4. Linearità e Linearizzazione

4 Linearità e Linearizzazione

Principio di sovrapposizione degli effetti

- Considera il sistema lineare tempo-discreto, tempo-invariante:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

- La soluzione esiste ed è unica:

$$y(k, x_0, u) = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^i Bu(k-1-i)$$

- Indichiamo con $y(k, x_0, u)$ la risposta dell'uscita $y(k)$ per sottolineare l'*effetto* dello stato iniziale x_0 + ingresso $u(0),\ u(1),\ \ldots,\ u(k)$.

- *Principio di sovrapposizione degli effetti* :

$$y(k, \alpha x_0 + \beta x_1, \alpha u + \beta u_1) = \alpha y(k, x_0, u) + \beta y(k, x_1, u_1)$$

l'uscita complessiva è data dalla sovrapposizione delle uscite dovute agli effetti di (x_0, u) e di (x_1, u_1).

- Vale anche per sistemi lineari tempo-continui

- Vale anche se il sistema è lineare tempo-variante

- **Non** vale se il sistema è non lineare.

- Dimostrazione:

$$
\begin{aligned}
& y(k, \alpha x_0 + \beta x_1, \alpha u + \beta u_1) = CA^k(\alpha x_0 + \beta x_1) + \\
& \quad \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} CA^i B(\alpha u(k-1-i) + \beta u_1(k-1-i)) \\
& = CA^k \alpha x_0 + CA^k \beta x_1 + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} CA^i B \alpha u(k-1-i) + \\
& \quad \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} CA^i B \beta u_1(k-1-i)) \\
& = \alpha(CA^k x_0 + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} CA^i Bu(k-1-i)) + \\
& \quad \beta(CA^k x_0 + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} CA^i Bu(k-1-i)) \\
& = \alpha y(k, x_0, u) + \beta y(k, x_1, u_1)
\end{aligned}
$$

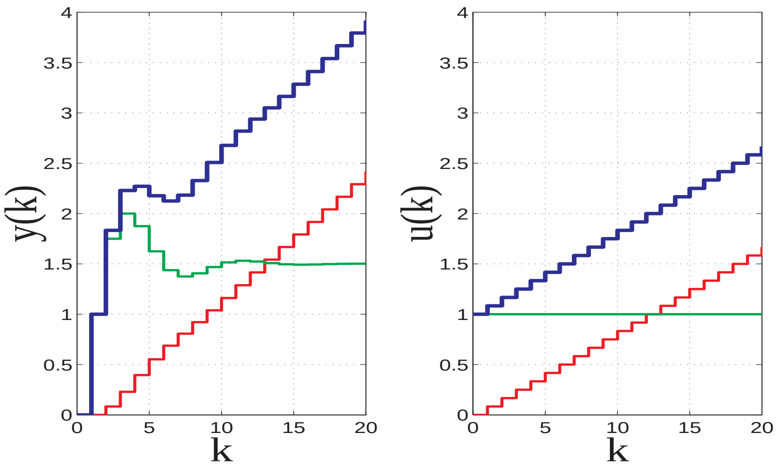
- Caso particolare: somma degli effetti ($\alpha = \beta = 1$)

$$
y(k, x_0 + x_1, u + u_1) = y(k, x_0, u) + y(k, x_1, u_1)
$$

- Caso particolare: moltiplicazione per costante ($\beta = 0$)

$$
y(k, \alpha x_0, \alpha u) = \alpha y(k, x_0, u)
$$

- **Esempio:** $x_0 = x_1 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $u(k) \equiv 1$, $u_1(k) = k/12$.



4 Linearità e Linearizzazione

Linearizzazione

- Considera il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- Sia (x_r, u_r) un equilibrio: $f(x_r, u_r) = 0$
- Obiettivo: studiare il sistema per piccole variazioni $\Delta u(t) \triangleq u(t) - u_r$ e $\Delta x(0) \triangleq x(0) - x_r$.
- L'evoluzione di $\Delta x(t) \triangleq x(t) - x_r$ è data da

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} x(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}_r = f(x(t), u(t)) \\ &= f(\Delta x(t) + x_r, \Delta u(t) + u_r) \\ &\approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_r, u_r)}_{A} \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(x_r, u_r)}_{B} \Delta u(t) \end{aligned}$$

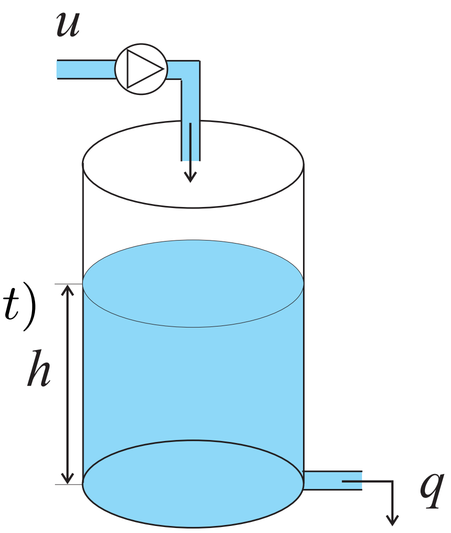
- In maniera simile,

$$\Delta y(t) \approx \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x_r, u_r)}_{C} \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u}(x_r, u_r)}_{D} \Delta u(t)$$

  dove $\Delta y(t) \triangleq y(t) - g(x_r, u_r)$ è la deviazione dell'uscita dall'equilibrio.

- Le variazioni $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, e $\Delta u(t)$ sono quindi governate (in prima approssimazione) dal sistema *linearizzato* (A, B, C, D) .
- Per sistemi non lineari a tempo-discreto, vale un ragionamento analogo.

Esempio: Serbatoio



- Modello tempo continuo:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}h(t) &= -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)}+\frac{1}{A}u(t) \\ q(t) &= a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \end{cases}$$
$$h(0)=h_0$$

- Equilibrio per ingresso costante $u(t)\equiv u_r$, $t\geq 0$:

$$\dot{h}_r=0=-\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h_r}+\frac{1}{A}u_r \Rightarrow h_r=\frac{1}{2g}\left(\frac{u_r}{a}\right)^2$$

- Sistema linearizzato:

$$\begin{aligned} A &\triangleq \frac{\partial}{\partial h}\left(-\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h}+\frac{1}{A}u\right)\Big|_{h_r,u_r} = -\frac{a^2 g}{Au_r} \\ B &\triangleq \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h}+\frac{1}{A}u\right)\Big|_{h_r,u_r} = \frac{1}{A} \\ C &\triangleq \frac{\partial}{\partial h}\left(a\sqrt{2g}\sqrt{h}\right)\Big|_{h_r,u_r} = \frac{a^2 g}{u_r} \\ D &\triangleq \frac{\partial}{\partial u}\left(a\sqrt{2g}\sqrt{h}\right)\Big|_{h_r,u_r} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta\dot{h}(t) &= -\frac{a^2 g}{Au_r}\Delta h(t)+\frac{1}{A}\Delta u(t) \\ \Delta q(t) &= \frac{a^2 g}{u_r}\Delta h(t) \end{cases}$$
$$\Delta h(0)=h_0-h_r$$

- Il sistema linearizzato permette di analizzare in maniera semplice (seppur approssimata) la dinamica di h, q per piccole variazioni della portata di ingresso $u(t)$ dalla portata nominale u_r e per piccole variazioni della cond. iniz. $h(0)$ dall'equilibrio h_r.

4 Linearità e Linearizzazione

5. Stabilità

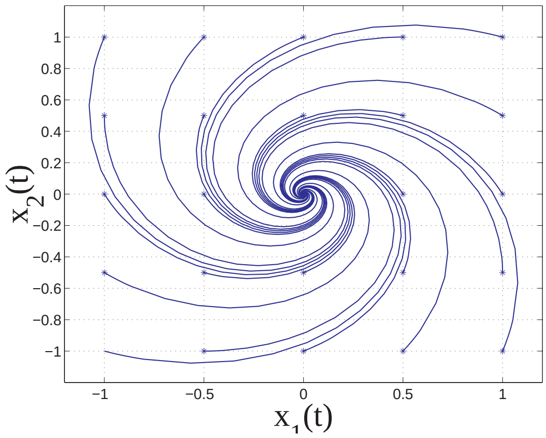
5 Stabilità

Concetto intuitivo di stabilità:

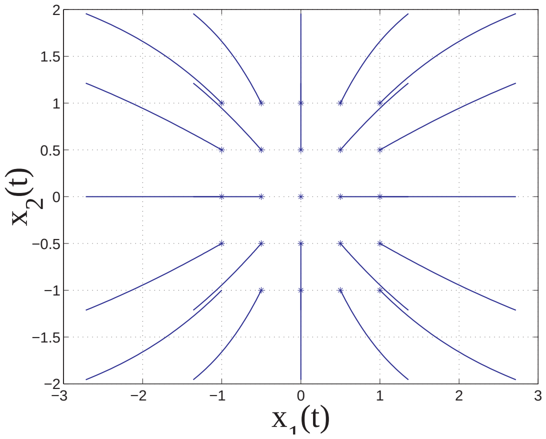
- Considera il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u_r) \\ y(t) & = & g(x(t), u_r) \end{cases}$$

- Sia x_r lo stato di equilibrio relativo a u_r: $f(x_r, u_r) = 0$
- Il punto di equilibrio x_r si dice *stabile* se per ogni condizione iniziale x_0 vicino a x_r la relativa traiettoria $x(t, x_0, u_r)$ rimane vicino a x_r per ogni $t \geq 0$.[a]
- Il punto di equilibrio x_r si dice inoltre *asintoticamente stabile* se è stabile e $x(t, x_0, u_r) \to x_r$ per $t \to \infty$
- Altrimenti, il punto di equilibrio x_r si dice *instabile*



(as.) stabile



instabile

[a] Def. analitica: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\|x_0 - x_r\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0, u_r) - x_r\| < \epsilon, \forall t \geq 0$.

5 Stabilità

Stabilità di traiettorie

- Sia $x(t, x_0, u_{[0,t)})$ una traiettoria generata dal sistema $\dot{x} = f(x, u)$ partendo da condizione iniziale $x(0) = x_0$ e applicando l'ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, t)$.
- Tale traiettoria si dice
  - *stabile* se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\|x_0 - x_1\| < \delta \Rightarrow$ $\|x(t, x_0, u_{[0,t)}) - x(t, x_1, u_{[0,t)})\| < \epsilon$, $\forall t \geq 0$.
    (comunque sia piccolo ϵ, per condizioni iniziali suff. vicine le due traiettorie non si discostano più di ϵ)
  - *asintoticamente stabile* se è stabile e se in aggiunta $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0, u_{[0,t)}) - x(t, x_1, u_{[0,t)})\| = 0$.
    (le due traiettorie asintoticamente coincidono)
  - *instabile* se $\exists \epsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0\ \exists x_1$ ed $\exists t \geq 0$ tali che $\|x_0 - x_1\| < \delta$ e $\|x(t, x_0, u_{[0,t)}) - x(t, x_1, u_{[0,t)})\| > \epsilon$.
    (comunque parta vicino a x_0, le due traiettorie si scosteranno sempre di una certa quantità fissata)
- Nota: l'*attrattività* (cioè $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0, u_{[0,t)}) - x(t, x_1, u_{[0,t)})\| = 0$) non implica la stabilità

5 Stabilità

Stabilità dei sistemi lineari (tempo-continuo):

- Considera il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & ax(t) + bu(t) \\ y(t) & = & cx(t) \end{cases}$$

- Equilibrio per $u(t) \equiv u_r$: $0 = ax_r + bu_r \Rightarrow x_r = -\frac{b}{a}u_r$ (Hp: $a \neq 0$).

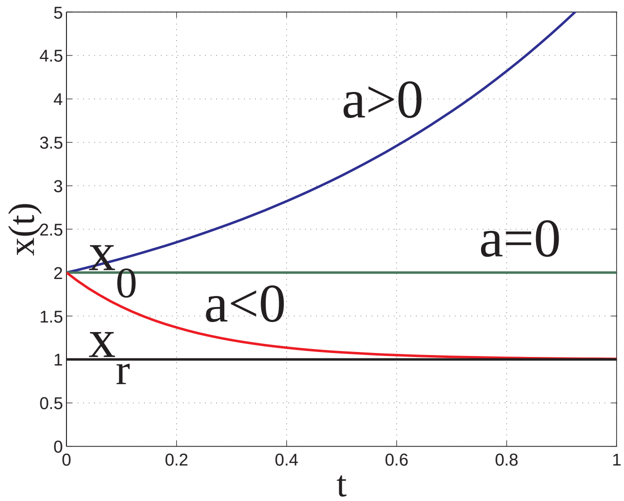
- Per $u(t) \equiv u_r$, $t \geq 0$, la quantità $z(t) = x(t) - x_r$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\dot{z}(t) = ax(t) + bu_r = ax(t) - ax_r = az(t)$$

- da cui:

$$z(t) = e^{at}z_0 \ \Rightarrow x(t) = x_r + e^{at}(x_0 - x_r)$$

- Pertanto:
  - x_r è instabile se $a > 0$
  - x_r è stabile se $a \leq 0$
  - x_r è asintoticamente stabile se $a < 0$



5 Stabilità

Stabilità dei sistemi lineari (tempo-discreto):

- Considera il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} x(k+1) & = & ax(k) + bu(k) \\ y(k) & = & cx(k) \end{cases}$$

- Equilibrio per $u(k) \equiv u_r$: $x_r = ax_r + bu_r \Rightarrow x_r = \frac{b}{1-a} u_r$ (Hp: $a \neq 1$).

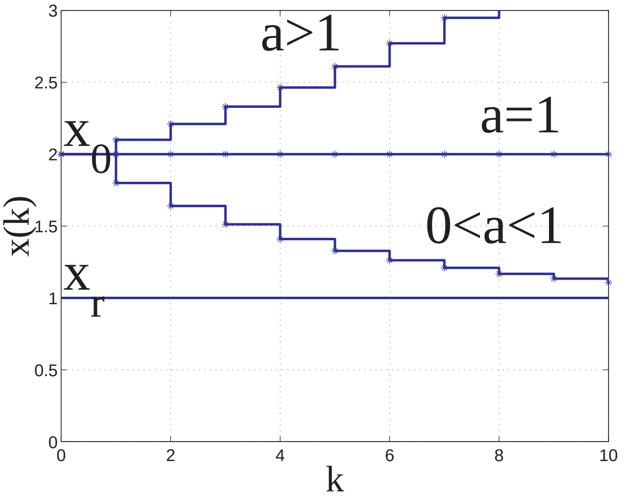
- Per $u(k) \equiv u_r$, $k = 0, 1, \ldots$, la quantità $z(k) = x(k) - x_r$ soddisfa l'equazione alle differenze

$$z(k+1) = ax(k) + bu_r - x_r = ax(k) + (1-a)x_r - x_r = az(k)$$

- da cui:

$$z(k) = a^k z_0 \ \Rightarrow x(k) = x_r + a^k (x_0 - x_r)$$

- Pertanto:
  - x_r è instabile se $|a| > 1$
  - x_r è stabile se $|a| \leq 1$
  - x_r è asintoticamente stabile se $|a| < 1$



Stabilità di sistemi lineari

- Per sistemi lineari $\dot{x} = Ax + Bu$:
  - la traiettoria nulla $x(t) \equiv 0$ per $u(t) \equiv 0$ è stabile (as. stabile, instabile) $\Leftrightarrow$ una qualsiasi traiettoria $x(t, x_0, u_{[0,t)})$ è stabile (as. stabile, instabile)

    Dimostrazione. Chiama $z(t) = x(t, x_1, u_{[0,t)}) - x(t, x_0, u_{[0,t)})$. Si ha $\dot{z}(t) = Az(t)$, $z(0) = x_1 - x_0$. Osserva che le definizioni di stabilità di $z(t) \equiv 0$ e di $x(t, x_0, u_{[0,t)})$ coincidono.

- Si parla pertanto di stabilità del sistema:
  - Un sistema lineare (A, B, C, D) si dice *stabile* se la risposta libera è limitata per ogni valore di $x(0)$.
  - Un sistema lineare (A, B, C, D) si dice *asintoticamente stabile* se la risposta libera tende a 0 per ogni valore di $x(0)$.
  - Un sistema lineare (A, B, C, D) si dice *instabile* se per almeno una condizione iniziale $x(0)$ la risposta libera è illimitata.

Relazione fra stabilità e autovalori di A (tempo continuo):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{At}x_0$$

Teorema

Sia $\dot{x}(t) = Ax(t)$ un sistema lineare tempo-invariante tempo-continuo di ordine n, e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $m \leq n$, gli autovalori di A. Il sistema è:

- *asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ la parte reale di $\lambda_i < 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$*
- *(marginalmente) stabile se (1) la parte reale di $\lambda_i \leq 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$, e (2) gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità algebrica uguale a quella geometrica*
- *Se esiste i tale che la parte reale di $\lambda_i > 0 \Rightarrow$ il sistema è instabile.*

È quindi la parte reale degli autovalori che determina la stabilità del sistema[a]

[a]Mentre per sistemi non lineari si parla solo di stabilità di traiettorie, nei sistemi lineari l'origine ($x(t) \equiv 0$, $\forall t \geq 0$) è (as/in)stabile $\Leftrightarrow$ una qualsiasi traiettoria è (as/in)stabile.

Dimostrazione (a grandi linee)

- La soluzione è $x(t) = e^{At}x_0$ (ricorda: la matrice esponenziale è definita come $e^{At} \triangleq I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots$)
- Se la matrice A è diagonalizzabile: $A = T^{-1}\Lambda T$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = T^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T$$

- Per autovalori complessi $\lambda = a + jb$:

$$|e^{\lambda t}| = e^{at}|e^{jbt}| = e^{at}$$

- Nota: se molteplicità algebrica = molteplicità geometrica, la matrice è diagonalizzabile
- Se la matrice non è diagonalizzabile, la si può scrivere in forma di Jordan. Nella risposta $x(t)$ compaiono termini del tipo $t^j e^{\lambda t}$, $j > 0$.

$\square$

5 Stabilità

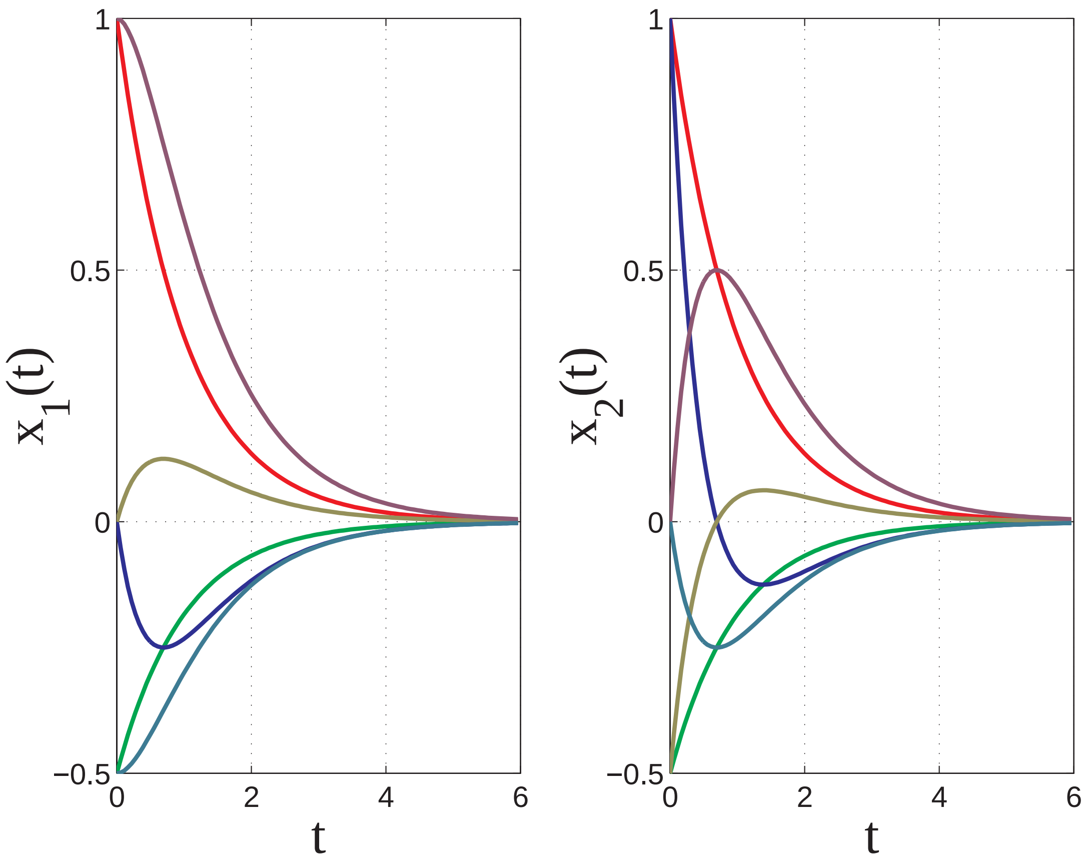
- **Esempio 1**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x(t) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{ Autovalori di } A\text{: } \{-1, -2\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(t) &= x_{10}(2e^{-t} - e^{-2t}) + x_{20}(-e^{-t} + e^{-2t}) \\ x_2(t) &= x_{10}(2e^{-t} - 2e^{-2t}) + x_{20}(-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{cases}$$

Asintoticamente stabile



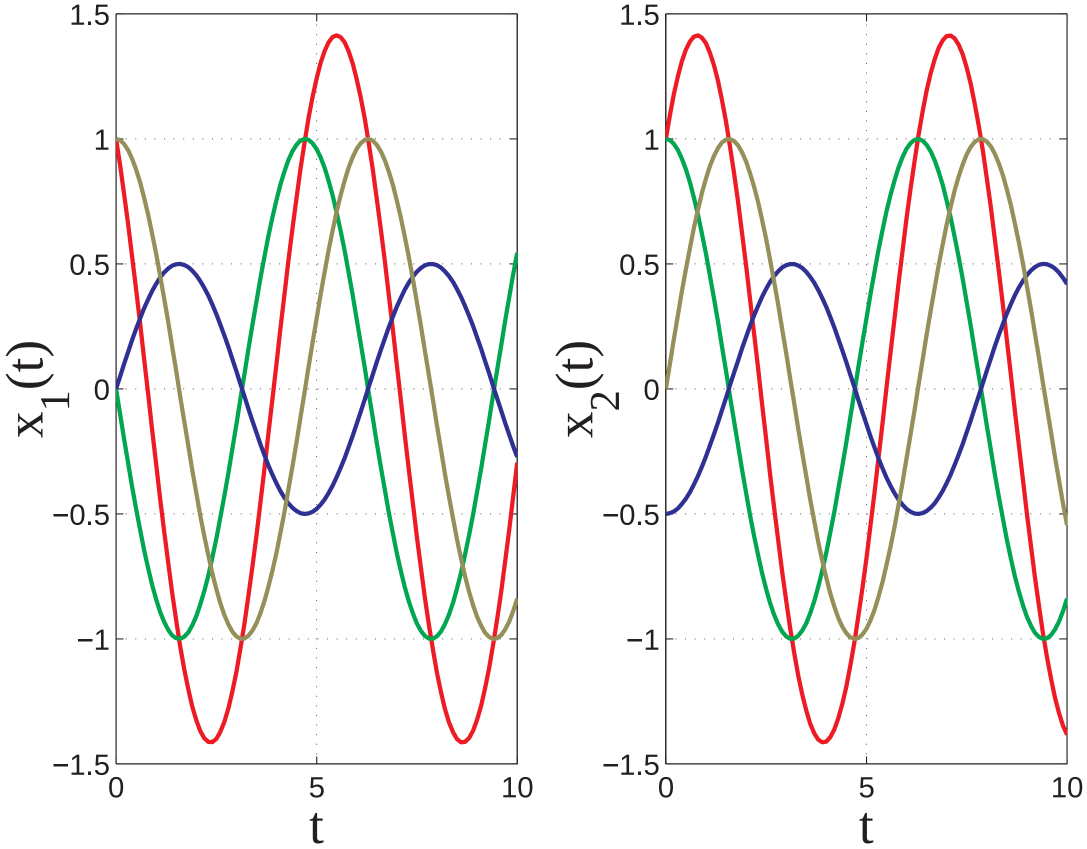
- **Esempio 2**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{+j, -j\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(t) &=& x_{10}\cos t - x_{20}\sin t \\ x_2(t) &=& x_{10}\sin t + x_{20}\cos t \end{cases}$$

Stabile



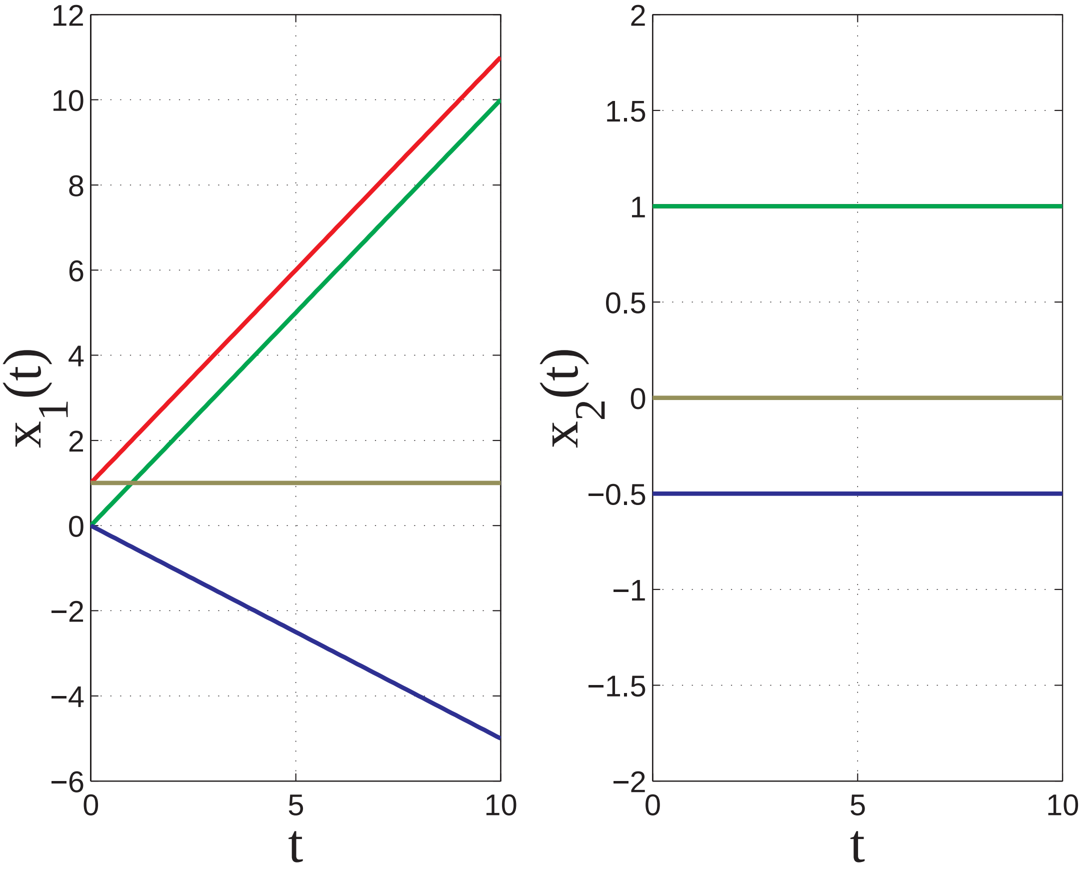
- **Esempio 3**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{ Autovalori di } A\text{: } \{0, 0\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(t) & = & x_{10} + x_{20}t \\ x_2(t) & = & x_{20} \end{cases}$$

Instabile



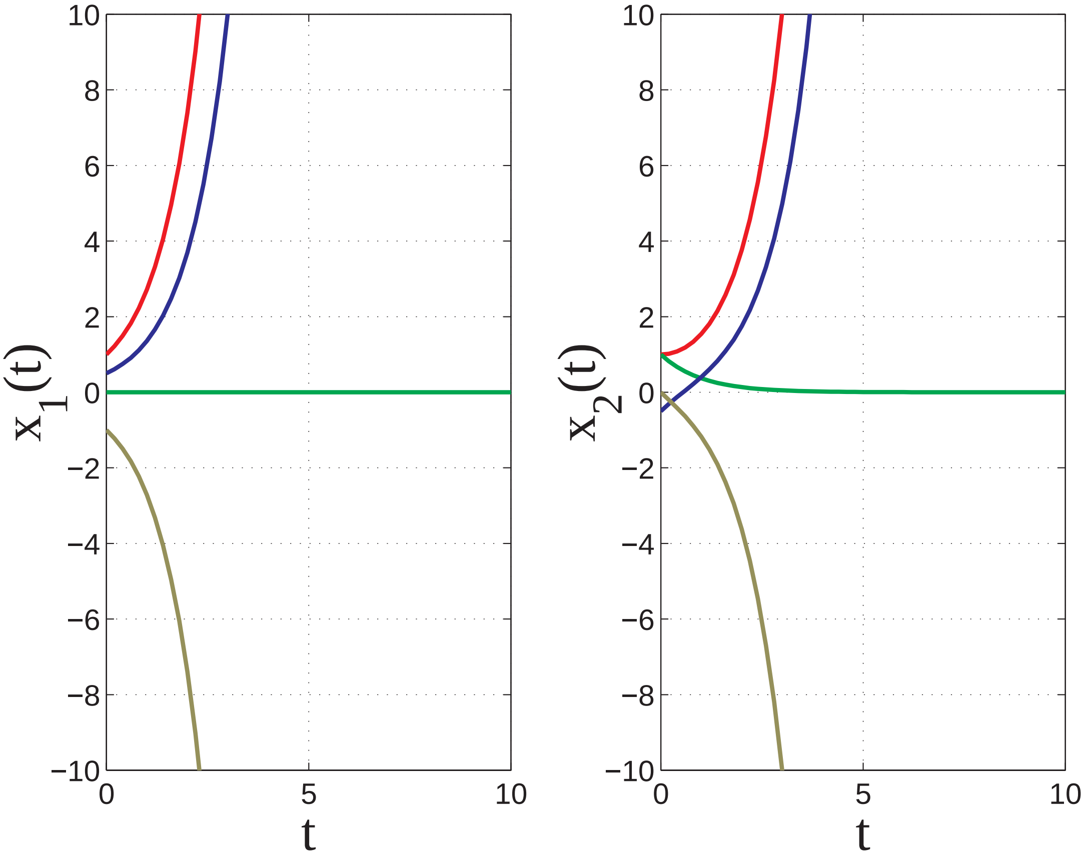
- **Esempio 4**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{-1, 1\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(t) &= x_{10}e^t \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}x_{10}e^t + (x_{20} - \frac{1}{2}x_{10})e^{-t} \end{cases}$$

Instabile



Relazione fra stabilità e autovalori di A (tempo discreto):

$$\begin{cases} x(k+1) & = & Ax(k) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases} \Rightarrow x(k) = A^k x_0$$

Teorema

Sia $x(k+1) = Ax(k)$ un sistema lineare tempo-invariante tempo-discreto di ordine n, e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $m \leq n$, gli autovalori di A. Il sistema è:

- *asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ il modulo di $\lambda_i < 1$, $\forall i = 1, \ldots, m$*
- *(marginalmente) stabile se (1) il modulo di $\lambda_i \leq 1$, $\forall i = 1, \ldots, m$, e (2) gli autovalori con modulo unitario hanno molteplicità algebrica uguale a quella geometrica*
- *Se esiste i tale che il modulo di $\lambda_i > 1 \Rightarrow$ il sistema è instabile.*

Quindi: a tempo continuo la parte reale degli autovalori determina la stabilità del sistema, a tempo discreto è invece il modulo degli autovalori a determinare la stabilità

Dimostrazione (a grandi linee)

- La soluzione è $x(k) = A^k x_0$
- Se la matrice A è diagonalizzabile: $A = T^{-1}\Lambda T$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = T^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} T$$

- Per autovalori complessi $\lambda = \rho e^{j\theta}$:

$$|\lambda^k| = |\rho^k e^{jk\theta}| = \rho^k |e^{jk\theta}| = \rho^k$$

- Nota: se molteplicità algebrica = molteplicità geometrica, la matrice è diagonalizzabile
- Se la matrice non è diagonalizzabile, la si può scrivere in forma di Jordan. Nella risposta $x(k)$ compaiono termini del tipo $k^j \lambda^k$, $j > 0$.

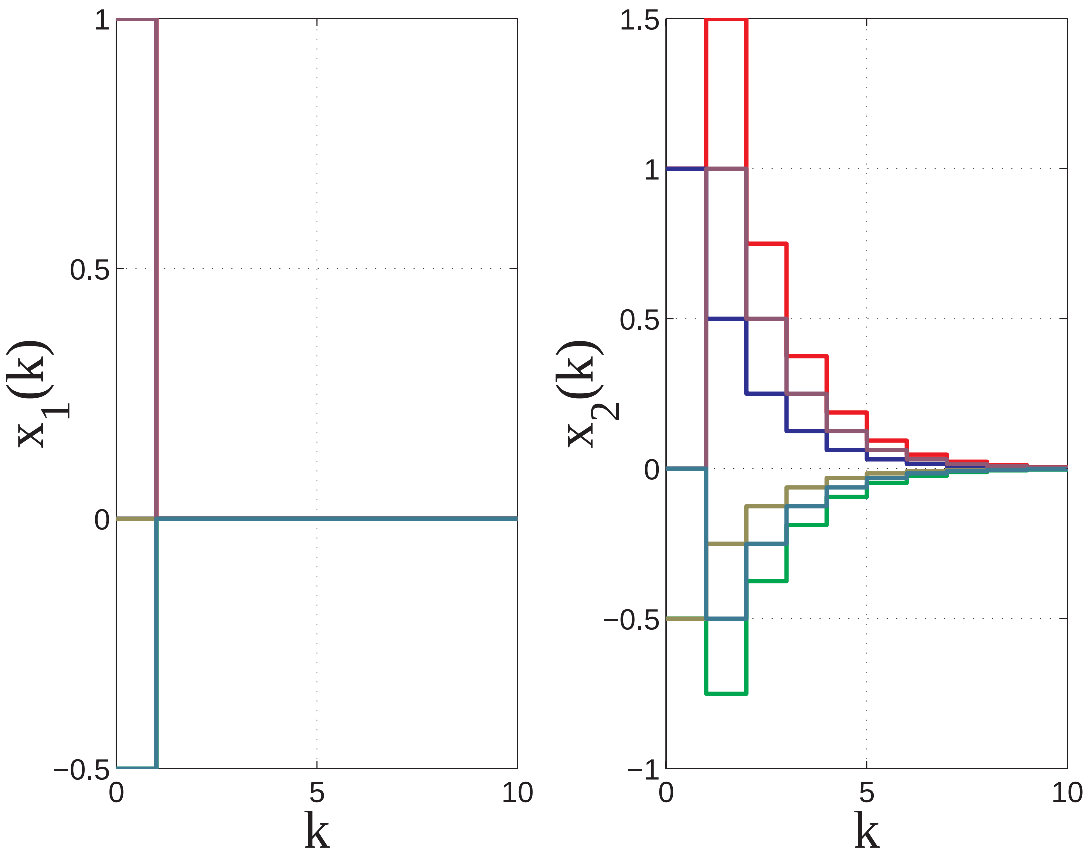
- **Esempio 1**

$$\left\{\begin{array}{l} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(k) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{array}\right. \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{0, \frac{1}{2}\}$$

soluzione:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(k) & = & 0,\ k = 1, 2, \ldots \\ x_2(k) & = & \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} x_{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^k x_{20},\ k = 1, 2, \ldots \end{array}\right.$$

Asintoticamente stabile



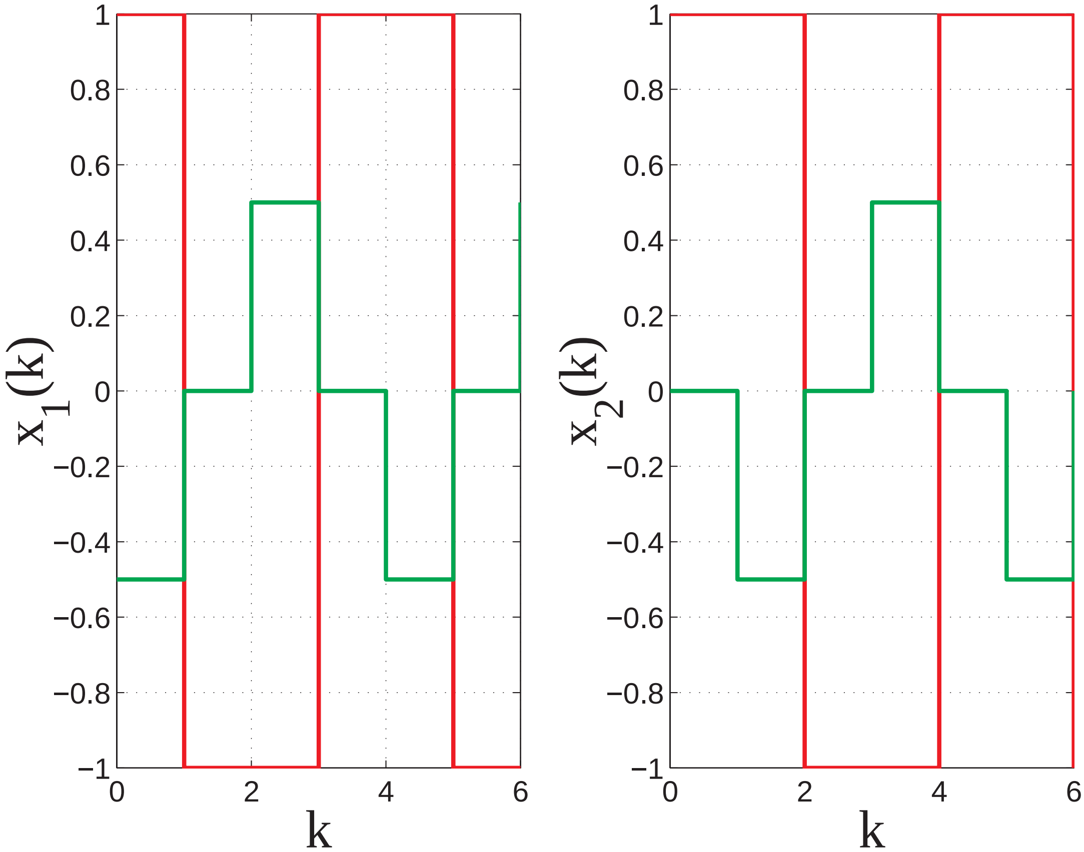
- **Esempio 2**

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{+j, -j\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(k) & = & x_{10} \cos \frac{k\pi}{2} + x_{20} \sin \frac{k\pi}{2}, \ k = 0, 1, \ldots \\ x_2(k) & = & x_{10} \sin \frac{k\pi}{2} + x_{20} \cos \frac{k\pi}{2}, \ k = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

Stabile



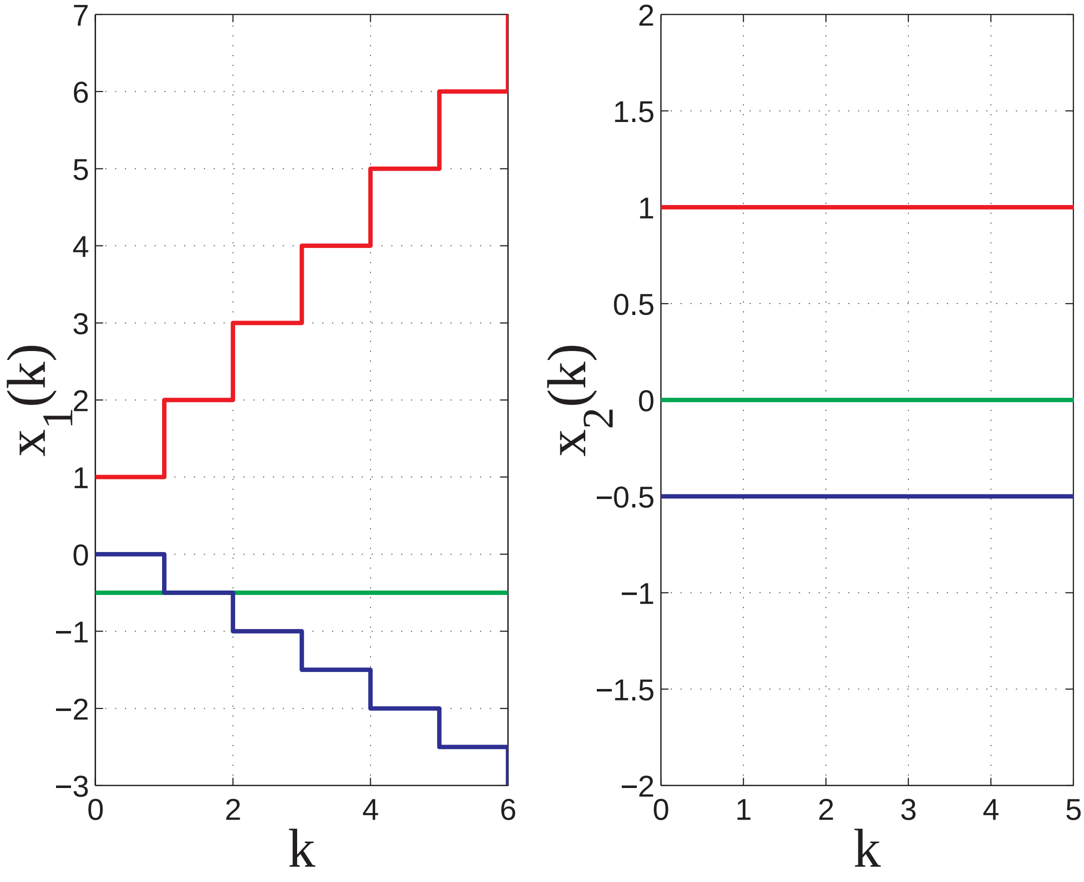
- **Esempio 3**

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{ Autovalori di } A\text{: } \{1, 1\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(k) & = & x_{10} + x_{20}k, \ k = 0, 1, \dots \\ x_2(k) & = & x_{20}, \ k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Instabile



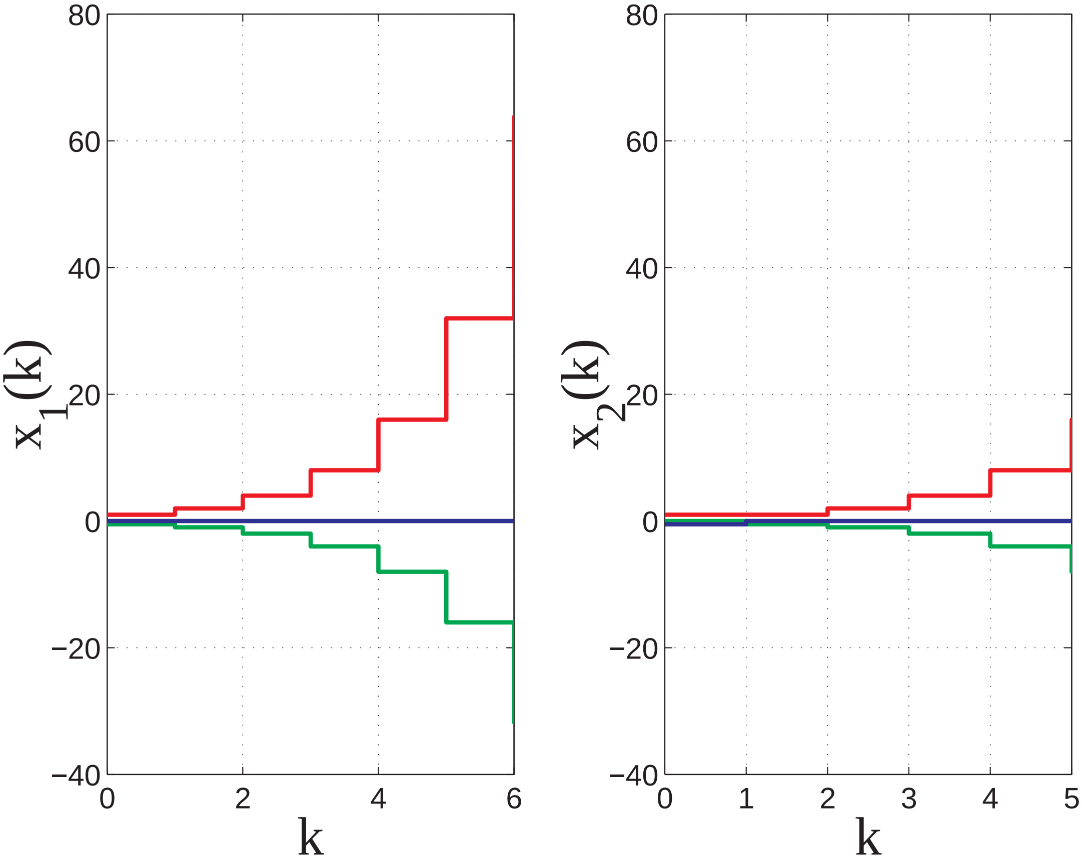
- **Esempio 4**

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\ x(0) = \left[\begin{smallmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{smallmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow \text{Autovalori di } A\text{: } \{0, 2\}$$

soluzione:

$$\begin{cases} x_1(k) = 2^k x_{10}, \; k = 0, 1, \ldots \\ x_2(k) = 2^{k-1} x_{10}, \; k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Instabile



5 Stabilità

Ricapitolando:

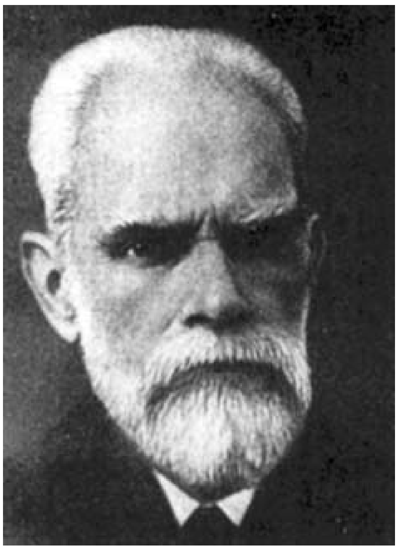
sistema	tempo continuo	(tempo discreto)
as. stabile	$Re(\lambda_i) < 0\ \forall i = 1, \ldots, n$	$(\lvert\lambda_i\rvert < 1)$
instabile	$\exists i$ tale che $Re(\lambda_i) > 0$	$(\lvert\lambda_i\rvert > 1)$
stabile	1) $\forall i, \ldots, n$, $Re(\lambda_i) \leq 0$	$(\lvert\lambda_i\rvert \leq 1)$
	2) $\forall \lambda_i$ tale che $Re(\lambda_i) = 0$	$(\lvert\lambda_i\rvert = 1)$
	molt(alg.)=molt(geom.)	

5.1 Stabilità - Criteri per Sistemi Non Lineari

Considera il sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$, con f derivabile, e sia $x = 0$ un punto di equilibrio ($f(0) = 0$).

Metodo indiretto di Lyapunov . Considera il sistema linearizzato $\dot{x} = Ax$, con $A = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0}$.

- Se $\dot{x} = Ax$ è asintoticamente stabile, allora l'origine $x = 0$ è asintoticamente stabile per il sistema non lineare (localmente).
- Se $\dot{x} = Ax$ è instabile, allora l'origine $x = 0$ è instabile per il sistema non lineare.
- Se A è marginalmente stabile, allora nulla si può dire sulla stabilità dell'origine per il sistema non lineare.

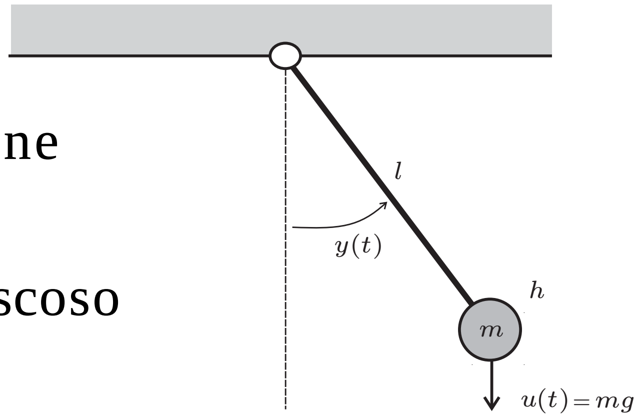


Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

(1857-1918)

5.1 Stabilità - Criteri per Sistemi Non Lineari

Esempio: Pendolo



$y(t) \triangleq$ angolo di deflessione
$u(t) \triangleq mg$ forza peso
$h\dot{y}(t) \triangleq$ forza di attrito viscoso

Modello matematico:

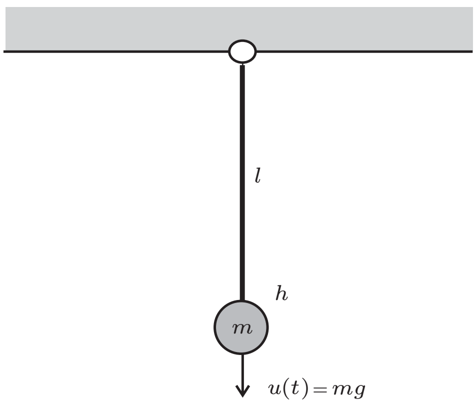
$$ml^2\ddot{y}(t) = -lmg\sin y(t) - h\dot{y}(t)$$

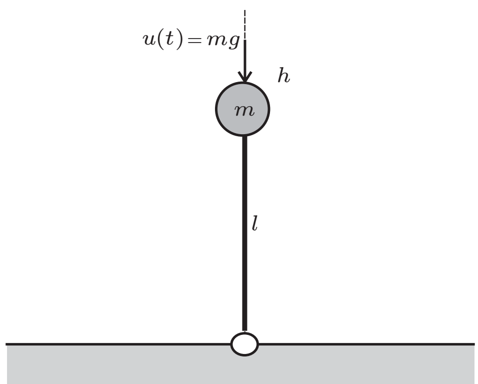
Equazione in forma di stato: ($x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - Hx_2, \qquad H \triangleq \frac{h}{ml^2} \end{cases}$$

Equilibrio:

$$\begin{bmatrix} x_{2r} \\ -\frac{g}{l}\sin x_{1r} - Hx_{2r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{2r} = 0 \\ x_{1r} = \pm k\pi,\ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$





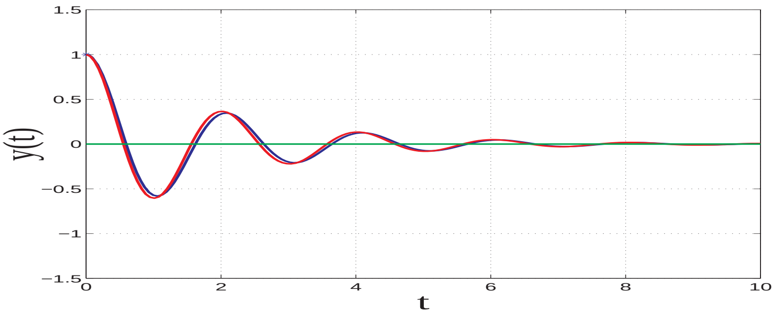
$x_{2r} = 0, x_{1r} = 0, \pm 2\pi, \ldots$ $\qquad$ $x_{2r} = 0, x_{1r} = 0, \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$

5.1 Stabilità - Criteri per Sistemi Non Lineari

- Sistema linearizzato ($x_{1r} = 0$, $x_{2r} = 0$)

$$\Delta\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -H \end{bmatrix}}_{A} \Delta x(t)$$

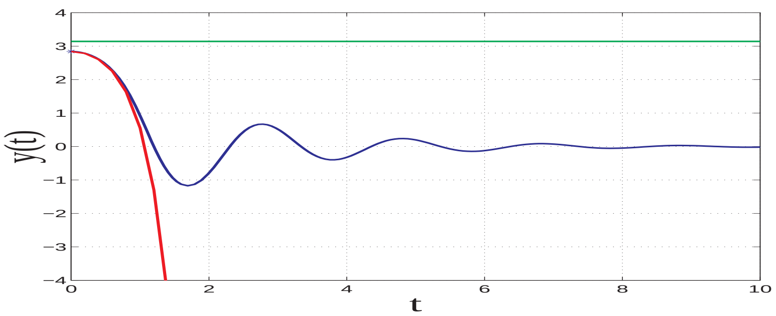
Autovalori di A: $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + H\lambda + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow$
$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(-H \pm \sqrt{H^2 - 4\frac{g}{l}}\right)$
Parte reale < 0: as. stabile



- Sistema linearizzato ($x_{1r} = \pi$, $x_{2r} = 0$)

$$\Delta\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -H \end{bmatrix}}_{A} \Delta x(t)$$

Autovalori di A: $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + H\lambda - \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow$
$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(-H \pm \sqrt{H^2 + 4\frac{g}{l}}\right)$
Parte reale > 0 e < 0: instabile



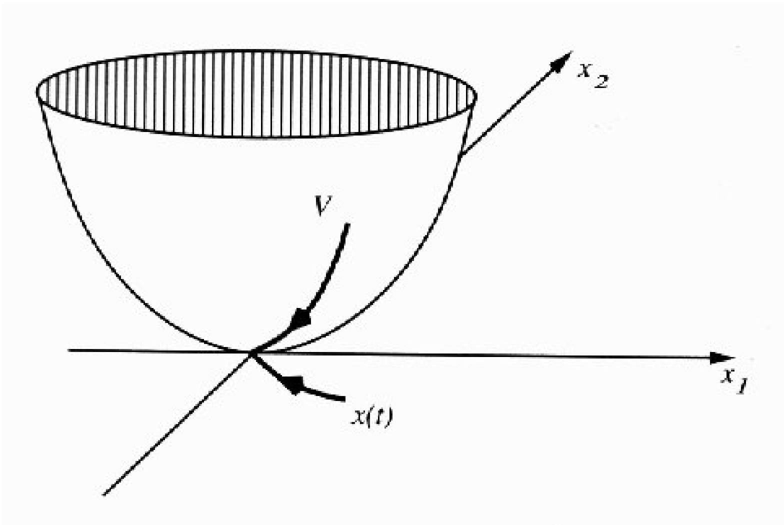
5.2 Stabilità - Criteri per Sistemi Non Lineari

Criterio diretto di Lyapunov

- Idea base: se l'energia di un sistema (anche non lineare) diminuisce nel tempo per dissipazione, il sistema asintoticamente deve fermarsi
- Considera ancora il sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$, con f derivabile, e sia $x = 0$ un punto di equilibrio ($f(0) = 0$).
- Alcune definizioni:
  - Una funzione $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ si dice *localmente definita positiva* se $V(0) = 0$ ed $\exists$ un intorno B dell'origine tale che $V(x) > 0\ \forall x \in B$, $x \neq 0$.
  - $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ si dice *globalmente definita positiva* se $B = \mathbb{R}^n$
  - $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ si dice *definita negativa* se $-V$ è definita positiva
  - $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ si dice *semidefinita positiva* se $V(x) \geq 0$ $\forall x \in B$, $x \neq 0$ (e analogamente *semidefinita negativa*)
- Esempi: per $x \in \mathbb{R}^2$, $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ è globalmente definita positiva, $V(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^3$ è localmente definita positiva, $V(x) = x_1^4 + \sin^2(x_2)$ è localmente definita positiva e globalmente semidefinita positiva.

5.2 Stabilità - Criteri per Sistemi Non Lineari

Metodo diretto di Lyapunov . Sia $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definita positiva in un intorno B dell'origine, $V \in C^1$. Se la funzione $\dot{V}(x) = \nabla V(x) f(x)$ è semidefinita negativa su B, allora l'origine $x = 0$ è stabile, se $\nabla V(x) f(x)$ è definita negativa su B, allora l'origine $x = 0$ è asintoticamente stabile.



Nota:

- $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ si dice una *funzione di Lyapunov* per il sistema $\dot{x} = f(x)$
- $\nabla V(x) f(x)$ è la derivata di $V(x(t))$ rispetto al tempo, essendo $\dot{V}(x) = \nabla V(x)\dot{x} = \nabla V(x) f(x)$

Riferimento: J.J.E. Slotine, W. Li, "Applied Nopnlinear Control", Prentice Hall, 1991

Criterio di Lyapunov applicato ai sistemi lineari

- Prendiamo $V(x) = x'Px$, con P matrice definita positiva
- $\dot{V}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x$
- Affinché $\dot{V}(x)$ sia definita negativa, occorre che

$$A'P + PA = -Q$$

  dove Q è una matrice definita positiva (es: $Q = I$).

- Assegnata $Q > 0$, l'equazione matriciale in P $A'P + PA = -Q$ viene detta equazione di Lyapunov (`LYAP.M` in Matlab)
- *Teorema*: il sistema lineare tempo-invariante $\dot{x} = Ax$ è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \forall Q > 0$ l'unica soluzione P all'equazione di Lyapunov $A'P + PA = -Q$ è definita positiva.

5.2 Stabilità - Criteri per Sistemi Non Lineari

Criteri di Lyapunov per sistemi a tempo discreto

- Il criterio diretto di Lyapunov vale anche per sistemi non lineari a tempo discreto $x(k+1) = f(x(k))$, considerando funzioni definite positive $V(x)$ e le differenze lungo le traiettorie $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$.

- Anche il criterio indiretto (=linearizzazione) di Lyapunov vale per sistemi non lineari a tempo discreto.

Riferimento: J.P. LaSalle, "The Stability and Control of Discrete Processes", series in Applied Mathematical Sciences, vol. 62, Springer-Verlag, 1986.

- Per sistemi lineari a tempo discreto: data $V(x) = x'Px$, con P definita positiva, $\Delta V(x) = (Ax)'P(Ax) - x'Px = x'(A'PA - P)x$. Affinché $\Delta V(x)$ sia definita negativa, occorre che

$$A'PA - P = -Q$$

- Assegnata $Q > 0$, l'equazione matriciale in P $A'PA - P = -Q$ viene detta equazione di Lyapunov discreta (`P=DLYAP(A',Q)` in Matlab)