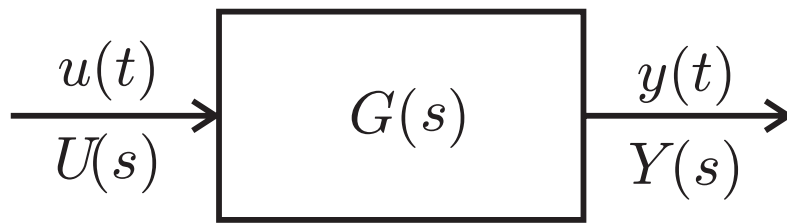
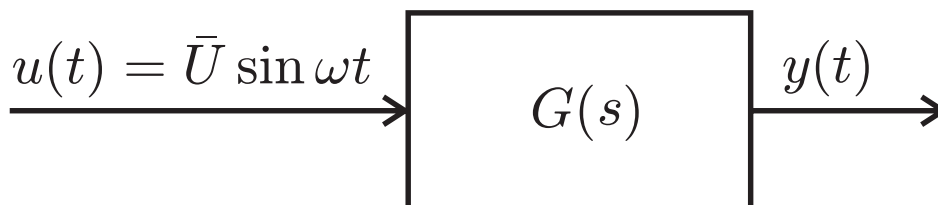

9. Risposta in Frequenza

9 Risposta in Frequenza



- Ricorda: la *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo continuo è il rapporto fra la trasf. di Laplace $Y(s)$ dell' uscita $y(t)$ e la trasf. di Laplace $U(s)$ dell' ingresso per $u(t)$ per condizione iniziale nulla $x_0 = 0$.
 - **Definizione:** La *risposta in frequenza* di un sistema $G(s)$ è la funzione complessa di variabile reale $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \geq 0$.
-



- **Teorema:** Se $G(s)$ è asintoticamente stabile (poli a parte reale negativa), allora **in condizioni di regime permanente** (o asintoticamente per $t \rightarrow \infty$)

$$y(t) \rightarrow y_{rp}(t) \triangleq \bar{U} |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

La risposta in frequenza permette quindi di analizzare la risposta del sistema ad eccitazioni sinusoidali a diverse frequenze.

9 Risposta in Frequenza

Dimostrazione:

L'ingresso $u(t) = \sin \omega t \mathbb{I}(t)$ ha per trasformata di Laplace

$$U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

La trasformata di Laplace della risposta forzata è quindi

$$Y_f(s) = G(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{G(s)\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

(la risposta libera $y_\ell(t)$ non è rilevante, visto che $G(s)$ è asintoticamente stabile e quindi $y_\ell(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$).

Scomponendo in fratti semplici^a:

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{\omega G(j\omega)}{2j\omega(s - j\omega)} + \frac{\omega G(-j\omega)}{-2j\omega(s + j\omega)}}_{Y_{rp}(s)=\text{risp. regime permanente}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - p_i}}_{\text{risp. forz. transitoria}}$$

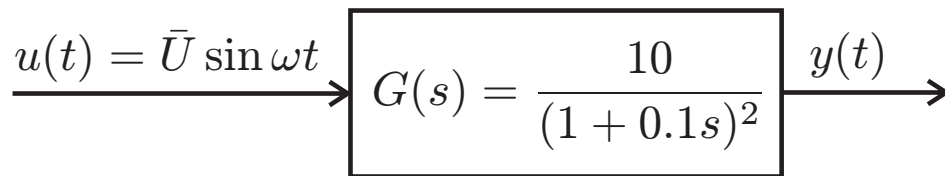
Poiché $G(s)$ è asintoticamente stabile, l'antitrasformata di $\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - p_i}$ tende a zero asintoticamente. Rimane quindi

$$\begin{aligned} y_{rp}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{G(j\omega)}{2j(s - j\omega)} + \frac{G(-j\omega)}{-2j(s + j\omega)} \right] \\ &= \frac{-j}{2} G(j\omega) e^{j\omega t} + \frac{j}{2} G(-j\omega) e^{-j\omega t} \\ &= \frac{-j}{2} G(j\omega) e^{j\omega t} + \overline{\left(\frac{-j}{2} G(j\omega) e^{j\omega t} \right)} \\ &= 2\text{Re} \left[\frac{-j}{2} G(j\omega) e^{j\omega t} \right] \\ &= \text{Im} \left[|G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega) + j\omega t} \right] \\ &= |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega)) \quad \square \end{aligned}$$

^a**Nota:** La risposta forzata $Y_f(s)$ ha due componenti: $Y_{rp}(s)$ =risposta di regime permanente, $Y_{ft}(s)$ =risposta forzata transitoria.

9 Risposta in Frequenza

Esempio



Calcolare la risposta in condizioni di regime permanente per ingresso $u(t) = 5 \sin 10t$.

- Il sistema è asintoticamente stabile, avendo $G(s)$ poli reali negativi:

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 0.1s)^2}, \quad p_1 = p_2 = -10$$

- Posso quindi definire la risposta di regime permanente

$$y_{rp}(t) = 5|G(j\omega)| \sin(10t + \angle G(j\omega))$$

dove

$$G(j\omega) = \frac{10}{(1 + 0.1j\omega)^2} = \frac{10}{1 + 0.2j\omega - 0.01\omega^2}$$

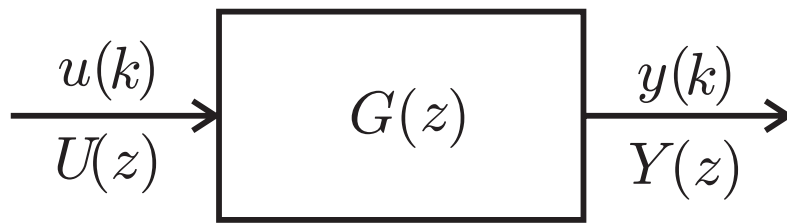
- Per $\omega = 10$ rad/s,

$$G(10j) = \frac{10}{1 + 2j - 1} = \frac{5}{j} = -5j$$

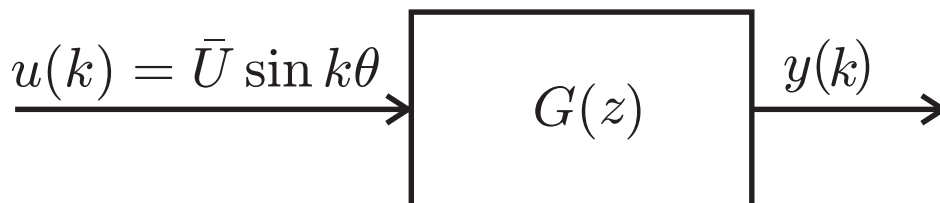
e quindi

$$y_{rp}(t) = 5 \cdot 5 \sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) = 25 \sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)$$

9 Risposta in Frequenza



- Ricorda: la *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo discreto è il rapporto fra la trasf. zeta $Y(z)$ dell'uscita $y(k)$ e la trasf. zeta $U(z)$ dell'ingresso per $u(k)$ per condizione iniziale nulla $x_0 = 0$.
 - **Definizione:** La *risposta in frequenza* di un sistema $G(z)$ è la funzione complessa di variabile reale $G(e^{j\theta})$, $\theta \in [0, \pi]$.
-



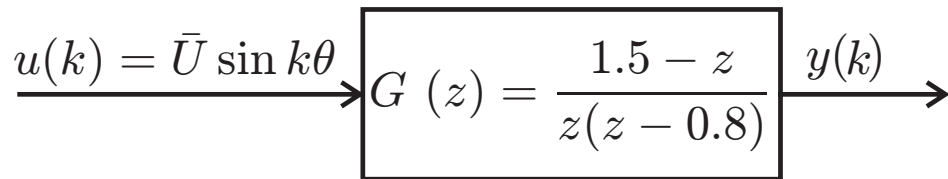
- **Teorema:** Se $G(z)$ è asintoticamente stabile (poli in modulo < 1), allora **in condizioni di regime permanente** (o asintoticamente per $k \rightarrow \infty$)

$$y(k) \rightarrow y_{rp}(k) \triangleq \bar{U} |G(e^{j\theta})| \sin(k\theta + \angle G(e^{j\theta}))$$

La risposta in frequenza permette quindi di analizzare la risposta del sistema ad eccitazioni sinusoidali a diverse frequenze.

9 Risposta in Frequenza

Esempio



Calcolare la risposta in condizioni di regime permanente per ingresso $u(k) = 100 + 20 \sin \frac{\pi}{6} k$.

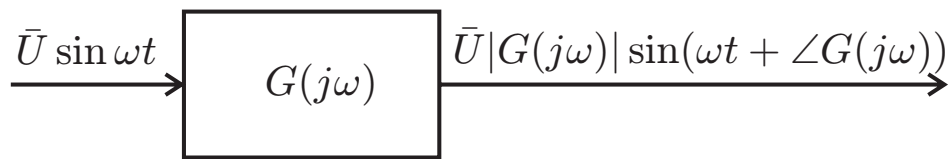
- Il sistema è asintoticamente stabile, avendo $G(z)$ poli in modulo minore di 1

$$G(z) = \frac{1.5 - z}{z(z - 0.8)}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 0.8$$

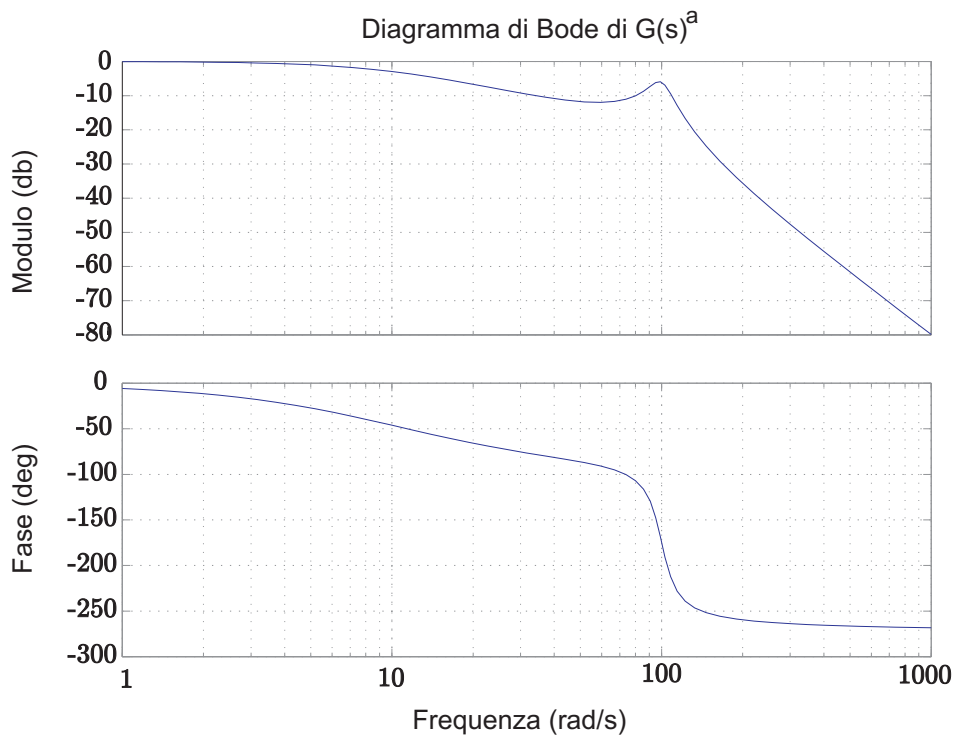
- Posso quindi definire la risposta di regime permanente

$$\begin{aligned} y_{rp}(k) &= 100|G(e^{j0})| \sin(0 \cdot k + \angle G(e^{j0})) + \\ &\quad 20|G(e^{j\frac{\pi}{6}})| \sin\left(\frac{\pi}{6}k + \angle G(e^{j\frac{\pi}{6}})\right) \\ &= 100 \underbrace{|G(1)| \operatorname{sgn}(G(1))}_{G(1)} + 20 \left| \frac{1.5 - e^{j\frac{\pi}{6}}}{e^{j\frac{\pi}{6}}(e^{j\frac{\pi}{6}} - 0.8)} \right| \cdot \\ &\quad \sin\left(\frac{\pi}{6}k + \angle(1.5 - e^{j\frac{\pi}{6}}) - \angle(e^{j\frac{\pi}{6}}(e^{j\frac{\pi}{6}} - 0.8))\right) \\ &\approx 100 \cdot \frac{0.5}{0.2} + 20 \cdot 1.6009 \sin\left(\frac{\pi}{6}k - 0.6678 - 1.9631\right) \\ &= 250 + 32.018 \sin\left(\frac{\pi}{6}k - 2.6309\right) \end{aligned}$$

9.1 Diagrammi di Bode



- Il diagramma di Bode esprime modulo $|G(j\omega)|$ e fase $\angle G(j\omega)$ di $G(j\omega)$ in funzione di ω . Serve ad analizzare la risposta del sistema a diverse frequenze ω .



- Il modulo $|G(j\omega)|$ è espresso in *decibel (db)* :

$$|G(j\omega)|_{\text{db}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

- La pulsazione ω è visualizzata in *scala logaritmica* (si disegnano cioè i grafici $(\log_{10} \omega, |G(j\omega)|_{\text{db}})$ e $(\log_{10} \omega, \angle G(j\omega))$)

$$^a G(s) = \frac{1}{(1+0.1s)(1+0.002s+0.0001s^2)}$$

9.1 Diagrammi di Bode

- Sistema in forma di Bode:

$$G(s) = \frac{K}{s^h} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_j (1 + sT_j)}, \quad \tau_i, T_j \in \mathbb{C}$$

K =guadagno di Bode ;

h =tipo del sistema=numeri di poli in 0;

T_j =costante di tempo (se reale > 0).

- Spesso la funzione di trasferimento è data in forma poli/zeri

$$G(s) = \frac{K'}{s^h} \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)}, \quad z_i, p_j \in \mathbb{C}$$

Vale quindi

$$z_i = -\frac{1}{\tau_i}, \quad p_j = -\frac{1}{T_j}, \quad K' = K \frac{\prod_i \tau_i}{\prod_j T_j}, \quad K = K' \frac{\prod_i (-z_i)}{\prod_j (-p_j)}$$

9.1 Diagrammi di Bode

Diagramma di Bode del modulo:

$$|G(j\omega)|_{\text{db}} = 20 \log_{10} \left| \frac{K}{(j\omega)^h} \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i)}{\prod_j (1 + j\omega T_j)} \right|$$

- Per le proprietà dei logaritmi^a:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{db}} &= 20 \log_{10} |K| - h20 \log_{10} \omega \\ &+ \sum_i 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_i| - 20 \sum_j \log_{10} |1 + j\omega T_j| \end{aligned}$$

- Si hanno quindi 4 casi diversi:

1. $20 \log_{10} |K|$
2. $20 \log_{10} |\omega|$
3. $20 \log_{10} |1 + j\omega T|$, $T \in \mathbb{R}$
4. $20 \log_{10} |1 + j\omega T| + 20 \log_{10} |1 + j\omega \bar{T}|$, $T \in \mathbb{C}$, cioè

$$20 \log_{10} \left| 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|$$

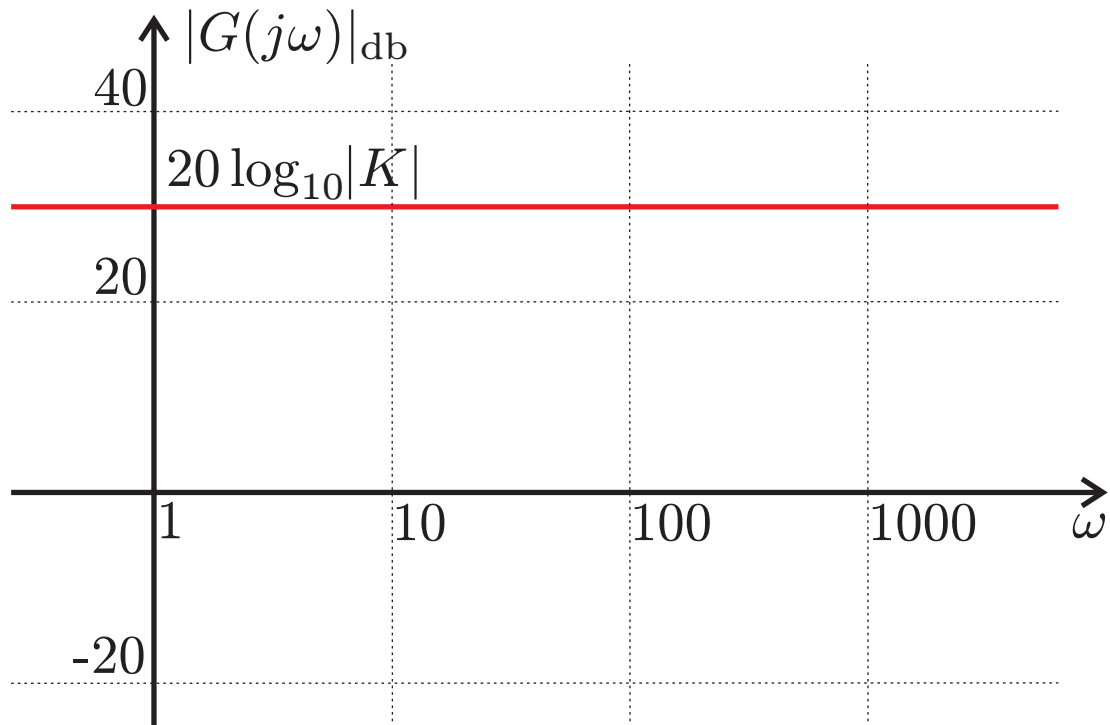
dove

$$\omega_n^2 = \frac{1}{T^2}, \quad \zeta = \frac{\text{Re}[T]}{|T|}$$

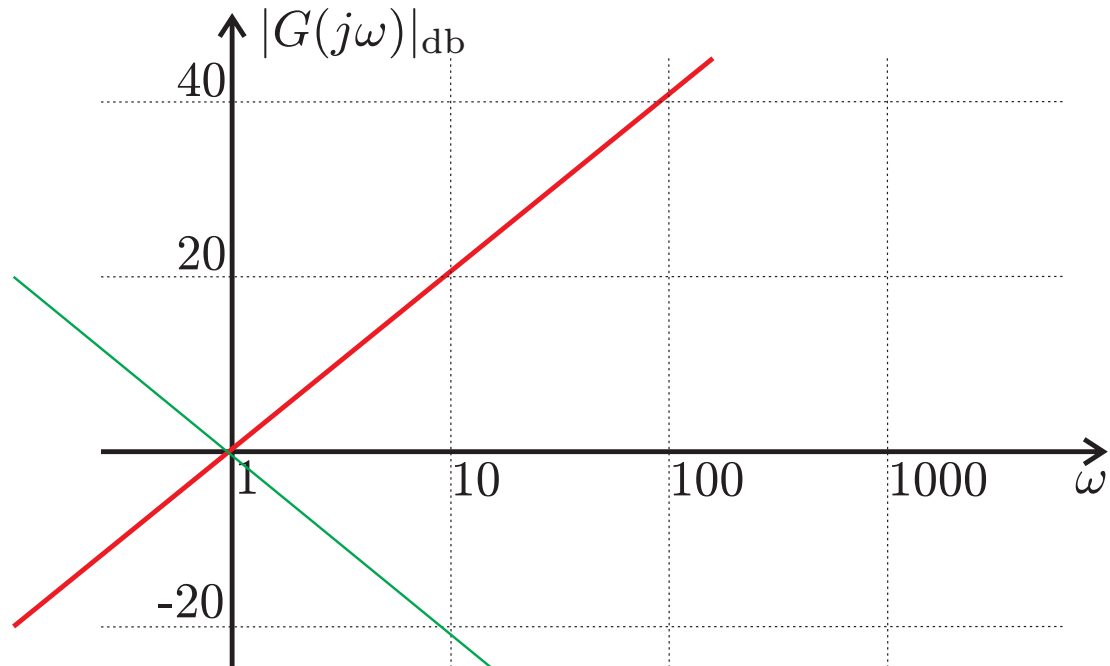
^a $\log \alpha\beta = \log \alpha + \log \beta$, $\log \frac{\alpha}{\beta} = \log \alpha - \log \beta$, $\log \alpha^\beta = \beta \log \alpha$

9.1 Diagrammi di Bode

- Caso 1: $20 \log_{10} |K|$

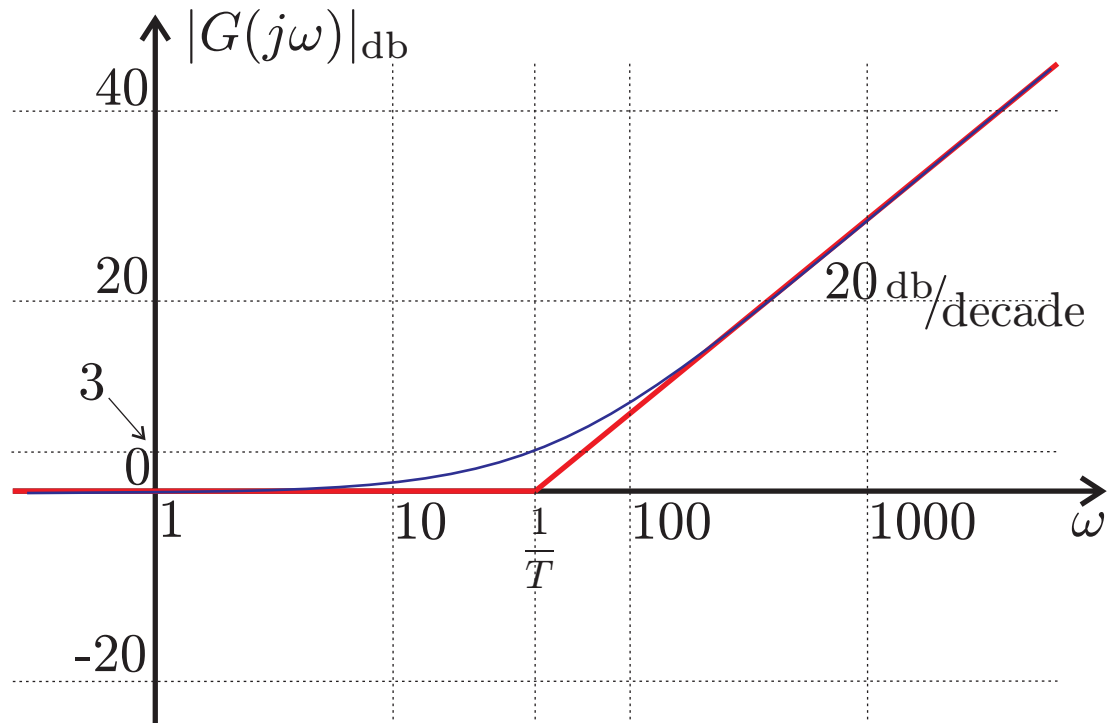


- Caso 2: $20 \log_{10} |\omega|$ ($-20 \log_{10} |\omega|$)



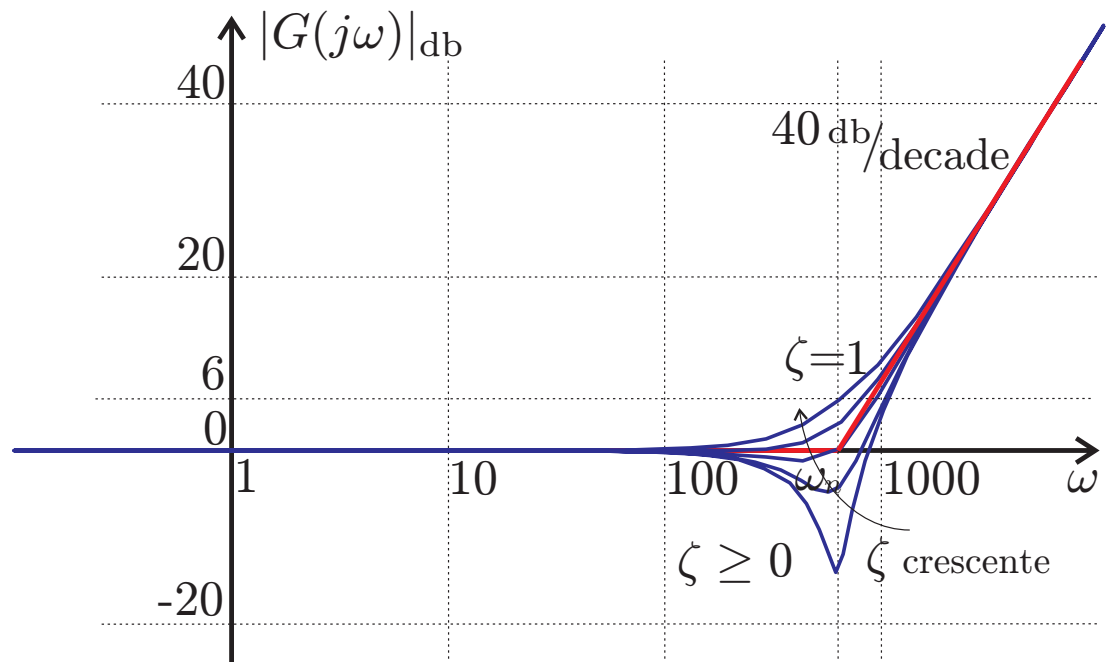
9.1 Diagrammi di Bode

- Caso 3: $20 \log_{10} |1 + j\omega T|$



Nota: $|G(j\omega)| \approx 1$ per $\omega \ll \frac{1}{T}$, $|G(j\omega)| \approx \omega T$ per $\omega \gg \frac{1}{T}$.

- Caso 4: $20 \log_{10} |1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}|$

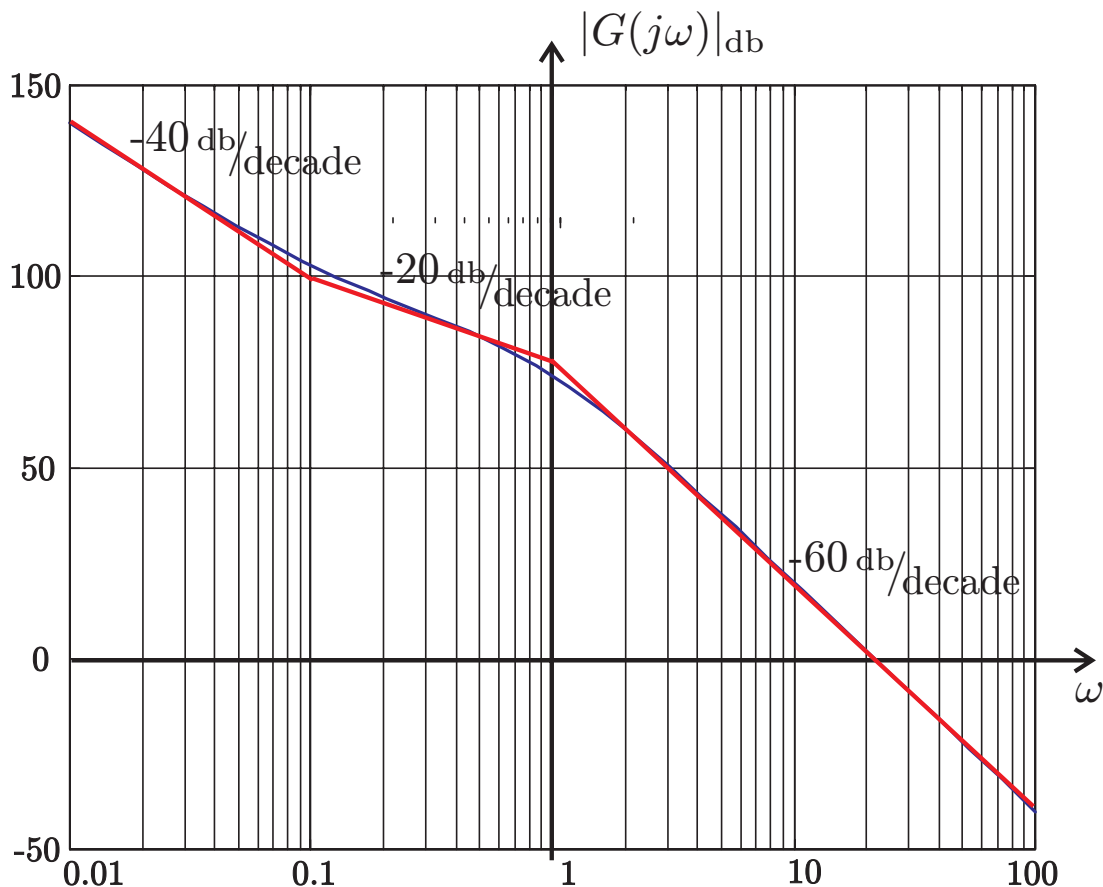


Nota: $|G(j\omega)| \approx 1$ per $\omega \ll \omega_n$, $|G(j\omega)| \approx \frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ per $\omega \gg \omega_n$.

9.1 Diagrammi di Bode

Esempio

$$G(s) = \frac{1000(1 + 10s)}{s^2(1 + s)^2}$$



- Per $\omega \ll 0.1$: $|G(j\omega)| \approx \frac{1000}{\omega^2}$
- Per $\omega = 0.1$: $20 \log_{10} \frac{1000}{\omega^2} = 20 \log_{10} 10^5 = 100$
- Per $0.1 < \omega < 1$: effetto dello zero in $s = -0.1$, aggiungi 20 db/decade.
- Per $\omega > 1$: effetto del doppio polo in $s = -1$, toglie 2×20 db/decade.

9.1 Diagrammi di Bode

Diagramma di Bode della fase:

$$\angle G(j\omega) = \angle \left(\frac{K}{(j\omega)^h} \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i)}{\prod_j (1 + j\omega T_j)} \right)$$

- Per le proprietà dell'esponenziale^a:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) | &= \angle K - \angle(j\omega)^h \\ &+ \sum_i \angle(1 + j\omega\tau_i) - \sum_j \angle(1 + j\omega T_j) \end{aligned}$$

- Si hanno ancora 4 casi diversi:

$$1. \angle K = \begin{cases} 0 & \text{per } K > 0 \\ -\pi & \text{per } K < 0 \end{cases}$$

$$2. \angle(j\omega)^h = \frac{h\pi}{2}$$

$$3. \angle(1 + j\omega T), T \in \mathbb{R}$$

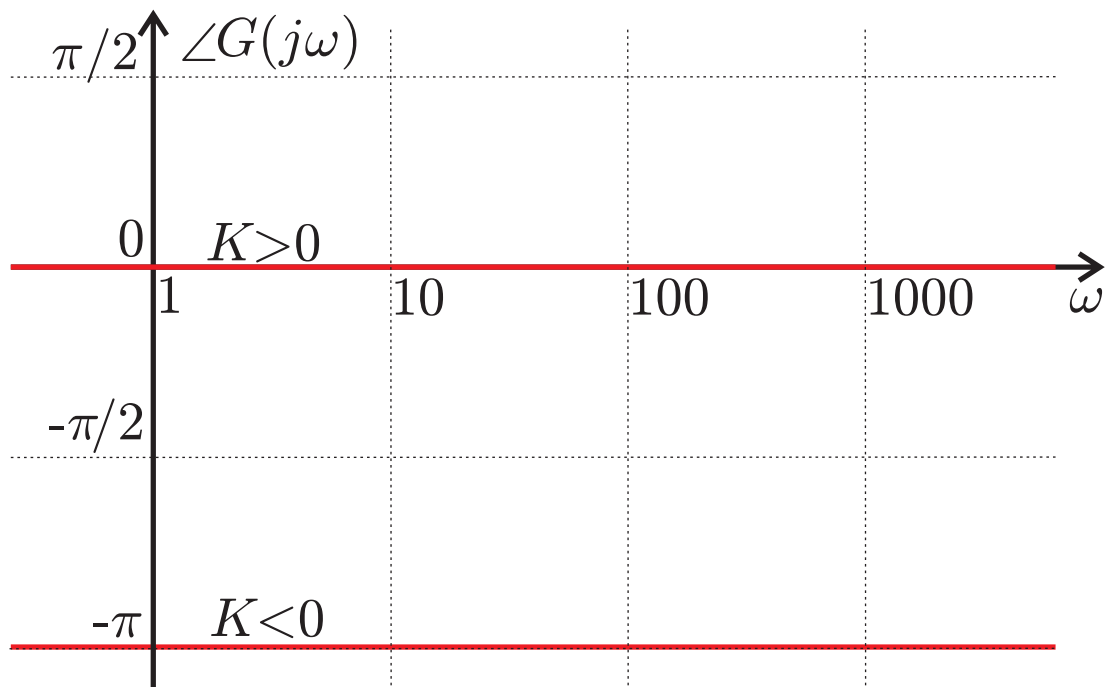
$$4. \angle(1 + j\omega T) + \angle(1 + j\omega \bar{T}), T \in \mathbb{C}, \text{ cioè}$$

$$\angle \left(1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)$$

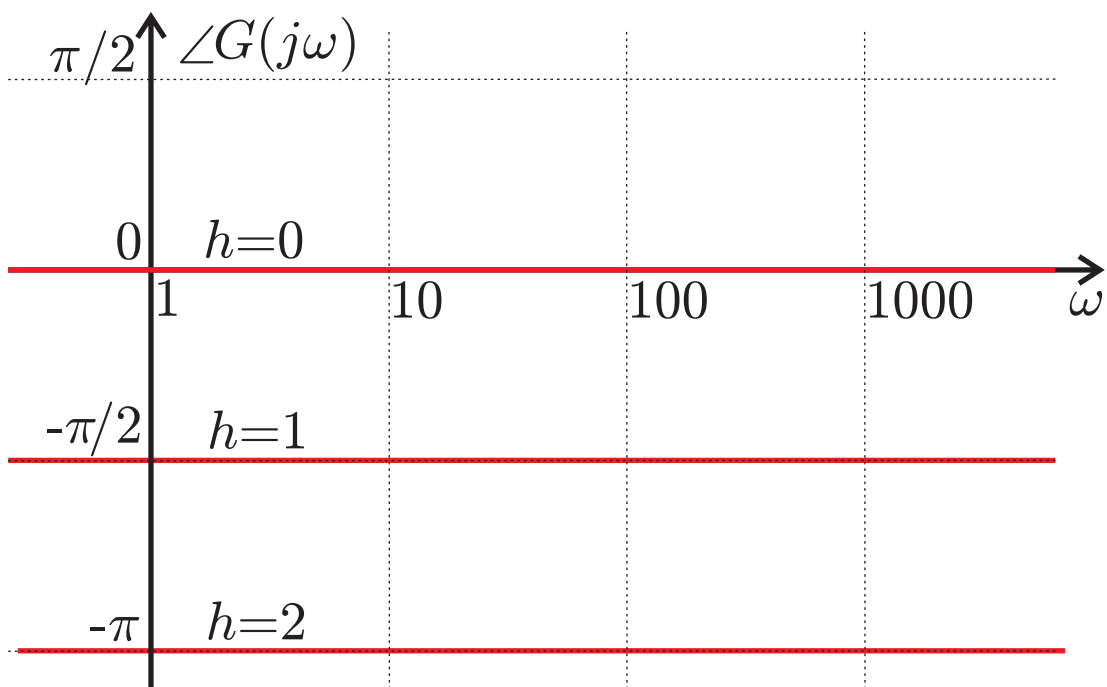
^a $\angle(\rho e^{j\theta}) = \theta, \angle(\alpha\beta) = \angle(\rho_\alpha e^{j\theta_\alpha} \rho_\beta e^{j\theta_\beta}) = \angle(\rho_\alpha \rho_\beta e^{j(\theta_\alpha + \theta_\beta)}) = \theta_\alpha + \theta_\beta = \angle\alpha + \angle\beta, \angle\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \angle\alpha - \angle\beta$

9.1 Diagrammi di Bode

- Caso 1: $\angle K$

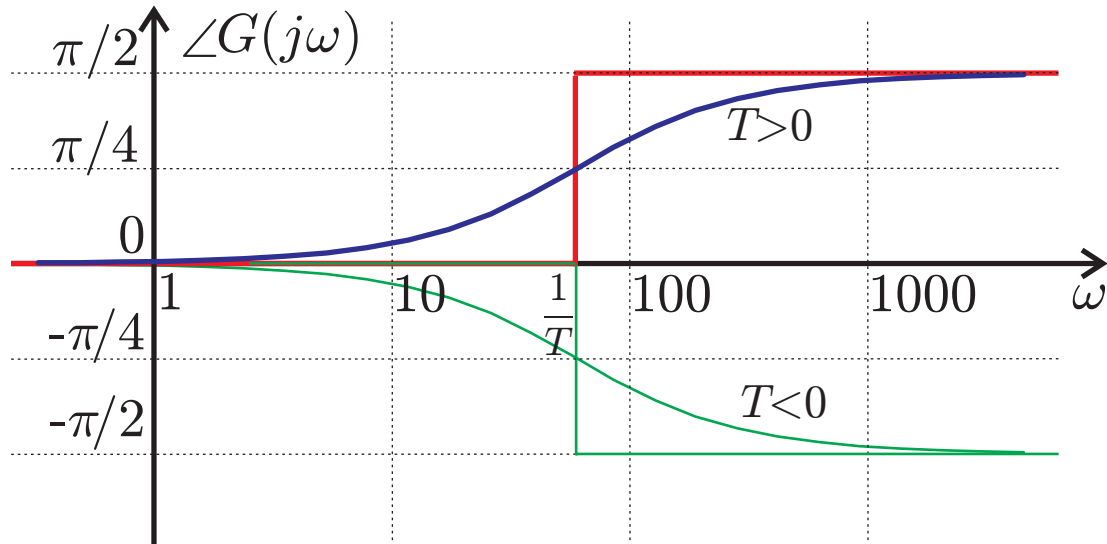


- Caso 2: $-\angle(j\omega)^h$



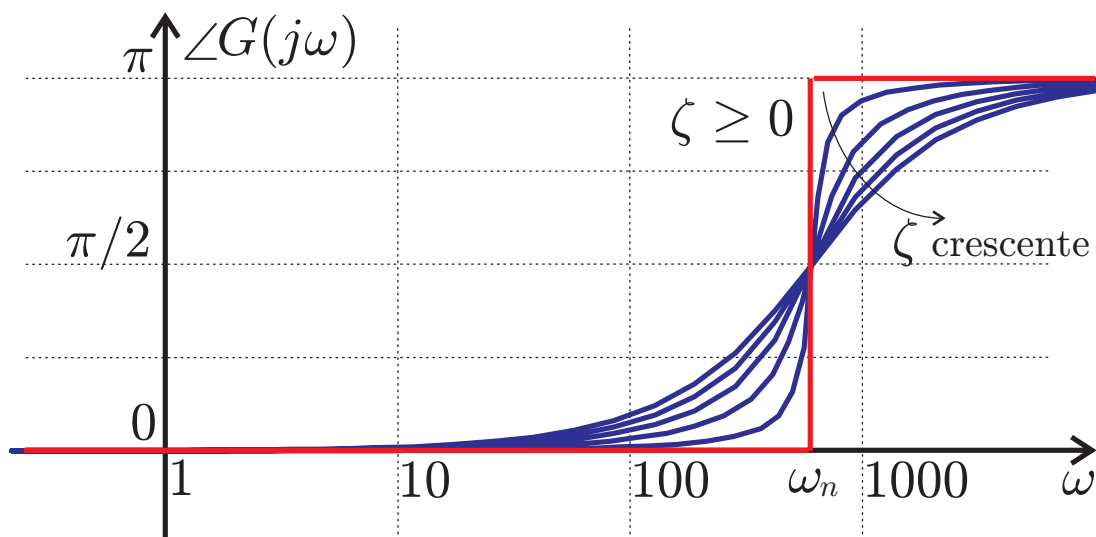
9.1 Diagrammi di Bode

- **Caso 3:** $\angle(1 + j\omega T) = \text{atan}(\omega T)$



Nota: $\angle G(j\omega) \approx 0$ per $\omega \ll \frac{1}{T}$, $\angle G(j\omega) \approx \frac{\pi}{2}$ per $\omega \gg \frac{1}{T}$, $T > 0$.

- **Caso 4:** $\angle \left(1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)$

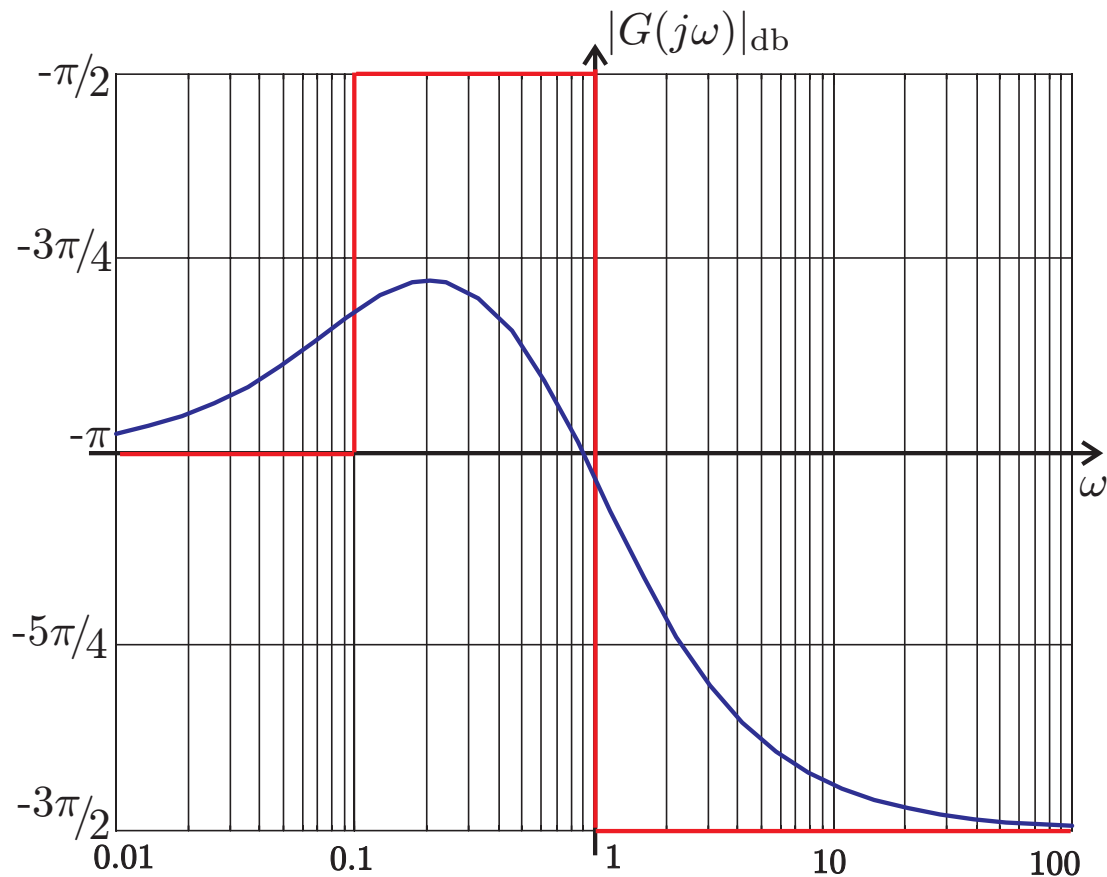


Nota: $\angle G(j\omega) \approx 0$ per $\omega \ll \omega_n$. Per $\zeta \geq 0$, $\angle G(j\omega) = \frac{\pi}{2}$ per $\omega = \omega_n$, $\angle G(j\omega) \approx \angle \left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) = \pi$ per $\omega \gg \omega_n$.

9.1 Diagrammi di Bode

Segue esempio:

$$G(s) = \frac{1000(1 + 10s)}{s^2(1 + s)^2}$$

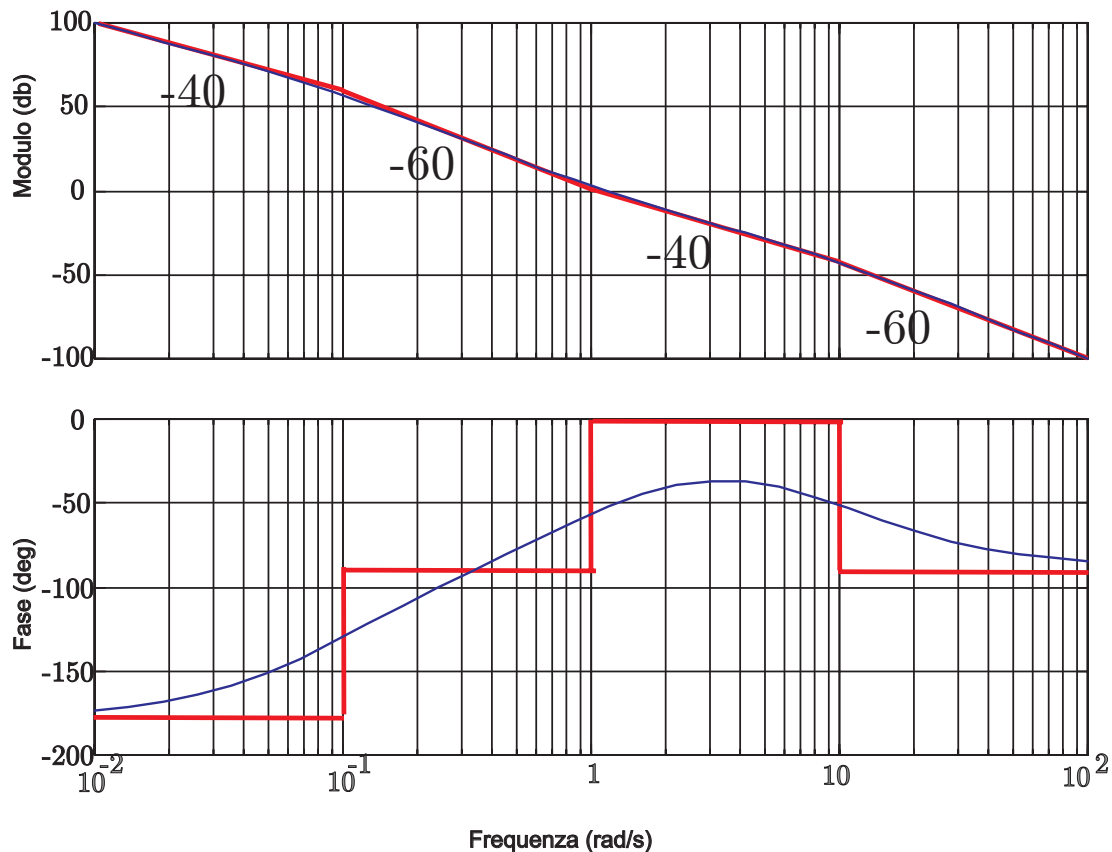


- Per $\omega \ll 0.1$: $\angle G(j\omega) \approx -\pi$
- Per $0.1 < \omega < 1$: effetto dello zero in $s = -0.1$, aggiungi $\frac{\pi}{2}$.
- Per $\omega > 1$: effetto del doppio polo in $s = -1$, toglie $2\frac{\pi}{2}$.

9.1 Diagrammi di Bode

Esempio:

$$G(s) = \frac{10(1 + s)}{s^2(1 - 10s)(1 + 0.1s)}$$



- Per $\omega \ll 0.1$: $|G(j\omega)| \approx \frac{10}{\omega^2}$ (pendenza -40 db/decade), $\angle G(j\omega) \approx -\pi$
- Per $\omega = 0.1$: $20 \log_{10} \frac{10}{\omega^2} = 60$ db
- Per $0.1 < \omega < 1$: effetto del polo instabile in $s = 0.1$, toglie 20 db/decade al modulo, aggiungi $\frac{\pi}{2}$ alla fase.
- Per $1 < \omega < 10$: effetto dello zero $s = -1$, aggiungi 20 db/decade al modulo, aggiungi $\frac{\pi}{2}$ alla fase.
- Per $\omega > 10$: effetto del polo in $s = -10$, toglie 20 db/decade al modulo, toglie $\frac{\pi}{2}$ alla fase.

9.1 Diagrammi di Bode

Riassumendo: L'effetto di poli/zeri (semplici) nel diagramma asintotico è il seguente:

	Modulo	Fase
polo stabile ($T > 0$)	-20 db/dec	$-\frac{\pi}{2}$
polo instabile ($T < 0$)	-20 db/dec	$\frac{\pi}{2}$
zero stabile ($T > 0$)	+20 db/dec	$\frac{\pi}{2}$
zero instabile ($T < 0$)	+20 db/dec	$-\frac{\pi}{2}$