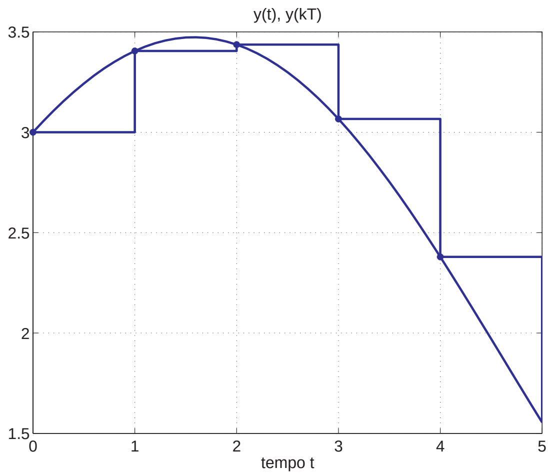
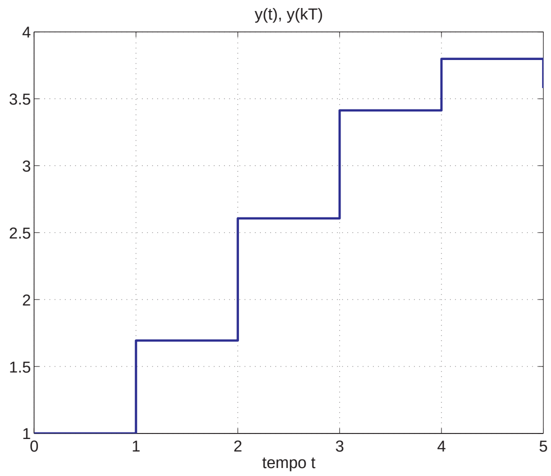
3. Sistemi Lineari a Tempo Discreto

3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto



Campionamento di un segnale continuo

Fig. (a)



Segnale discreto

Fig. (b)

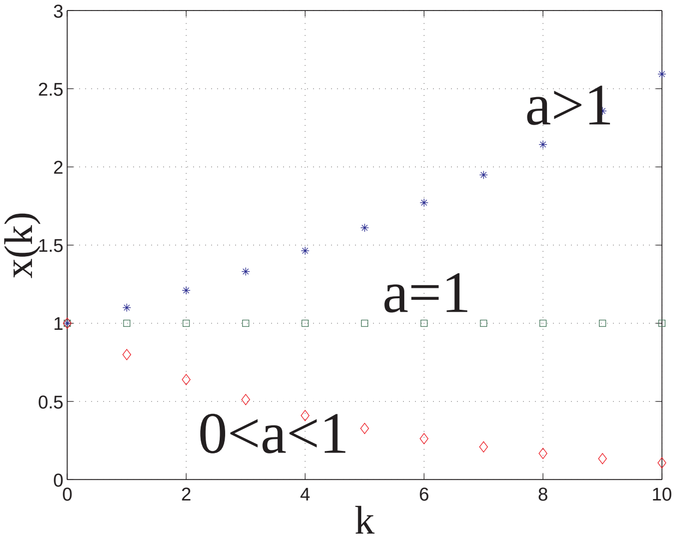
- Esprimono relazioni fra variabili *campionate* ad intervalli T: $x(kT)$, $u(kT)$, $y(kT)$, $k = 0, 1, \ldots,$
- Il segnale è $x(kT)$ è mantenuto costante durante l'*intervallo di campionamento* $[kT, (k+1)T)$.
- Il segnale può rappresentare il *campionamento* di un segnale *continuo* nel tempo (Fig. a), oppure essere intrinsecamente *discreto* nel tempo (Fig. b).
- Fondamentali per il progetto di *controllori digitali*

3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

- Considera l'*equazione alle differenze* del primo ordine

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- Esiste una e una sola soluzione: $x(k) = a^k x_0$



3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

- Considera l'*equazione alle differenze* del primo ordine con ingresso

$$\begin{cases} x(k+1) & = & ax(k) + bu(k) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

- La soluzione esiste ed è unica:

$$x(k) = \underbrace{a^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} a^i bu(k-1-i)}_{\text{risposta forzata}}$$

- **Esempio**: accumulo di capitale in un deposito bancario

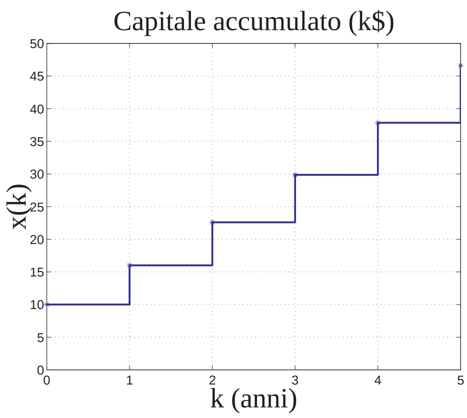
  - ρ: tasso di interesse (fisso) praticato dalla banca
  - $x(k)$: capitale accumulato all'inizio dell'anno k
  - $u(k)$: capitale versato alla fine dell'anno k
  - x_0: capitale iniziale

$$\begin{cases} x(k+1) & = & (1+\rho)x(k) + u(k) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

Esempio numerico:

x_0	10 k$
$u(k)$	5 k$
ρ	10%

$x(k) = 60(1.1)^k - 50$



3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

- *Sistema di equazioni alle differenze* di ordine n con ingresso

$$
\left\{
\begin{array}{rcll}
x_1(k+1) & = & a_{11}x_1(k) + \ \ldots + a_{1n}x_n(k) & +b_1u(k) \\
x_2(k+1) & = & a_{21}x_1(k) + \ \ldots + a_{2n}x_n(k) & +b_2u(k) \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
x_n(k+1) & = & a_{n1}x_1(k) + \ \ldots + a_{nn}x_n(k) & +b_nu(k) \\
\multicolumn{4}{l}{x_1(0) = x_{10}, \quad \ldots \quad x_n(0) = x_{n0}}
\end{array}
\right.
$$

- Forma matriciale equivalente

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
x(k+1) & = & Ax(k) + Bu(k) \\
x(0) & = & x_0
\end{array}
\right.
$$

- La soluzione esiste ed è unica:

$$
x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^i Bu(k-1-i)}_{\text{risposta forzata}}
$$

- Se la matrice A è diagonalizzabile: $A = T^{-1}\Lambda T$,

$$
\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{bmatrix} T
$$

Risposta modale

- Sia l'ingresso $u(k) = 0$, $\forall k \geq 0$, e supponiamo che A sia diagonalizzabile
- La traiettoria di stato (risposta libera) è

$$x(k) = A^k x_0 = T^{-1}\Lambda^k T x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k v_i$$

dove v_i=autovettori di A, λ_i=autovalori di A, α_i=coefficienti che dipendono dalla condizione iniziale $x(0)$ (il vettore $\alpha = Tx(0)$, $T^{-1} = [v_1 \dots v_n]$).

- Del tutto analogo al caso tempo continuo: il modo di evolvere del sistema dipende dagli autovalori di A (detti ancora *modi* del sistema), un modo si dice *eccitato* se il relativo $\alpha_i \neq 0$

- **Esempio**

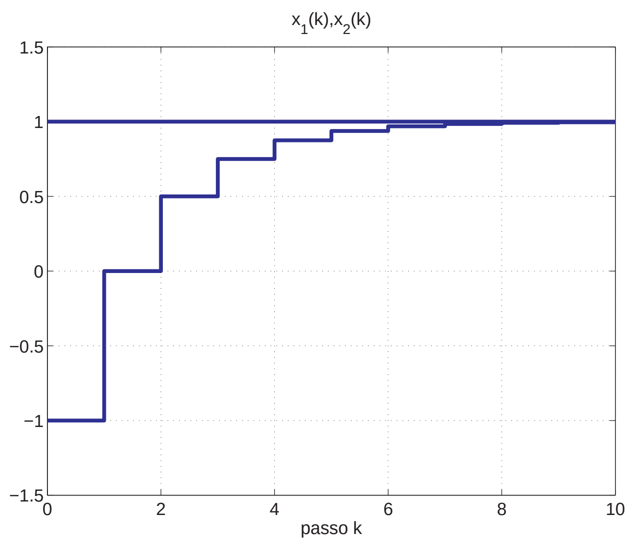
$$\begin{cases} x_1(k+1) &= \frac{1}{2}x_1(k)+\frac{1}{2}x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k)+u(k) \\ x_1(0)=-1 & x_2(0)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ x(0) &= \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \end{cases}$$

  - Autovalori di A: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$
  - Soluzione:

$$\begin{aligned} x(k) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] + \sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k-1-i) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & 1-\frac{1}{2^k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] + \sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2^i} \\ 1 \end{bmatrix} u(k-1-i) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2^i} \\ 1 \end{bmatrix} u(k-1-i)}_{\text{risposta forzata}} \end{aligned}$$

  - Soluzione numerica per $u(k) \equiv 0$ (risposta libera):



3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

- *Equazioni alle differenze* di ordine n con ingresso

$$a_n y(k-n) + a_{n-1} y(k-n+1) + \cdots + a_1 y(k-1) + y(k) =$$
$$b_n u(k-n) + \cdots + b_1 u(k-1) + b_0 u(k)$$

- Equivale al sistema di n equazioni del primo ordine:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(k+1) & = & x_2(k) \\ x_2(k+1) & = & x_3(k) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n(k+1) & = & -a_n x_1(k) + \ \ldots\ - a_1 x_n(k) + u(k) \\ y(k) & = & (b_n - b_0 a_n) x_1(k) + \cdots + (b_1 - b_0 a_1) x_n(k) + b_0 u(k) \end{array}\right.$$

- Equivale alla forma matriciale

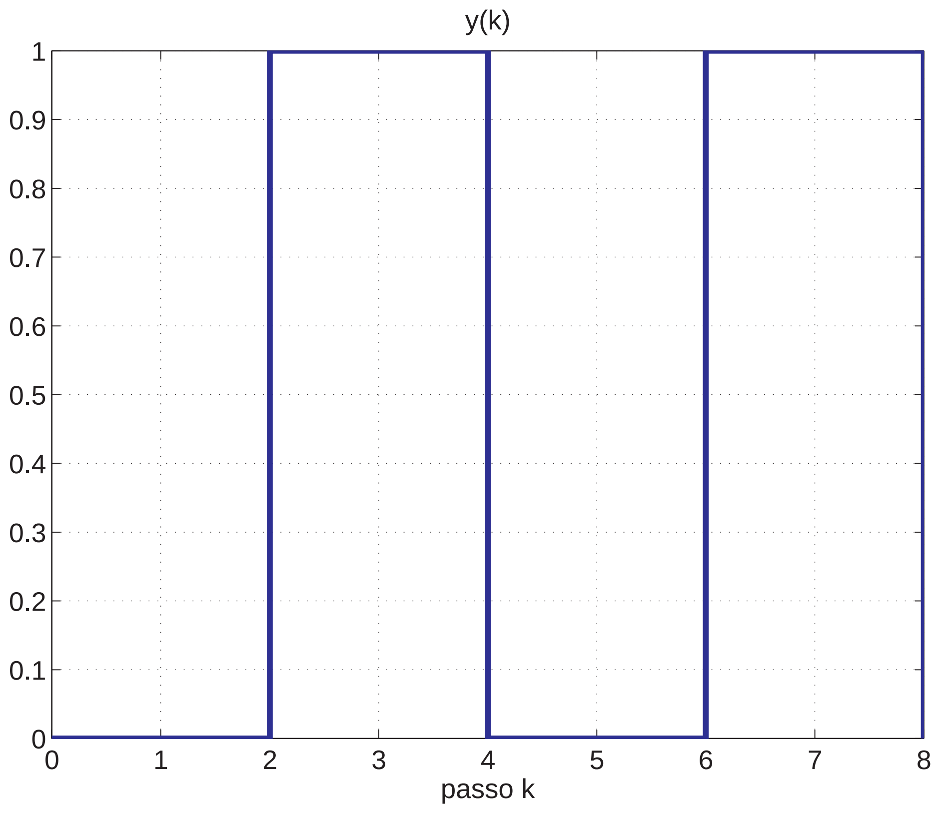
$$\left\{\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(k) & = & \begin{bmatrix} (b_n - b_0 a_n) & \ldots & (b_1 - b_0 a_1) \end{bmatrix} x(k) + b_0 u(k) \end{array}\right.$$

- **Esempio:**

$$y(k-2) + y(k) = u(k-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

  – Soluzione numerica per
    $x(0) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $u(-2) = 0$, $u(-1) = 0$, $u(k) \equiv 1$ per $k \geq 0$
    (risposta forzata):



3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

Sistema lineare tempo-discreto, tempo-invariante:

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

- Dato lo *stato iniziale* $x(0)$ e un segnale di ingresso $u(k)$, $k = 0, 1, \dots$ è possibile predire tutta l'evoluzione dello stato $x(k)$ e dell' *uscita* $y(k)$ del sistema, per ogni $k = 0, 1, \dots$.
- Nota che lo stato $x(0)$ sintetizza tutta la storia passata del sistema.
- La dimensione n dello stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è detta *ordine* del sistema.
- Il sistema si dice *proprio* se $D = 0$.

(cfr. sistemi lineari a tempo continuo)

In generale $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$,
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Soluzione di regime stazionario

- Ipotesi: A ha tutti autovalori in modulo < 1
- Quale sarà il valore asintotico dell'uscita corrispondente ad un dato ingresso costante $u(k) \equiv u_r, \forall k = 0, 1, \ldots$?
- Imponiamo $x_r(k+1) = x_r(k) \Rightarrow x_r = Ax_r + Bu_r$

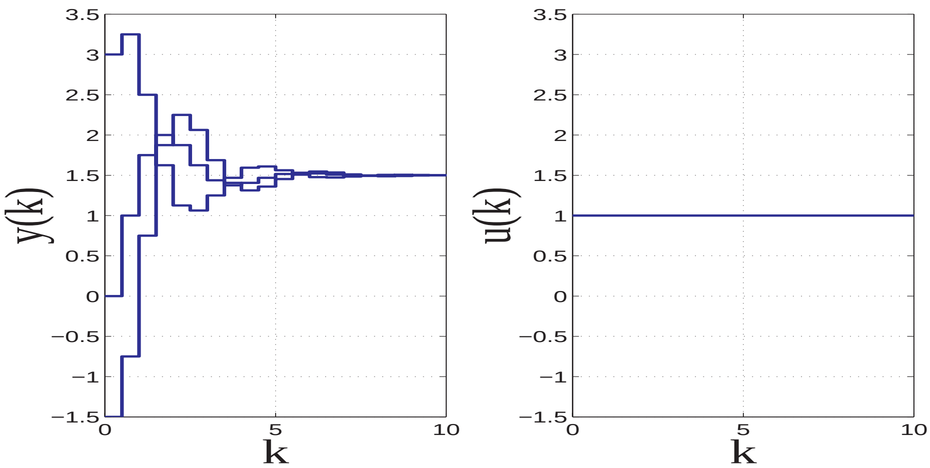
$$y_r = \underbrace{\left(C(I-A)^{-1}B + D\right)}_{\text{guadagno in continua}} u_r$$

- **Esempio**:

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

Guadagno in continua:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$



3 Sistemi Lineari a Tempo Discreto

Esempio: Dinamica studenti in un corso di laurea

Ipotesi:

Durata del corso di laurea: 3 anni
Percentuali di studenti promossi, ripetenti e abbandoni: costanti per ogni anno
Non è possibile iscriversi direttamente al II e III anno
Non sono ammessi studenti fuori corso

Notazione:

k	Anno accademico
$x_i(k)$	numero di studenti iscritti all' i-esimo anno di corso nell' anno k, $i = 1, 2, 3$
$u(k)$	numero di matricole nell'anno k
$y(k)$	numero di laureati nell'anno k
α_i	tasso di promossi nell'anno di corso i-esimo, $0 \leq \alpha_i \leq 1$
β_i	tasso di ripetenti nell'anno di corso i-esimo, $0 \leq \beta_i \leq 1$
	tasso di abbandoni nell'anno di corso i-esimo: $1 - \alpha_i - \beta_i \geq 0$

Sistema di equazioni alle differenze di ordine 3:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \beta_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) = \alpha_2 x_2(k) + \beta_3 x_3(k) \\ y(k) = \alpha_3 x_3(k) \end{cases}$$

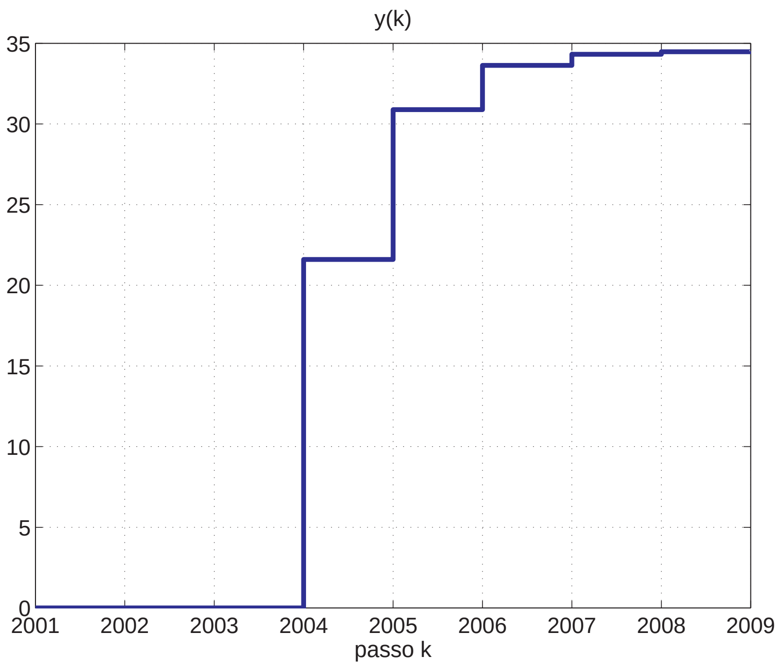
In forma matriciale:

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

Esempio:

$\alpha_1 = .60$	$\beta_1 = .20$
$\alpha_2 = .80$	$\beta_2 = .15$
$\alpha_3 = .90$	$\beta_3 = .08$

$u(k) \equiv 50,\ k = 2001, 2002, \ldots$



valore di regime:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.08 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{guadagno in continua}} 50 \approx 0.6905 \cdot 50 = 34.5269$$

Definizione generale di equilibrio:

- Dato il sistema (tempo discreto, non lineare, tempo variante)

$$\begin{cases} x(k+1) &= f(k, x(k), u(k)) \\ y(k) &= g(k, x(k), u(k)) \end{cases}$$

- Lo stato costante x_r e l'ingresso costante u_r sono un *equilibrio* del sistema se per $x(t_0) = x_r$ e $u(t) \equiv u_r$, $\forall k \geq k_0$, si ha $x(k) \equiv x_r$, $\forall k \geq k_0$.
- Definizione equivalente: $x(k) = f(k, x(k), u(k))$, $\forall k \geq k_0$
- x_r è detto *stato di equilibrio*
- u_r è detto *ingresso di equilibrio*

3.1 Campionamento di sistemi a tempo continuo

Campionamento esatto:

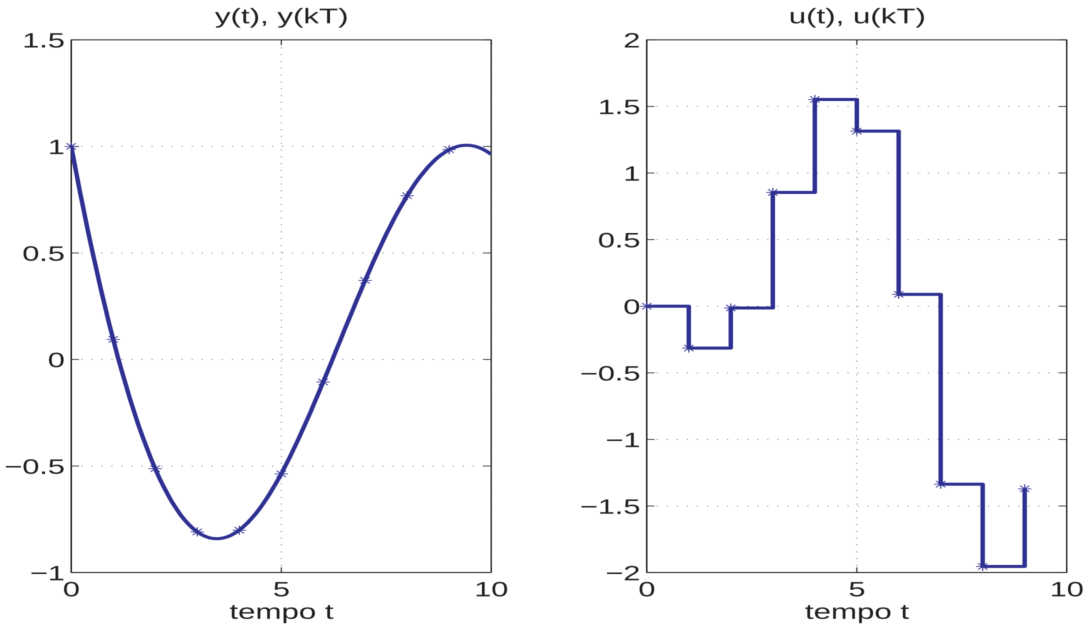
- Dato il sistema a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$
$$x(0) = x_0$$

  vogliamo esprimerne l'evoluzione agli istanti di campionamento $t = 0,\ T,\ 2T,\ \ldots,\ kT,\ \ldots$, supponendo che l'ingresso $u(t)$ sia costante durante ogni intervallo di campionamento:

$$u(t) \equiv \tilde{u}(k),\ kT \leq t < (k+1)T$$

- Siano $\tilde{x}(k) \triangleq x(kT)$ e $\tilde{y}(k) \triangleq y(kT)$ i campioni dello stato e dell'uscita, rispettivamente, all' istante di campionamento k-esimo.



3.1 Campionamento di sistemi a tempo continuo

- Applichiamo la formula risolutiva

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

per $t = (k+1)T$, $t_0 = kT$, $x_0 = x(kT)$, e ingresso $u(\tau) \equiv \tilde{u}(k)$, $kT \leq \tau < (k+1)T$:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau\right)B\tilde{u}(k)$$

ottenendo quindi

$$\tilde{x}(k+1) = e^{AT}\tilde{x}(k) + \left(\int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau\right)B\tilde{u}(k)$$

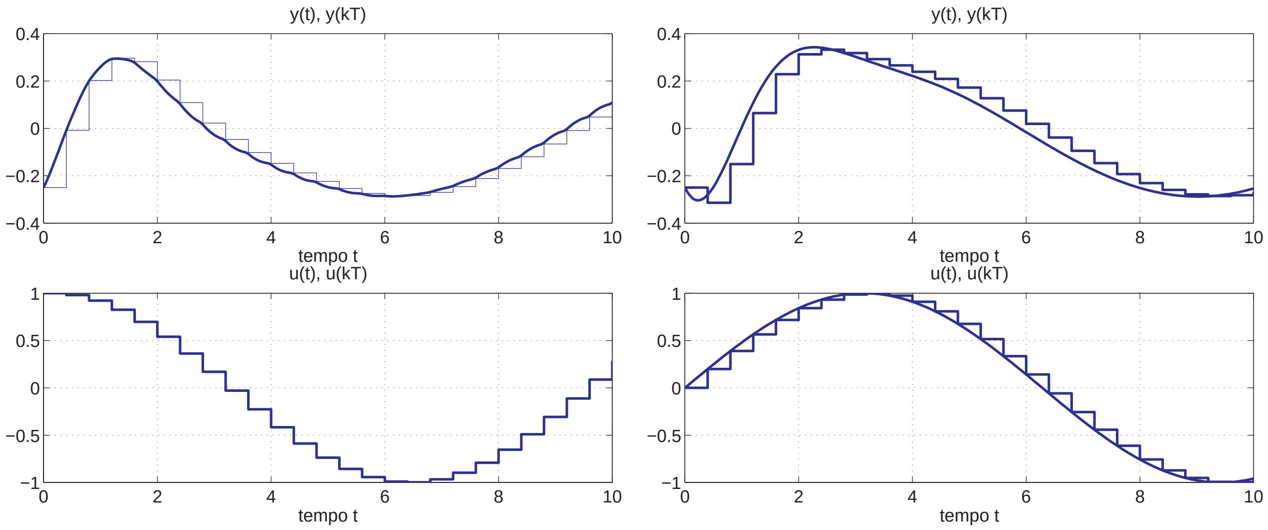
- Il sistema tempo-discreto a segnali campionati

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}\tilde{u}(k) \end{cases}$$

è legato al sistema tempo continuo dalle relazioni

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{A} \triangleq e^{AT} & \tilde{B} \triangleq \left(\int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau\right)B \\ \tilde{C} \triangleq C & \tilde{D} \triangleq D \end{array}}$$

3.1 Campionamento di sistemi a tempo continuo



- Nota: in generale , affinchè il sistema a tempo discreto $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ e il sistema a tempo continuo (A, B, C, D) coincidano agli istanti di campionamento $t = kT$ occorre che l'ingresso $u(t)$ sia costante durante l'intervallo di campionamento .

- Questo normalmente avviene nei sistemi di controllo digitale, dove il segnale di ingresso viene generato a frequenze regolari da un'unità di calcolo (microcontrollore / PC / DSP) e mantenuto costante.

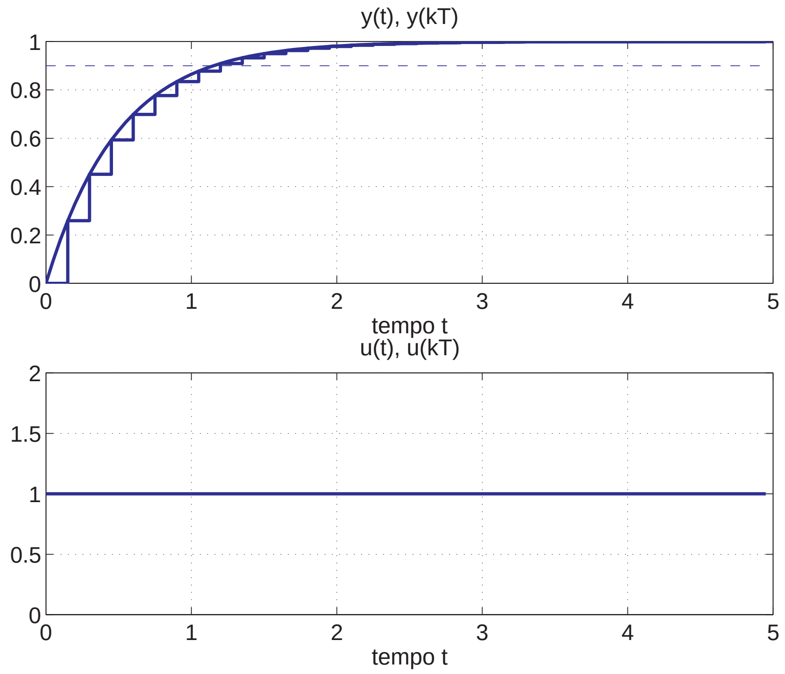
- In ogni caso, $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ è una approssimazione del modello tempo continuo (A, B, C, D) .

3.1 Campionamento di sistemi a tempo continuo

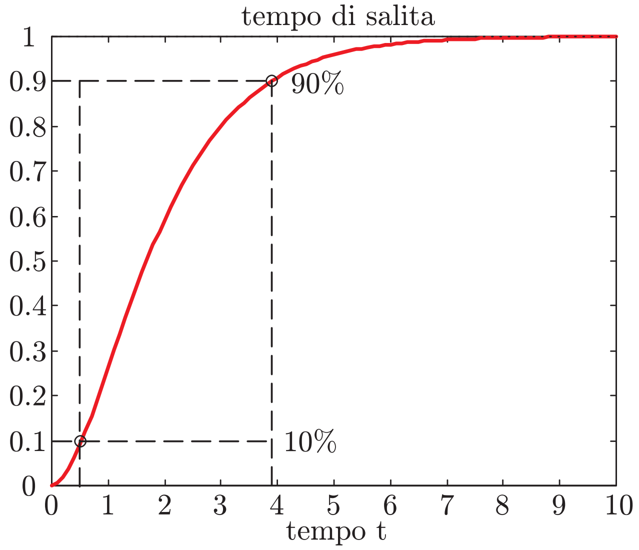
- Come scegliere il tempo di campionamento T per discretizzare un dato sistema ?

- Buona scelta (per sistemi lineari):

$$\boxed{T \approx \frac{1}{10} \text{ tempo di salita per ingresso } u(t) = 1,\, x(0) = 0}$$

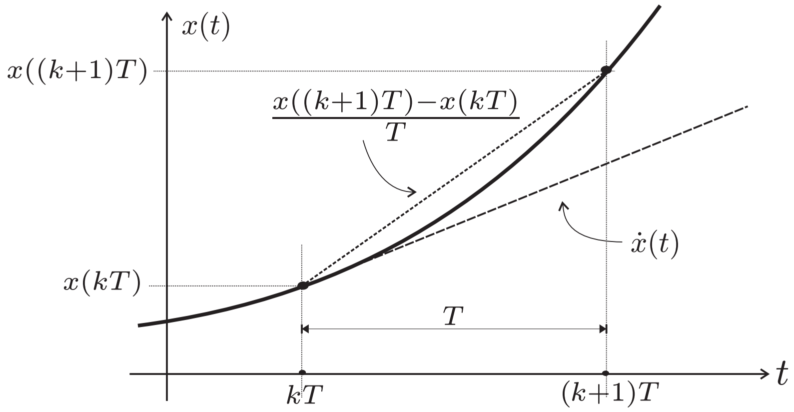


- *Tempo di salita* $\triangleq$ tempo necessario per passare dal 10% al 90% del valore di regime



3.1 Campionamento di sistemi a tempo continuo

Campionamento con metodo di Eulero:



(1707-1783)

- Idea: approssimare $\dot{x}(t)$ con $\frac{x((k+1)T)-x(kT)}{T}$
- Approssimazione per sistema lineare:

$$x((k+1)T) = (I + TA)x(kT) + TBu(kT)$$

- Il sistema tempo-discreto a segnali campionati

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}\tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) = \tilde{C}\tilde{x}(k) + \tilde{D}\tilde{u}(k) \end{cases}$$

  è legato al sistema tempo continuo dalle relazioni

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tilde{A} \triangleq I + AT & \tilde{B} \triangleq TB \\ \tilde{C} \triangleq C & \tilde{D} \triangleq D \end{array}}$$

- Nota: $e^{TA} = I + TA + \cdots + \frac{T^n A^n}{n!} + \ldots$
  il metodo di Eulero approssima il metodo esatto.
  Coincidono per $T \to 0$.
- Il metodo di Eulero è applicabile anche a sistemi non lineari $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.

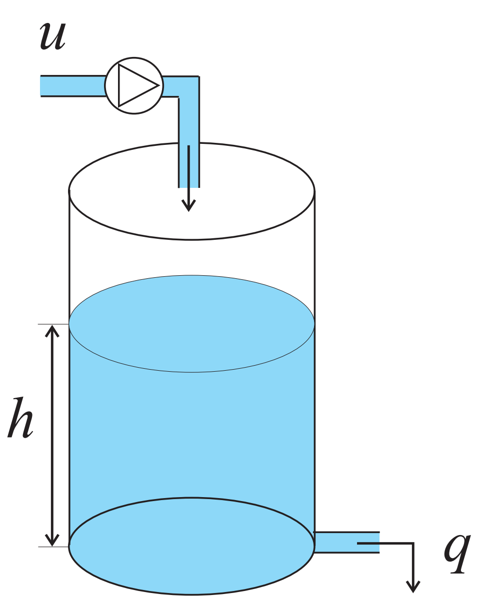
Esempio: Serbatoio

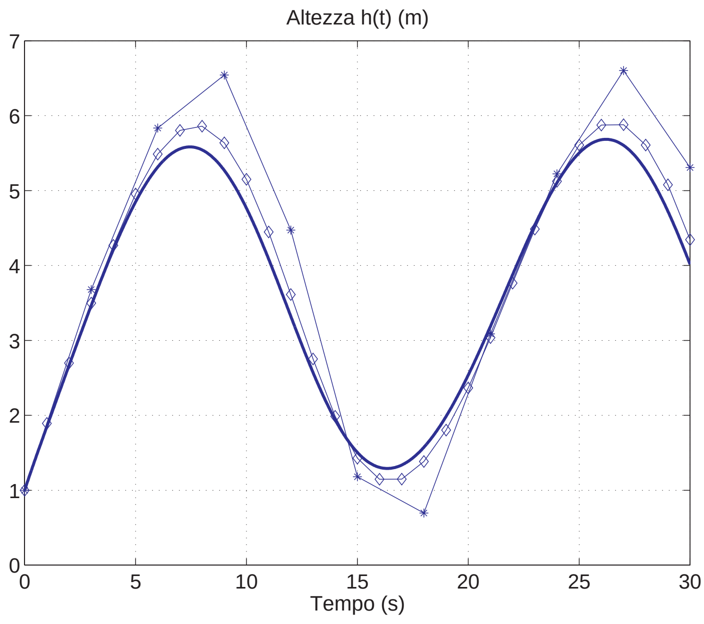
- Modello matematico del serbatoio (tempo continuo):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}h(t) & = & -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t) \\ q(t) & = & a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \end{cases}$$

- Modello matematico del serbatoio (tempo discreto):

$$\begin{cases} \tilde{h}(k+1) & = & \tilde{h}(k) - \frac{Ta\sqrt{2g}}{A}\sqrt{\tilde{h}(k)} + \frac{T}{A}\tilde{u}(k) \\ \tilde{q}(k) & = & a\sqrt{2g}\sqrt{\tilde{h}(k)} \end{cases}$$





- Minore il tempo di campionamento, migliore l'approssimazione (ma maggiore il numero di calcoli)