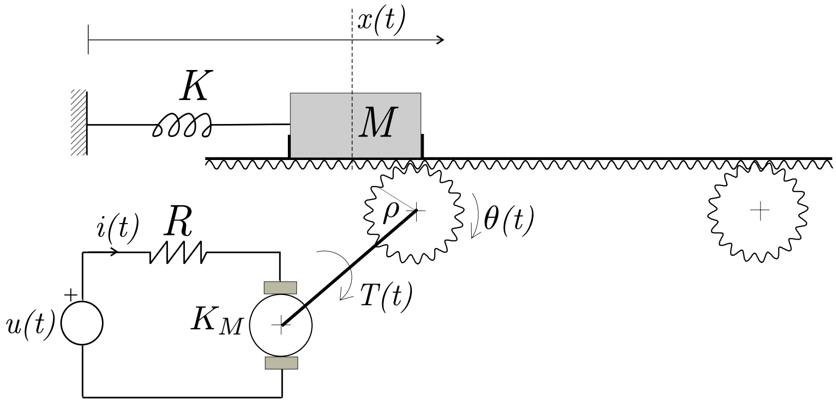
Università degli Studi di Siena

Prof. Alberto Bemporad 5 Febbraio 2001

Compito di Teoria dei Sistemi

Esercizio 1



Considera il sistema rappresentato in figura. Un motore elettrico di costante $K_M = 5$ Nm/A, collegato con una resistenza $R = 62.5\ K\Omega$ ad un generatore di tensione, muove un rullo dentato di raggio $\rho = 2$ cm accoppiato cinematicamente con un piano, sul quale è ancorato un carico di massa $M = 10$ Kg. Tale carico è collegato mediante una molla di costante $K = 0.1$ N/m ad un riferimento fisso. Per tale sistema:

1. Scrivi le equazioni dinamiche del modello, calcola la funzione di trasferimento dalla tensione u alla posizione x e discuti la stabilità del sistema.
2. Calcola la massima escursione della posizione $x(t)$ del carico per una tensione alternata di alimentazione $u(t) = 24$ V, $f = \frac{0.1}{\pi}$ Hz.
3. Calcola la posizione di equilibrio x_{eq} dovuta ad un gradino di tensione continua $u = 24$ V.
4. Supponi che una volta raggiunto l'equilibrio, la molla si spezzi. Calcola la conseguente evoluzione $v(t)$ della velocità della massa (il motore continua ad essere alimentato con una tensione continua $u(t) = 24$ V).

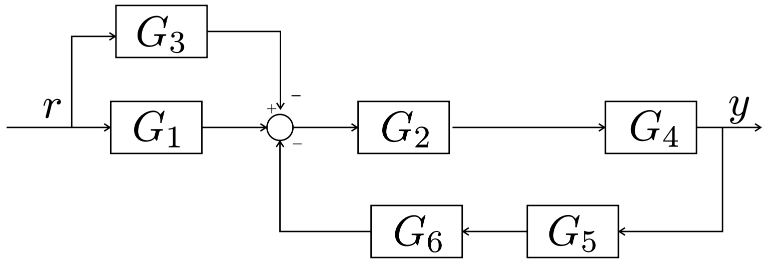
(Trascurare la massa del piano, della ruota dentata e dell'albero motore. Supporre che il piano abbia lunghezza indefinita. Trascurare tutti gli attriti).

Esercizio 2

Tracciare il diagramma di Bode della funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{(1-s)}{s(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

Esercizio 3



Calcolare la funzione di trasferimento da r a y del sistema rappresentato in figura.

Soluzioni

Esercizio 1

1. Le equazioni che legano le grandezze del modello sono:

$$\begin{array}{lll} u - Ri - e = 0, & e = K_M\omega, & T = K_M i \\ x = \rho\theta, & F\rho = T, & M\ddot{x} = -Kx + F \end{array}$$

   Sostituendo, si ottiene l'equazione differenziale del II ordine

$$\ddot{x}(t) + \frac{K_M^2}{\rho^2 RM}\dot{x}(t) + \frac{K}{M}x(t) = \frac{K_M}{\rho RM}u(t)$$

   e la funzione di trasferimento $G(s)$ da u a x

$$G(s) = \frac{\frac{K_M}{\rho RM}}{s^2 + \frac{K_M^2}{\rho^2 RM}s + \frac{K}{M}}$$

   Sostituendo i valori numerici:

$$\ddot{x}(t) + 0.1\dot{x}(t) + 0.01x(t) = 0.0004u(t), \qquad G(s) = \frac{0.0004}{s^2 + 0.1s + 0.01}$$

   I poli del sistema sono $s_{1,2} = 0.1(-0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2})$. Essendo la parte reale dei poli negativa, il sistema è asintoticamente stabile. La risposta è oscillatoria smorzata.

2. La pulsazione della tensione di eccitazione è $\omega = 2\pi f = 0.2$ rad/s. L'ampiezza della risposta in regime permanente della posizione è data da

$$24|G(j2)| = 24\frac{0.04}{|-4 + 2j + 1|} = 0.2666 \text{ m}$$

   Pertanto, la massima escursione di $x(t)$ sarà due volte tale valore, cioè 0.5325 m.

3. Annullando le derivate, si ottiene $0.01x_{\text{eq}} = 0.0004u$, da cui $x_{\text{eq}} = 0.0004 \cdot 24/0.01 = 0.96$ m.

4. La rottura della molla equivale a porre $K = 0$. Si ottiene quindi

$$\ddot{x}(t) + 0.1\dot{x}(t) = 0.0004u(t)$$

   e, ponendo $v(t) = \dot{x}(t)$, l'equazione differenziale del primo ordine

$$\dot{v}(t) + 0.1v(t) = 0.0004u(t)$$

   con un autovalore reale negativo in $\lambda = -0.1$. Una soluzione particolare è $v_p(t) = 0.096$ m/s (è la soluzione di equilibrio). La soluzione complessiva è

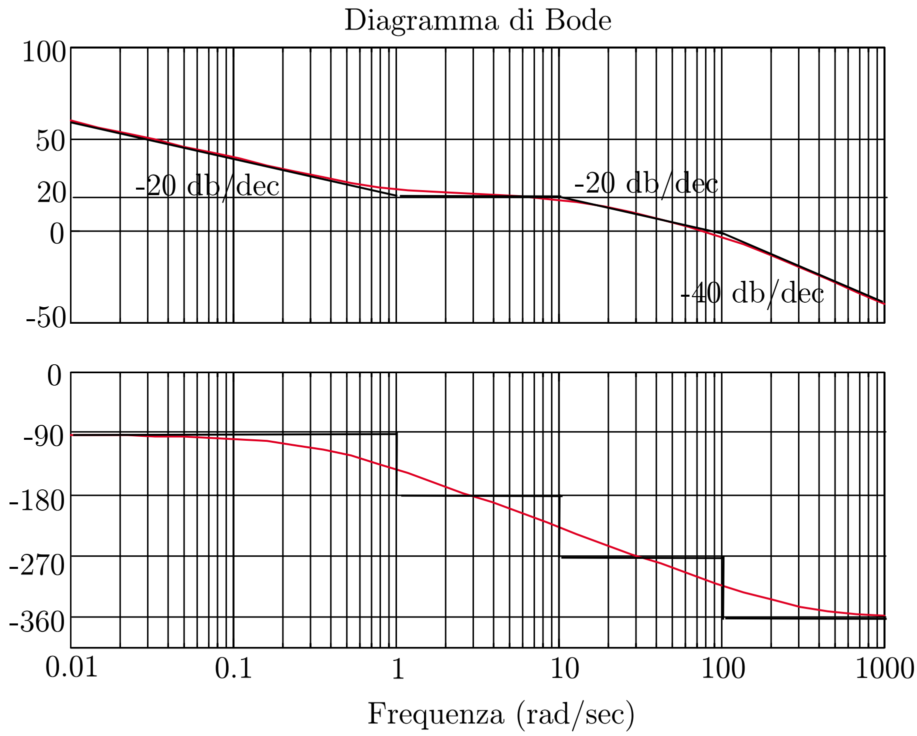
$$v(t) = v_p(t) + v_{omog}(t) = 0.096 + \alpha e^{-0.1t}$$

   Imponendo la condizione iniziale $v(0) = 0$, si ottiene

$$v(t) = 0.096(1 - e^{-0.1t})$$

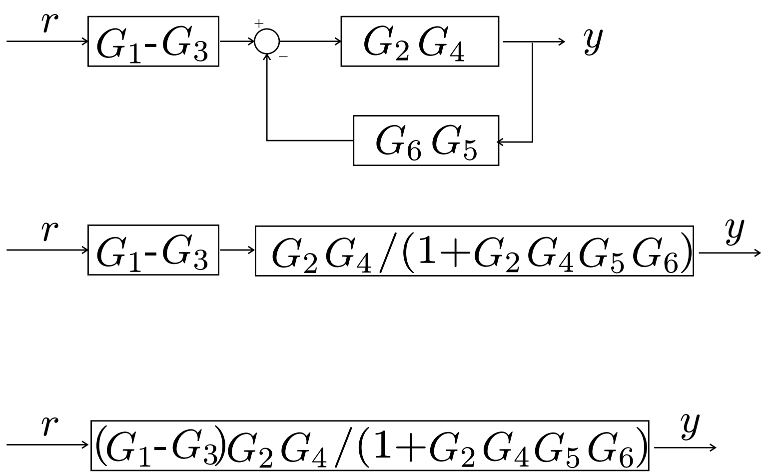
Esercizio 2

Il sistema ha uno zero instabile in $s = -1$, un polo nell' origine, e due poli reali stabili in $s = -10$ e $s = -100$, rispettivamente.



Esercizio 3

Manipolando il diagramma con l'algebra dei blocchi:



si ottiene la funzione di trasferimento

$$\frac{y}{r} = \frac{(G_1 - G_3)G_2G_4}{1 + G_2G_4G_5G_6}$$