L'integrale generale dell'equazione differenziale data è pertanto:

$$y = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^x \operatorname{sen} x$$

Come risulta dall'esempio considerato il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, che ha come scopo il calcolo dell'integrale particolare dell'equazione differenziale lineare non omogenea, è alquanto laborioso anche se la formula [4.6.7] è di facile applicazione. Conviene pertanto ricorrere a tale metodo o quando è esplicitamente richiesto o quando non se ne può fare a meno.

4.7.- Metodo pratico

Illustriamo con un esempio un metodo più pratico di quello visto nel §4.6 per il calcolo di un integrale particolare dell'equazione lineare completa a coefficienti costanti:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = b(x) \qquad [4.7.1]$$

omogenea associata: $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$ [4.7.2]

equazione caratteristica: $a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n = 0$ [4.7.3]

Tale metodo più pratico è suggerito dalla forma di $b(x)$ nella [4.7.1]. Se per esempio $b(x)$ fosse della forma Ax^m, si sarebbe portati a pensare ad un integrale particolare della [4.7.1] del tipo $v(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$ cioè ad un polinomio di grado m; se $b(x)$ fosse ad esempio quello dell'esempio 142:

$$b(x) = e^x \operatorname{sen} x$$

si sarebbe portati a pensare ad un integrale particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' = e^x \operatorname{sen} x \qquad [4.7.4]$$

del tipo

$$v(x) = e^x(A \operatorname{sen} x + B\cos x) \qquad [4.7.5]$$

con A e B costanti da determinare. In questo caso come ci si dovrebbe comportare? Supponiamo vera la [4.7.5]; allora per determinare A e B in modo che essa soddisfi la [4.7.4], calcoliamo

1) $v'(x) = e^x(A \operatorname{sen} x + B\cos x) + e^x(A\cos x - B\operatorname{sen} x)$
2) $v''(x) = \dots = 2e^x(A\cos x - B\operatorname{sen} x)$

con la sostituzione la [4.7.4] diventa:

$$2e^x(A\cos x - B\operatorname{sen} x) - 2e^x(A\operatorname{sen} x + B\cos x) - 2e^x(A\cos x - B\operatorname{sen} x) = e^x \operatorname{sen} x$$

$$2e^x(-A\operatorname{sen} x - B\cos x) = e^x\operatorname{sen} x$$

$$e^x(-2A\operatorname{sen} x - 2B\cos x) = e^x\operatorname{sen} x$$

L'uguaglianza è identicamente verificata per $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Pertanto, sostituendo le costanti trovate nella [4.7.5] si ottiene l'integrale particolare della [4.7.4]:

$$v(x) = -\frac{1}{2}e^x\operatorname{sen} x$$

che è identico a quello trovato con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

Come si può notare il metodo è di facile applicazione, però non è un metodo generale, nel senso che esso è applicabile solo nei casi in cui la funzione $h(x)$ può dare indicazioni sulla forma di $v(x)$. La seguente tabella può essere un valido aiuto per la ricerca di $v(x)$ nota che sia la $h(x)$.

TAB. 4-I

	$h(x)$		$v(x)$	ANNOTAZIONI (¹)
1	$h_0x^s + h_1x^{s-1} + \dots + h_s$		$k_0x^q + k_1x^{q-1} + \dots + k_{q-1}x + k_q$	$q = s + r$ r = ordine minimo di derivazione nella [4.7.2]
2	$h \operatorname{sen} \beta x$	a	$k_1 \operatorname{sen} \beta x + k_2 \cos \beta x$	se βj non soddisfa la [4.7.3]
		b	$x^m(k_1 \operatorname{sen} \beta x + k_2 \cos \beta x)$	se βj soddisfa la [4.7.3] (²)
3	$h \cos \beta x$		VEDI CASO 2	
4	$h_1 \operatorname{sen} \beta x + h_2 \cos \beta x$		VEDI CASO 2	
5	$he^{\alpha x}$	a	$ke^{\alpha x}$	se α non soddisfa la [4.7.3]
		b	$kx^m e^{\alpha x}$	se α soddisfa la [4.7.3] (³)
6	$he^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$	a	$e^{\alpha x}(k_1 \operatorname{sen} \beta x + k_2 \cos \beta x)$	se α + jβ non soddisfa la [4.7.3]
		b	$x^m e^{\alpha x}(k_1 \operatorname{sen} \beta x + k_2 \cos \beta x)$	se $\alpha + \beta$j soddisfa la [4.7.3] (⁴)
7	$he^{\alpha x} \cos \beta x$		VEDI CASO 6	
8	$e^{\alpha x}(h_1 \operatorname{sen} \beta x + h_2 \cos \beta x)$		VEDI CASO 6	
9	$(h_0x^s + h_1x^{s-1} + \dots + h_s)e^{\alpha x}$	a	$(k_0x^s + k_1x^{s-1} + \dots + k_s)e^{\alpha x}$	se α non soddisfa la [4.7.3]
		b	$x^m(k_0x^s + k_1x^{s-1} + \dots + k_s)e^{\alpha x}$	se α soddisfa la [4.7.3] (³)
10	$h \operatorname{Sh} \beta x$	a	$k_1 \operatorname{Sh} \beta x + k_2 \operatorname{Ch} \beta x$	se β non soddisfa la [4.7.3]
		b	$x^m(k_1 \operatorname{Sh} \beta x + k_2 \operatorname{Ch} \beta x)$	se β soddisfa la [4.7.3] (⁵)
11	$h \operatorname{Ch} \beta x$		VEDI CASO 10	
12	$h_1 \operatorname{Sh} \beta x + h_2 \operatorname{Ch} \beta x$		VEDI CASO 10	
13	$(h_0x^s + h_1x^{s-1} + \dots + h_s)e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$	a	$[P(x) \operatorname{sen} \beta x + Q(x) \cos \beta x]e^{\alpha x}$	se α + jβ non soddisfa la [4.7.3]
		b	$x^m[P(x) \operatorname{sen} \beta x + Q(x) \cos \beta x]e^{\alpha x}$	se $\alpha + \beta$j soddisfa la [4.7.3] (⁴) (⁶)
14	$(h_0x^s + h_1x^{s-1} + \dots + h_s)e^{\alpha x} \cos \beta x$		VEDI CASO 13	
15	$(h_0x^s + \dots + h_s)e^{\alpha x}(\operatorname{sen} \beta x + \cos \beta x)$		VEDI CASO 13	

(¹) k, k_i sono costanti da determinare.
(²) m = ordine di molteplicità di βj
(³) m = ordine di molteplicità di α
(⁴) m = ordine di molteplicità di $\alpha + \beta$j
(⁵) m = ordine di molteplicità di β
(⁶) $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi di grado $q \leqslant s$ con coefficienti da determinare.

Si fa inoltre osservare che, se nella [4.7.1] si può considerare $b(x)$ come somma algebrica di funzioni elencate nella prima colonna della tabella, come integrale particolare si può considerare una funzione $v(x)$ somma algebrica delle corrispondenti funzioni della seconda colonna della tabella. Ad esempio se fosse $b(x) = x^2 + e^x - \mathrm{Sh}\, x$, si considererebbe la funzione

$$v(x) = (k_0x^2 + k_1x + k_2) + k_3e^x - (k_4\mathrm{Sh}\, x + k_5\mathrm{Ch}\, x)$$

come integrale particolare della [4.7.1] con k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 costanti da determinare. Si ricordi inoltre che l'integrale generale della [4.7.1] è dato dalla somma della funzione complementare e dell'integrale particolare $v(x)$:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n + v(x)$$

Esempi. Facendo uso della TAB. 4-1 calcolare un integrale particolare delle equazioni differenziali seguenti:

143. $2y'' - 5y' + 6y = -x^2 + 1$

144. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

145. $y''' - y'' - y' + y = x^2 + e^x$

146. $y'' - 2y' + 2y = e^x \,\mathrm{sen}\, x$

---

143. $2y'' - 5y' + 6y = -x^2 + 1$

$b(x)$ è del tipo 1 con $s = 2$, $r = 0$ $\rightarrow$ $q = 2 + 0 = 2$

L'integrale particolare è quindi del tipo:

$v(x) = k_0x^2 + k_1x + k_2$

le cui derivate sono:

$v'(x) = 2k_0x + k_1 \qquad v''(x) = 2k_0$

Sostituendo nell'equazione differenziale data si ha:

$4k_0 - 5(2k_0x + k_1) + 6(k_0x^2 + k_1x + k_2) = -x^2 + 1$

$6k_0x^2 + (6k_1 - 10k_0)x + 6k_2 + 4k_0 - 5k_1 = -x^2 + 1$

L'uguaglianza è vera se:

$$\begin{cases} 6k_0 = -1 \\ 6k_1 - 10k_0 = 0 \\ 6k_2 + 4k_0 - 5k_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_0 = -\dfrac{1}{6} \\ k_1 = -\dfrac{5}{18} \\ k_2 = \dfrac{5}{108} \end{cases}$$

Pertanto è:

$$v(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{5}{108}$$

144. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Si osservi che l'equazione ausiliaria dell'omogenea associata

$p^2 - 4p + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad (p-2)^2 = 0$

ammette la soluzione $p = 2$ con ordine di molteplicità $m = 2$: siamo quindi nel caso 5b

$v(x) = kx^m e^{\alpha x} = kx^2 e^{2x}$

$v'(x) = 2kxe^{2x} + 2kx^2e^{2x} = 2k\,(xe^{2x} + x^2e^{2x})$

$v''(x) = 2k\,(e^{2x} + 2xe^{2x} + 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}) = 2ke^{2x}(1 + 4x + 2x^2)$

Sostituendo nell'equazione data:

$2ke^{2x}(1 + 4x + 2x^2) - 8k\,(xe^{2x} + x^2e^{2x}) + 4kx^2e^{2x} = e^{2x}$

$2ke^{2x}(1 + 4x + 2x^2 - 4x - 4x^2 + 2x^2) = e^{2x} \quad \rightarrow \quad 2ke^{2x} = e^{2x} \quad \rightarrow \quad k = \dfrac{1}{2}$

Sicché l'integrale particolare è:

$v(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$

145. $y''' - y'' - y' + y = x^2 + e^x$

L'equazione ausiliaria dell'omogenea associata è:

$p^3 - p^2 - p + 1 = p^2(p-1) - (p-1) = (p-1)(p^2-1) = (p-1)^2(p+1) = 0$

Essa ammette quindi le radici: $p = 1$ (con ordine di molteplicità $m = 2$) e $p = -1$ (radice semplice). Siamo quindi nei casi 1 e 5b. L'integrale particolare ha la forma:

$v(x) = (k_0x^2 + k_1x + k_2) + k_3x^2e^x$

$v'(x) = 2k_0x + k_1 + 2k_3xe^x + k_3x^2e^x$

$v''(x) = 2k_0 + 2k_3e^x + 2k_3xe^x + 2k_3xe^x + k_3x^2e^x = 2k_0 + 2k_3e^x + 4k_3xe^x + k_3x^2e^x$

$v'''(x) = 2k_3e^x + 4k_3e^x + 4k_3xe^x + 2k_3xe^x + k_3x^2e^x = 6k_3e^x + 6k_3xe^x + k_3x^2e^x$

Sostituendo nell'equazione data si perviene all'uguaglianza:

$k_0x^2 + (k_1 - 2k_0)\,x + k_2 - k_1 - 2k_0 + 4k_3e^x = x^2 + e^x$

verificata se

$$\begin{cases} k_0 = 1 \\ k_1 - 2k_0 = 0 \\ k_2 - k_1 - 2k_0 = 0 \\ 4k_3 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k_0 = 1 \\ k_1 = 2 \\ k_2 = 4 \\ k_3 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

L'integrale particolare è quindi:

$v(x) = x^2 + 2x + 4 + \dfrac{1}{4}x^2e^x$

146. $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$

Il secondo membro è del tipo 6 con $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Verifichiamo se $\alpha + \beta j = 1 + j$ è radice dell'equazione ausiliaria:

$$p^2 - 2p + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (1 + j)^2 - 2(1 + j) + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 0$$

Pertanto siamo nel caso 6b e l'integrale particolare è del tipo

$$v(x) = xe^x(k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x)$$

$$v'(x) = e^x(k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x) + xe^x(k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x) + xe^x(k_1 \cos x - k_2 \operatorname{sen} x)$$

$$v''(x) = 2e^x(k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x) + 2e^x(k_1 \cos x - k_2 \operatorname{sen} x) + 2xe^x(k_1 \cos x - k_2 \operatorname{sen} x)$$

Sostituendo nell'equazione data si perviene all'uguaglianza:

$$2e^x(k_1 \cos x - k_2 \operatorname{sen} x) = e^x \operatorname{sen} x$$

verificata per:

$$\begin{cases} 2k_1 = 0 \\ -2k_2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Pertanto l'integrale particolare è:

$$v(x) = -\frac{1}{2} xe^x \cos x$$

4.8.- Esercizi proposti

Risolvere, con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie e mediante l'uso della TAB. 4-I le seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

147. $y'' - 2y' = 5$

148. $y''' - 4y' = x^2 - 2x$

149. $2y'' - 5y' + 3y = \operatorname{sen} 2x$

150. $y'' + y = 8\cos^2 x$

151. $y'' + 2y' + 2y = x^2e^{-x}$

152. $y'' - 9y = x^2 + \operatorname{Ch} 3x$

Risolvere, con il metodo più comodo, le equazioni differenziali:

153. $y'' - 2y' + 4y = x^3e^x + xe^x$

154. $y'' - 9y = x + e^{2x} - \operatorname{sen} 2x$

155. $y''' + y'' + y' + y = \operatorname{sen} x + e^x + e^{-x}$

156. $y''' - y'' = e^x \operatorname{Ch} x$

Soluzioni degli esercizi proposti

147. $y'' - 2y' = 5$

L'omogenea associata è $y'' - 2y' = 0$ e l'equazione ausiliaria

$$p^2 - 2p = 0 \quad \rightarrow \quad p = 0,\ p = 2$$

La funzione complementare è $y_c = c_1 + c_2e^{2x}$ (integrale generale dell'omogenea associata). L'integrale generale è:

$$y_c + v(x) = c_1 + c_2e^{2x} + v(x)$$

In questo caso l'integrale particolare $v(x)$ è immediato:

$$v(x) = -\frac{5}{2}x$$

Infatti è:

$$v'(x) = -\frac{5}{2} \qquad v''(x) = 0$$

e sostituendo nell'equazione data si ottiene un'identità. L'integrale generale cercato è quindi:

$$y = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{5}{2}x$$

L'applicazione del metodo della variazione delle costanti arbitrarie o del metodo pratico dà, a meno di una costante, lo stesso integrale particolare $v(x)$. Poiché tali metodi sono esplicitamente richiesti, applichiamoli a conferma di quanto già detto.

a) Metodo della variazione delle costanti arbitrarie.

Si suppone:

$$v(x) = C_1(x) + C_2(x)e^{2x}$$

È inoltre:

$$W = \begin{Vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{Vmatrix} \rightarrow W^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-2x} \end{Vmatrix}$$

$$B(x) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 5 \end{Vmatrix}$$

Per applicare la [4.6.7] valutiamo il prodotto:

$$W^{-1}B = \begin{Vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-2x} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2}e^{-2x} \end{Vmatrix}$$

Le funzioni $C_1(x)$ e $C_2(x)$ sono date dai due integrali

$$C_1(x) = \int -\frac{5}{2}\,dx = -\frac{5}{2}x$$

$$C_2(x) = \int \frac{5}{2}e^{-2x}\,dx = -\frac{5}{4}\int de^{-2x} = -\frac{5}{4}e^{-2x}$$

Allora è:

$$v(x) = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{4}e^{-2x}\cdot e^{2x} = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{4}$$

$$y = y_c + v(x) = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{5}{2}x - \frac{5}{4}$$

b) Metodo pratico.

Ci troviamo nel caso 1 della TAB. 4-I con $s = 0$, $r = 1 \rightarrow q = s + r = 1$.