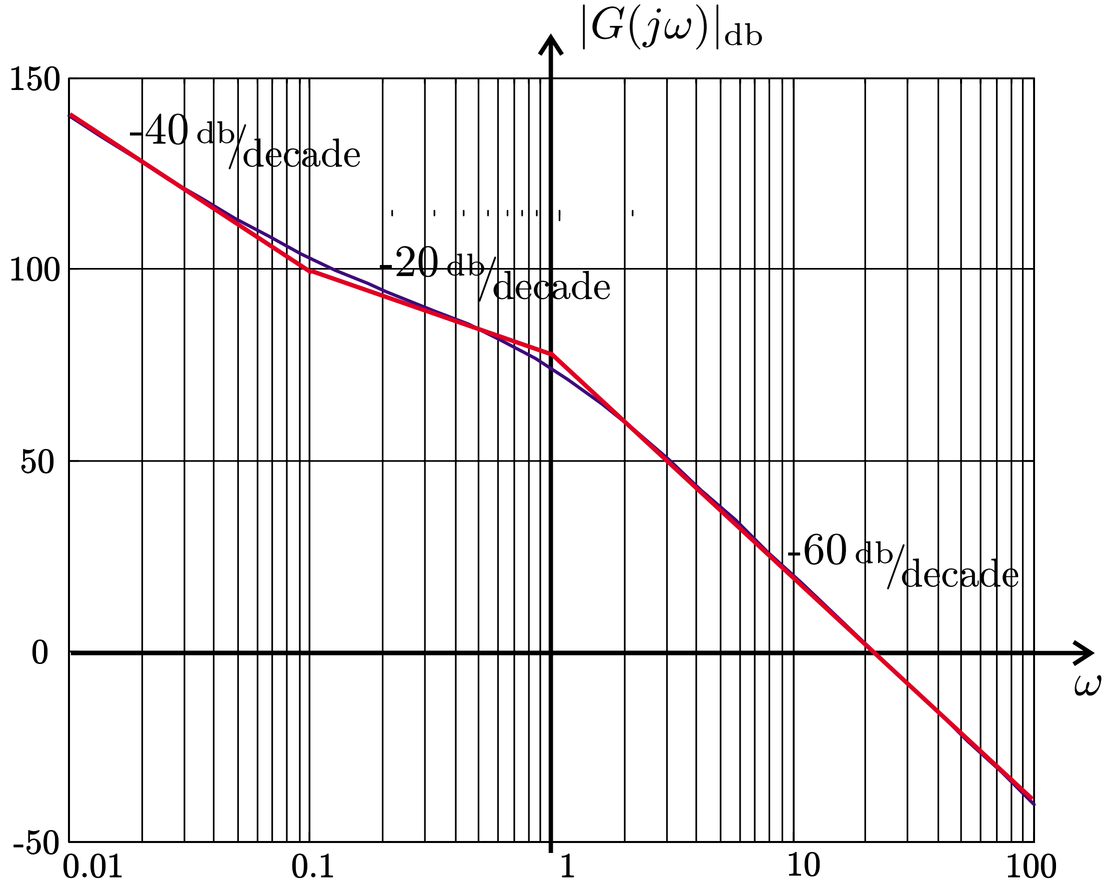
- Caso 4: $20\log_{10}|1+2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}|$



Nota: $|G(j\omega)| \approx 1$ per $\omega \ll \omega_n$, $|G(j\omega)| \approx \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ per $\omega \gg \omega_n$.

Esempio

$$G(s) = \frac{1000(1 + 10s)}{s^2(1 + s)^2}$$



- Per $\omega \ll 0.1$: $|G(j\omega)| \approx \frac{1000}{\omega^2}$
- Per $\omega = 0.1$: $20 \log_{10} \frac{1000}{\omega^2} = 20 \log_{10} 10^5 = 100$
- Per $0.1 < \omega < 1$: effetto dello zero in $s = -0.1$, aggiungi 20 db/decade.
- Per $\omega > 1$: effetto del doppio polo in $s = -1$, togli 2×20 db/decade.

Diagramma di Bode della fase:

$$\angle G(j\omega) = \angle\left(\frac{K}{(j\omega)^h}\frac{\Pi_i(1+j\omega\tau_i)}{\Pi_j(1+j\omega T_j)}\right)$$

- Per le proprietà dell'esponenziale[a]:

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega)| &= \angle K - \angle(j\omega)^h \\ &+\sum_i \angle(1+j\omega\tau_i) - \sum_j \angle(1+j\omega T_j)\end{aligned}$$

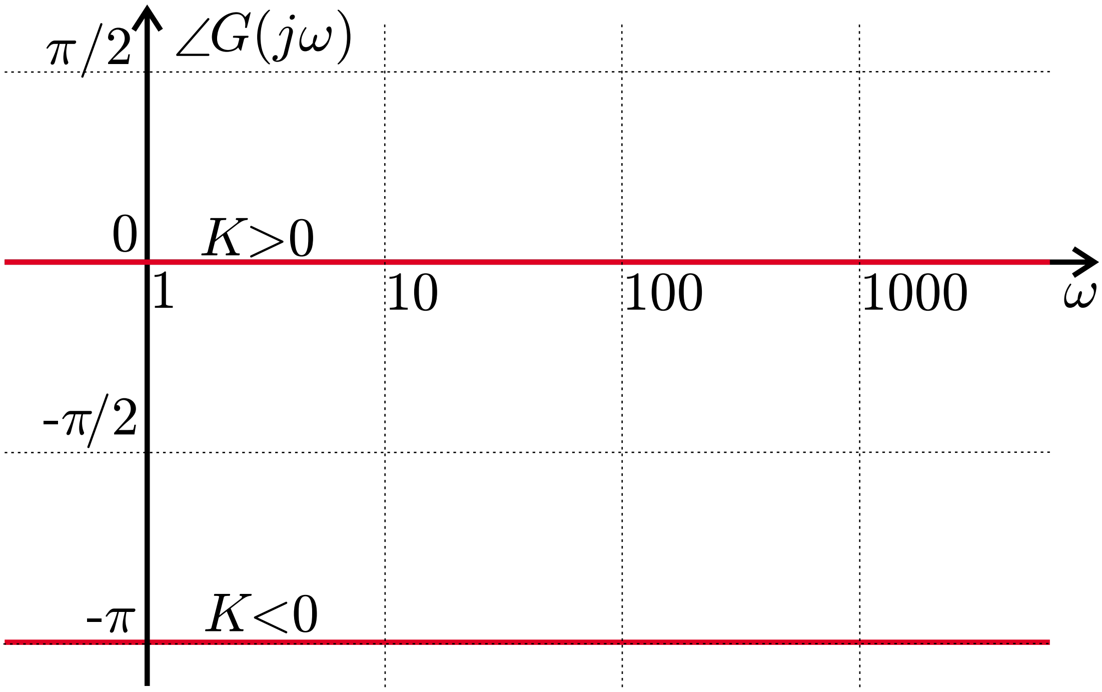
- Si hanno ancora 4 casi diversi:
  1. $\angle K = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad K > 0 \\ -\pi & \text{per} \quad K < 0 \end{cases}$
  2. $\angle(j\omega)^h \quad = \frac{h\pi}{2}$
  3. $\angle(1+j\omega T)$, $T \in \mathbb{R}$
  4. $\angle(1+j\omega T) + \angle(1+j\omega\overline{T})$, $T \in \mathbb{C}$, cioè

$$\angle\left(1+2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)$$

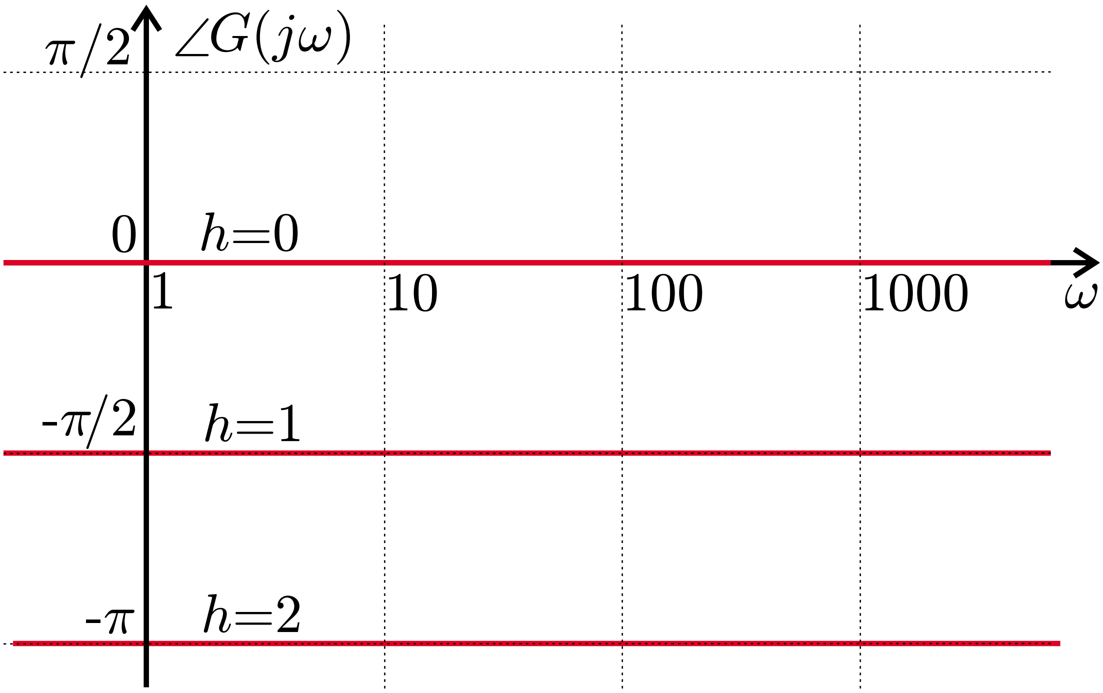
[a] $\angle(\rho e^{j\theta}) = \theta$, $\angle(\alpha\beta) = \angle(\rho_\alpha e^{j\theta_\alpha}\rho_\beta e^{j\theta_\beta}) = \angle(\rho_\alpha\rho_\beta e^{j(\theta_\alpha+\theta_\beta)}) = \theta_\alpha + \theta_\beta = \angle\alpha + \angle\beta$, $\angle(\frac{\alpha}{\beta}) = \angle\alpha - \angle\beta$

9.1 Diagrammi di Bode

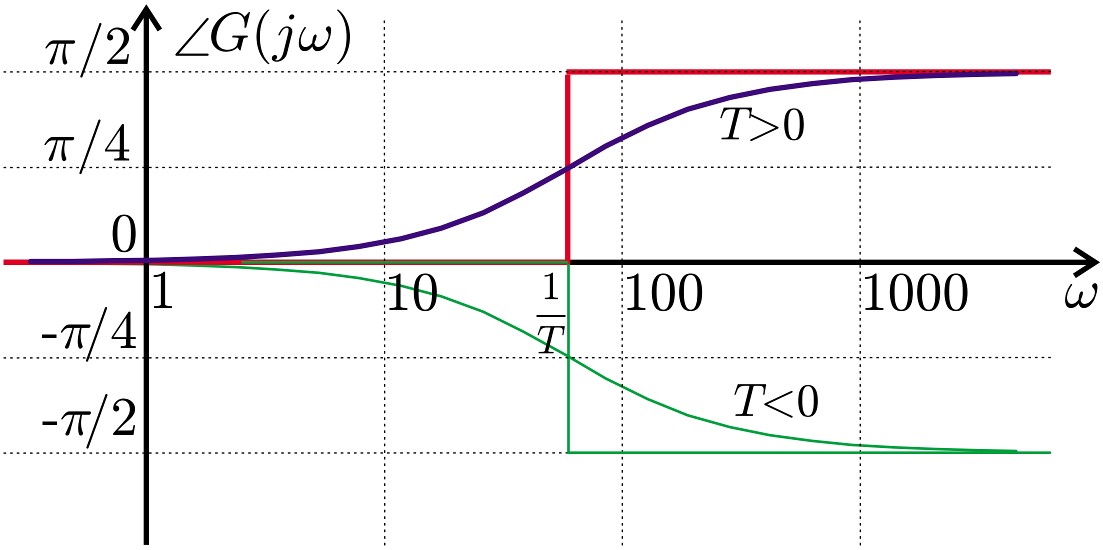
- Caso 1: $\angle K$



- Caso 2: $-\angle(j\omega)^h$

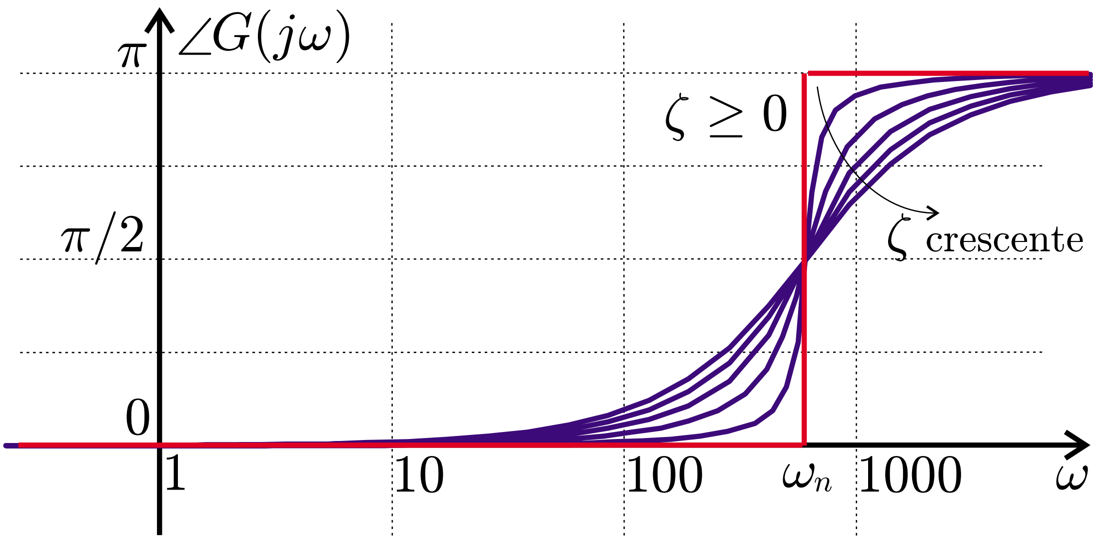


- Caso 3: $\angle(1 + j\omega T) = \operatorname{atan}(\omega T)$



Nota: $\angle G(j\omega) \approx 0$ per $\omega \ll \frac{1}{T}$, $\angle G(j\omega) \approx \frac{\pi}{2}$ per $\omega \gg \frac{1}{T}$, $T > 0$.

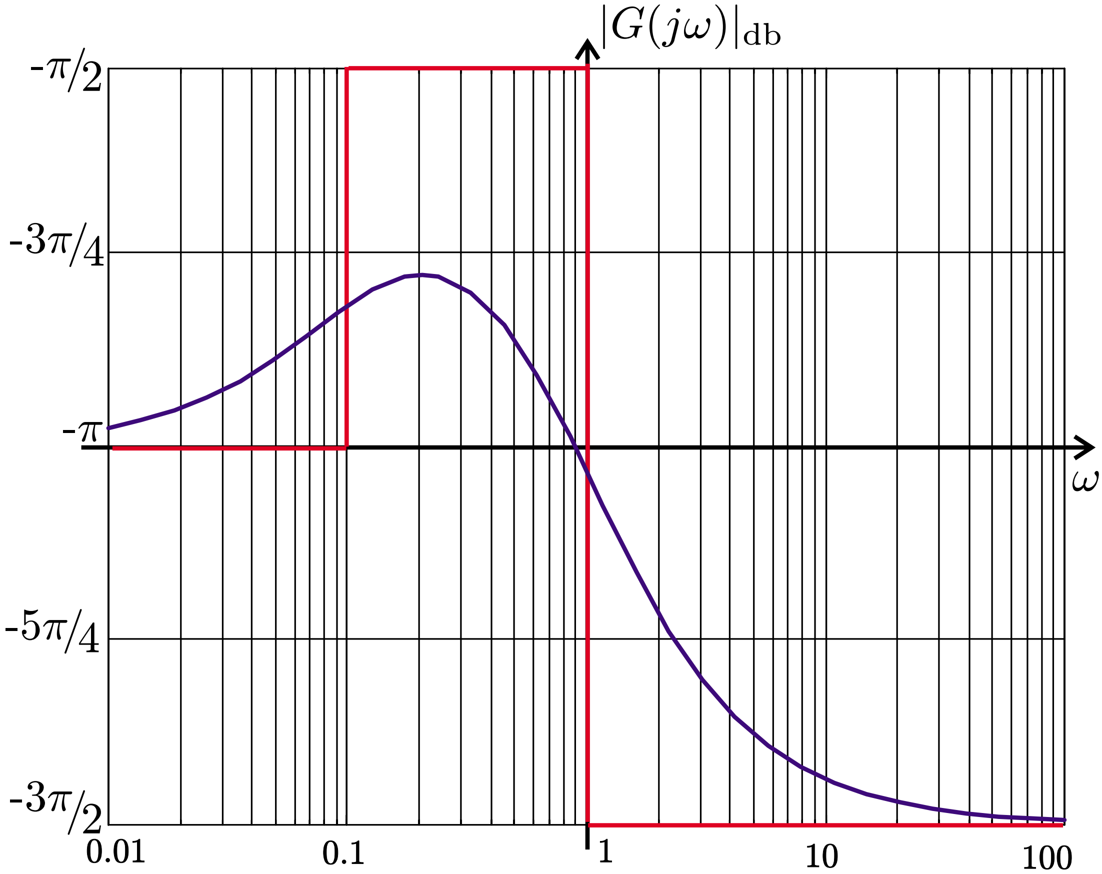
- Caso 4: $\angle\left(1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)$



Nota: $\angle G(j\omega)| \approx 0$ per $\omega \ll \omega_n$. Per $\zeta \geq 0$, $\angle G(j\omega)| = \frac{\pi}{2}$ per $\omega = \omega_n$, $\angle G(j\omega) \approx \angle\left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = \pi$ per $\omega \gg \omega_n$.

Segue esempio:

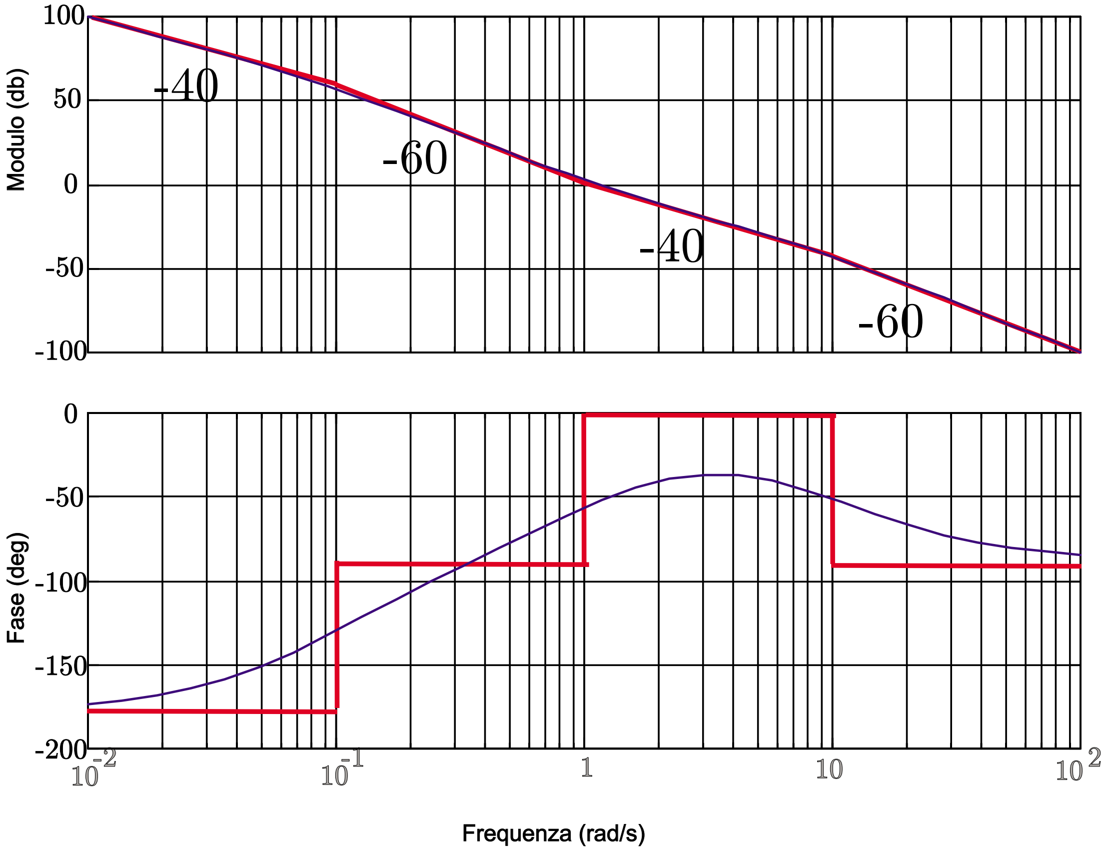
$$G(s) = \frac{1000(1+10s)}{s^2(1+s)^2}$$



- Per $\omega \ll 0.1$: $\angle G(j\omega) \approx -\pi$
- Per $0.1 < \omega < 1$: effetto dello zero in $s = -0.1$, aggiungi $\frac{\pi}{2}$.
- Per $\omega > 1$: effetto del doppio polo in $s = -1$, togli $2\frac{\pi}{2}$.

9.1 Diagrammi di Bode

Esempio: $G(s) = \dfrac{10(1+s)}{s^2(1-10s)(1+0.1s)}$



- Per $\omega \ll 0.1$: $|G(j\omega)| \approx \frac{10}{\omega^2}$ (pendenza -40 db/decade), $\angle G(j\omega) \approx -\pi$
- Per $\omega = 0.1$: $20\log_{10}\frac{10}{\omega^2} = 60$ db
- Per $0.1 < \omega < 1$: effetto del polo instabile in $s = 0.1$, togli 20 db/decade al modulo, aggiungi $\frac{\pi}{2}$ alla fase.
- Per $1 < \omega < 10$: effetto dello zero $s = -1$, aggiungi 20 db/decade al modulo, aggiungi $\frac{\pi}{2}$ alla fase.
- Per $\omega > 10$: effetto del polo in $s = -10$, togli 20 db/decade al modulo, togli $\frac{\pi}{2}$ alla fase.

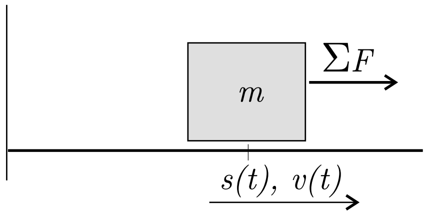
9.1 Diagrammi di Bode

Riassumendo: L'effetto di poli/zeri (semplici) nel diagramma asintotico è il seguente:

	Modulo	Fase
polo stabile ($T > 0$)	-20 db/dec	$-\frac{\pi}{2}$
polo instabile ($T < 0$)	-20 db/dec	$\frac{\pi}{2}$
zero stabile ($T > 0$)	$+20$ db/dec	$\frac{\pi}{2}$
zero instabile ($T < 0$)	$+20$ db/dec	$-\frac{\pi}{2}$

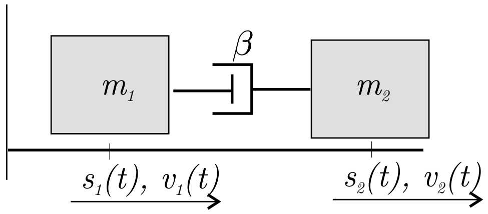
A. Elementi di Modellistica

A.1 Sistemi Meccanici - Traslazione



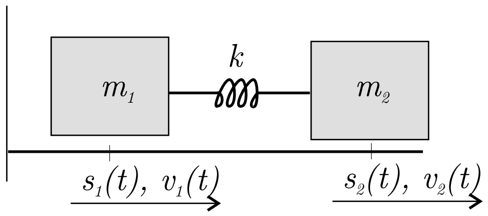
$$\Sigma F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$

massa



$$F_1 = \beta(v_2 - v_1) = -F_2$$

attrito viscoso

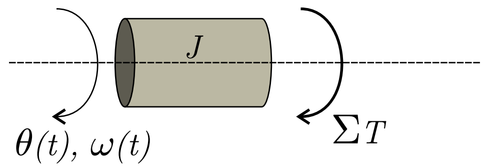


$$F_1 = k(s_2 - s_1) = -F_2$$

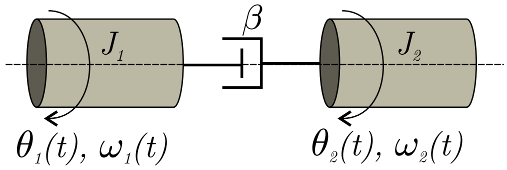
elasticità

- s_i, v_i: posizione e velocità del corpo #i rispetto ad un sistema di riferimento fisso (inerziale)
- F_i: forza agente sul corpo #i
- $P = Fv$: potenza meccanica

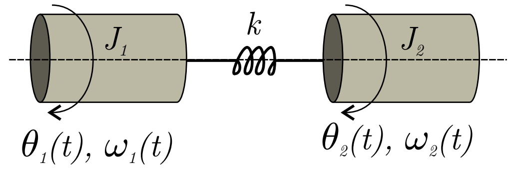
A.2 Sistemi Meccanici - Rotazione



$$\Sigma T = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$ inerzia



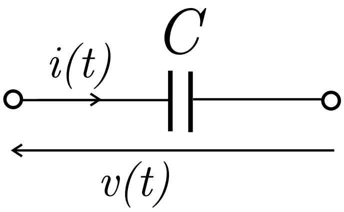
$$T_1 = \beta(\omega_2 - \omega_1) = -T_2$$ attrito viscoso



$$T_1 = k(\theta_2 - \theta_1) = -T_2$$ elasticità

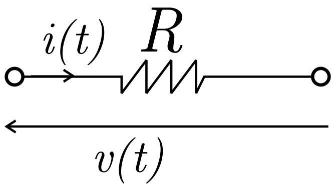
- θ_i, ω_i: posizione e velocità angolari del corpo #i rispetto ad un sistema di riferimento fisso
- T_i: coppia agente sul corpo #i
- $P = T\omega$: potenza meccanica

A.3 Sistemi Elettrici



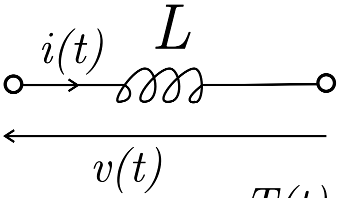
$$i = C\frac{dv}{dt}$$

capacità



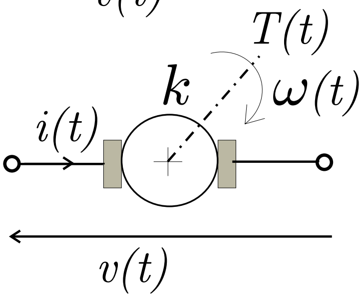
$$v = Ri$$

resistenza



$$v = L\frac{di}{dt}$$

induttanza

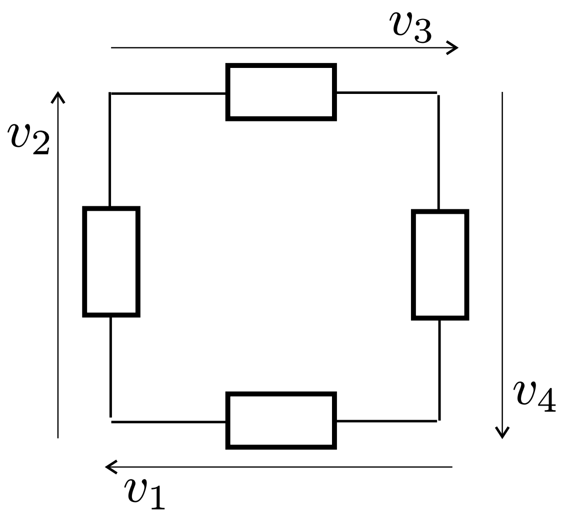


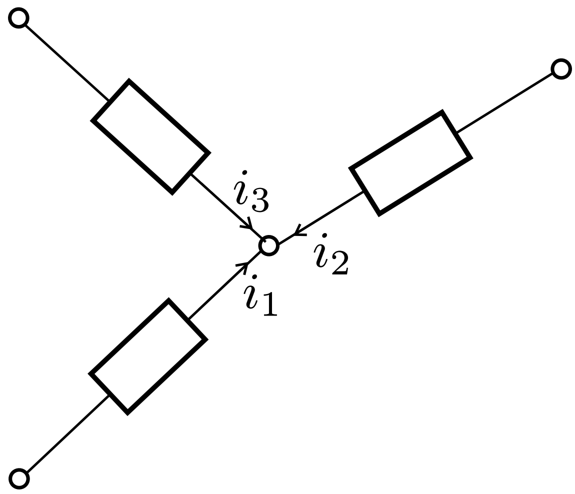
$$v = k\omega$$
$$T = ki$$

motore DC. con controllo in tensione di armatura

- v, i: tensione ai capi del componente, corrente attraverso il componente
- $P = vi$: potenza elettrica
- ω, T: velocità angolare e coppia prodotta

Strumenti di analisi: Leggi di Kirchhoff





equilibrio delle tensioni alla maglia

equilibrio delle correnti al nodo

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

A.4 Sistemi Termici

θ	Temperatura
Q	Calore
P	Potenza termica o flusso di calore
M	Massa
c_s	Calore specifico
R	Resistenza termica fra due corpi

Relazioni:

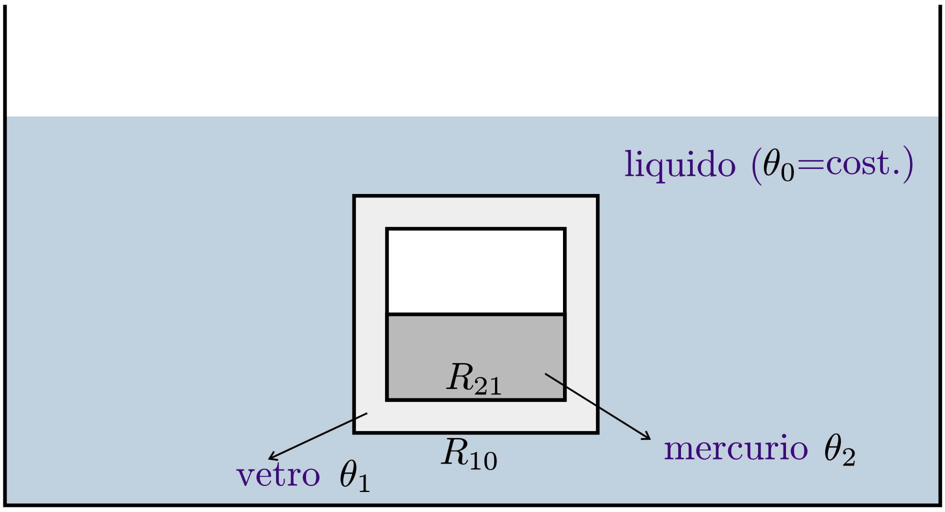
- $P = \frac{dQ}{dt}$ flusso di calore
- $P = C\frac{d\theta}{dt}$ variazione di temperatura
- $P = \frac{\theta_1 - \theta_2}{R}$ flusso di calore fra due corpi

Analogo elettrico:

- Per ogni capacità termica $C = c_s M$, associa un condensatore C collegato a massa (=temperatura di riferimento, e.g. 0^o K)
- Per ogni coppia (i, j) di corpi che si scambiano calore, associa una resistenza elettrica R_{ij}
- Per ogni generatore di calore, associa un generatore di corrente.
- Tensione=temperatura, corrente=flusso di calore
- Nota: non ci sono "induttanze termiche" ($\Rightarrow$ no oscillazioni!)

A.4 Sistemi Termici

Esempio: Termometro



θ_0	Temperatura liquido da misurare
θ_1	Temperatura vetro
θ_2	Temperatura mercurio
R_{10}	Resistenza termica fra liquido e vetro
R_{21}	Resistenza termica fra vetro e mercurio

Equivalente elettrico: