Tab. VI.3.2. *(segue)*

N°	Funzione $f(t)$ per $t \geq 0$	$L[f(t)]$
36	$\dfrac{e^{-ct}}{(c-a)^2+b^2} + \dfrac{e^{-at}\sin(bt-\theta)}{b\sqrt{(c-a)^2+b^2}}$ $\theta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{c-a}$	$\dfrac{1}{(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$
37	$\dfrac{1}{c(a^2+b^2)} - \dfrac{e^{-ct}}{c[(c-a)^2+b^2]} +$ $+ \dfrac{e^{-at}\sin(bt-\theta)}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}}$ $\theta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{-a} + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{c-a}$	$\dfrac{1}{s(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$
38	$\dfrac{\alpha}{c(a^2+b^2)} + \dfrac{(c-\alpha)e^{-ct}}{c[(c-a)^2+b^2]} +$ $+ \dfrac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}}\, e^{-at}\sin(bt+\theta)$ $\theta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{\alpha-a} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{-a} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{c-a}$	$\dfrac{s+\alpha}{s(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$
39	$\dfrac{\alpha_0}{c^2} + \dfrac{1}{bc}[(a^2-b^2-\alpha_1 a+\alpha_0)^2 +$ $+ b^2(\alpha_1-2a)^2]^{1/2} e^{-at}\sin(bt+\theta)$ $\theta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b(\alpha_1-2a)}{a^2-b^2-\alpha_1 a+\alpha_0} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{-a}$ $c^2 = a^2+b^2$	$\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s[(s+a)^2+b^2]}$

3.3. Scomposizione in frazioni parziali

Data la funzione immagine $Y(s)$ espressa come rapporto di polinomi, se nelle tabelle delle trasformate di Laplace, come la *Tab. VI.3.2*, si trova l'espressione di $Y(s)$, per il teorema di unicità in corrispondenza si ha la funzione originaria; altrimenti, per essere antitrasformata $Y(s)$ viene scomposta in somma di frazioni parziali semplici, e se le antitrasformate delle singole frazioni sono reperibili nelle tabelle, per il principio di linearità della trasformata di Laplace, si determina la funzione originaria.

Indicando $Y(s)$ con il rapporto di polinomi, $Y(s) = N(s)/D(s)$, la scomposizione è eseguita nel seguente modo.

1) Se $N(s)/D(s)$ non è una funzione razionale propria, cioè se il grado di $N(s)$ non è minore del grado di $D(s)$, si esegue la divisione e la funzione prende la forma della *VI.3.10*:

$$N(s)/D(s) = Q(s) + R(s)/D(s) \qquad (VI.3.10)$$

con $Q(s)$ quoto, $R(s)$ resto della divisione e $R(s)/D(s)$ frazione propria. D'ora in avanti si considera $N(s)/D(s)$ come frazione razionale propria.

2) $D(s)$, polinomio di grado n, viene scritta come prodotto di fattori costituiti dalle n radici del polinomio: p_i con $i = 1, 2 \ldots i \ldots n$.

Le radici del polinomio si ricavano dall'equazione $D(s) = 0$, detta *equazione caratteristica* relativa a $Y(s)$, e vengono chiamate poli perché sostituiti nella *VI.3.10* rendono infinito il rapporto $N(s)/D(s)$. I poli possono essere reali o complessi; un polo complesso è scritto nella forma $p_i = \alpha_i + j\omega_i$, e se $N(s)/D(s)$ è a coefficienti reali, allora esiste anche il suo coniugato, $p_i^* = \alpha_i - j\omega_i$. D'ora in avanti si considera $N(s)/D(s)$ a coefficienti reali. In relazione all'antitrasformazione per i poli si fa la distinzione fra poli semplici, molteplicità $h = 1$, e multipli, molteplicità $h > 1$.

3) Si scrive $N(s)/D(s)$ come somma di frazioni in cui al numeratore compaiono dei coefficienti reali o complessi, $A_{i,k}$ detti *residui*, e al denominatore i fattori di $D(s)$, relazione *VI.3.11*:

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{i,k}}{(s-p_i)^k} \qquad (VI.3.11)$$

In $A_{i,k}$ il pedice i indica a quale polo è riferito il residuo, il pedice k indica la molteplicità del relativo polo.

In corrispondenza ai poli reali si hanno residui con valore reale, in corrispondenza delle coppie di poli complessi e coniugati si hanno residui complessi e coniugati.

4) Calcolo dei residui per i poli reali semplici, *VI.3.12*:

$$A_{i,1} = (s-p_i)\,Y(s)\Big|_{s=p_i} = \frac{N(p_i)}{(p_i-p_1)\ldots(p_i-p_{i-1})\,(p_i-p_{i+1})\ldots(p_i-p_n)} \qquad (VI.3.12)$$

Esempio

Scomposizione della funzione immagine $Y(s) = 5s/(s^2+3s+2)$.

Soluzione

– Si calcolano i poli dell'equazione caratteristca $s^2 + 3s + 2 = 0$: $p_1 = -1$ e $p_2 = -2$.

– $Y(s)$ viene scritta:

$$Y(s) = \frac{5s}{(s+1)\,(s+2)} = \frac{A_{1,1}}{s+1} + \frac{A_{2,1}}{s+2}$$

– Con la *VI.3.12* si calcolano i residui:

$$A_{1,1} = (s+1)\frac{5s}{(s+1)\,(s+2)}\Big|_{s=-1} = -5 \quad A_{2,1} = (s+2)\frac{5s}{(s+1)\,(s+2)}\Big|_{s=-2} = 10$$

– Scomposizione di $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{-5}{s+1} + \frac{10}{s+2}$$

5) Calcolo dei residui per i poli complessi e coniugati, *VI.3.13*.

Y(s) contiene la coppia di poli complessi e coniugati: $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ e $p_{i+1} = \sigma_i - j\omega_i$.

$$A_{i,1} = (s - p_i)\, Y(s) \Big|_{s = \sigma_i - j\omega_i} =$$

$$= \frac{N(\sigma_i - j\omega_i)}{(\sigma_i - j\omega_i - p_1) \ldots (\sigma_i - j\omega_i - p_{i-1})\,(\sigma_i - j\omega_i - p_{i+1}) \ldots (\sigma_i - j\omega_i - p_n)} \quad \text{(VI.3.13a)}$$

$$A_{i+1,1} = A_{i,1}^{*} \quad \text{(VI.3.13b)}$$

È conveniente esprime i residui in forma esponenziale.

Esempio

Scomposizione di Y(s) = $10/(s^2 + 8s + 25)$.

Soluzione

– Si calcolano i poli dell'equazione caratteristca $s^2 + 8s + 25 = 0$: $p_1 = -4 - j3$ e $p_2 = -4 + j3$.

Y(s) viene scritta:

$$Y(s) = \frac{10}{(s + 4 + j3)\,(s + 4 - j3)} = \frac{A_{1,1}}{s + 4 + j3} + \frac{A_{2,1}}{s + 4 - j3}$$

– Con le *VI.3.13* si calcolano i residui:

$$A_{i,1} = (s + 4 + j3)\, \frac{10}{(s + 4 + j3)\,(s + 4 - j3)}\Bigg|_{s = -4 - j3} = j\frac{5}{3} = \frac{5}{3} e^{j90^\circ}$$

$$A_{2,1} = \frac{5}{3} e^{-j90^\circ}$$

– Scomposizione di Y(s):

$$Y(s) = \frac{5}{3}\left[\frac{e^{j90^\circ}}{s + 4 + j3} + \frac{e^{-j90^\circ}}{s + 4 - j3}\right]$$

6) Calcolo dei residui per i poli reali multipli.

Si consideri il polo p_i di molteplicità $h > 1$, allora scomponendo Y(s) si ha:

$$Y(s) = \frac{A_{1,1}}{s - p_1} + \ldots + \frac{A_{i,1}}{s - p_i} + \frac{A_{i,2}}{s - p_i^2} + \ldots + \frac{A_{i,h}}{(s - p_i)^h} + \ldots + \frac{A_{n,1}}{s - p_n}$$

I residui corrispondenti al polo multiplo p_i sono dati dalle *VI.3.14*:

$$A_{i,h} = (s - p_i)^h\ Y(s)\Big|_{s = p_i},\quad A_{i,h-1} = \frac{d}{ds}\left[(s - p_i)^h\ Y(s)\right]_{s = p_i} \quad \text{(VI.3.14)}$$

$$A_{i,h-2} = \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2}\left[(s - p_i)^h Y(s)\right]_{s = p_i} \ldots A_{i,2} = \frac{1}{(h-2)!} \cdot \frac{d^{h-2}}{ds^{-2}}\left[(s - p_i)^h\ Y(s)\right]_{s = p_i}$$

$$A_{i,1} = \frac{1}{(h-1)!} \cdot \frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}}\left[(s - p_i)^h\ Y(s)\right]_{s = p_i}$$

Esempio

Scomposizione di $1/s(s+1)^3$.

Soluzione

– $Y(s)$ viene scritta:

$$Y(s) = \frac{A_{1,1}}{s} + \frac{A_{2,1}}{s+1} + \frac{A_{2,2}}{(s+1)^2} + \frac{A_{2,3}}{(s+1)^3}$$

– Con la *VI.3.12* si calcola il residuo:

$$A_{1,1} = s\frac{1}{s(s+1)^3}\bigg|_{s=0} = 1$$

– Con le *VI.3.14* si calcolano i residui:

$$A_{2,3} = (s+1)^3\frac{1}{s(s+1)^3}\bigg|_{s=-1} = -1, \quad A_{2,2} = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{1}{s(s+1)^3}\right]_{s=-1} = -1/s^2\big|_{s=-1} = -1$$

$$A_{2,1} = \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3\frac{1}{s(s+1)^3}\right]_{s=-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{s^3}\right]_{s=-1} = -1$$

– Scomposizione di $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

3.4. Trasformata di Laplace di equazioni differenziali

Si consideri l'equazione *VI.3.15* per $t \geq 0$: a coefficienti costanti, con le condizioni iniziali $y(0)$, $dy(0)/dt, \ldots, d^{n-1}y(0)/dt^{n-1}$.

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = f(t) \qquad \text{(VI.3.15)}$$

Se $y_u(t)$ è la soluzione della *VI.3.15* che soddisfa le condizioni iniziali, allora $Y(s) = L[y_u(t)]$ è:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{D(s)} + \frac{\zeta(s)}{D(s)} \qquad \text{(VI.3.16)}$$

con:

$$F(s) = L[f(t)] \qquad \text{(VI.3.16a)}$$

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots a_0 \qquad \text{(VI.3.16b)}$$

$$\begin{aligned}\zeta(s) = \; & a_n(s^{n-1}y(0) + s^{n-2}dy(0)/dt + \ldots + sd^{n-2}y(0)/dt^{n-2} + d^{n-1}y(0)/dt^{n-1}) + \\ & a_{n-1}(y(0)s^{n-2} + s^{n-3}dy(0)/dt + \ldots + sd^{n-3}y(0)/dt^{n-3} + d^{n-2}y(0)/dt^{n-2}) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_2(sy(0) + dy(0)/dt) + a_1 y(0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \end{aligned}$$

$$\text{(VI.3.16c)}$$