Complementi di Controllo Digitale

Alberto Bemporad
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Università degli Studi di Siena

`bemporad@dii.unisi.it`

`http://www.dii.unisi.it/~bemporad`

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (VO)

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni (VO)

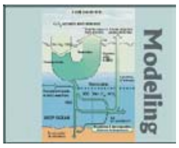
Anno accademico 2001/2002

Scopo del Corso

- La scienza consiste in gran parte nel descrivere mediante un *modello matematico* alcuni aspetti della realtà, catturandone i meccanismi di funzionamento fondamentali.
- La *teoria dei sistemi* è lo studio delle proprietà dei modelli matematici associati a *sistemi dinamici*, cioè a quei processi reali che evolvono nel tempo.

Il corso fornirà:

Gli strumenti matematici necessari per studiare le proprietà dei sistemi dinamici



Esempi di come ottenere modelli matematici per diversi tipi di processi fisici

Tecniche al calcolatore per l'analisi, la simulazione e il controllo di sistemi dinamici (Matlab)

Scopo del Corso

Obiettivo principale del corso:

Fornire le basi matematiche per affrontare problemi di *controllo* di sistemi dinamici

$\Rightarrow$ Corso di Controllo Digitale

Informazioni:

- Lezione: Lunedì 14-18, Giovedì 9-11, Venerdì 16-18
- Ricevimento: Venerdì 11-13 (appuntamento per e-mail)
- Compitino: a fine aprile
- Esercitazioni: Matlab / Simulink

Home page del corso:

`http://www.dii.unisi.it/~bemporad/teaching/tds`

`http://www.dii.unisi.it/~bemporad/teaching/controllodigitale`

Testi consigliati:

- Trasparenze del corso
- E. Fornasini e G. Marchesini, “Appunti di Teoria dei Sistemi” Ed. Libreria Progetto.
- Dispense Prof. Bicchi (Univ. di Pisa): `www.piaggio.ccii.unipi.it/~bicchi/tds.html`
- K.J. Astrom, B. Wittenmark, “Computer-Controlled Systems”, Prentice Hall International.
- G.F. Franklin, J.D. Powell, M. Workman, “Digital Control of Dynamic Systems”, 3rd edition, Addison-Wesley Longman.
- T. Kailath, “Linear Systems”, Prentice-Hall

Domande ??

1. Sistemi e Modelli

1 Sistemi e Modelli

Sistemi ed Esperimenti

- Un *sistema dinamico* è un oggetto o insieme di oggetti che evolvono nel tempo di cui vogliamo studiare le proprietà
- Esempio: il sistema solare, un impianto per la produzione della carta, un condensatore collegato ad una resistenza elettrica
- Proprietà a cui siamo interessati. Ad esempio: Quando avverrà la prossima eclisse ? Come devo manovrare le valvole dell' impianto per produrre carta di buona qualità ? Cosa succede se collego il condensatore alla resistenza ?

Prima possibilità: fare esperimenti !

1 Sistemi e Modelli

Perché **non** fare esperimenti:

- Troppo costoso
- Troppo pericoloso (es: centrale nucleare)
- Impossibile (il sistema ancora non è stato costruito)

Soluzione:

1. Fare un *modello matematico* del sistema, cioè descrivere i fenomeni essenziali che avvengono nel sistema mediante le leggi della fisica, biologia, economia, ecc.
2. *Analizzare* le equazioni del modello matematico e *simulare* il sistema risolvendo (manualmente o al computer) tali equazioni.

Risultato:

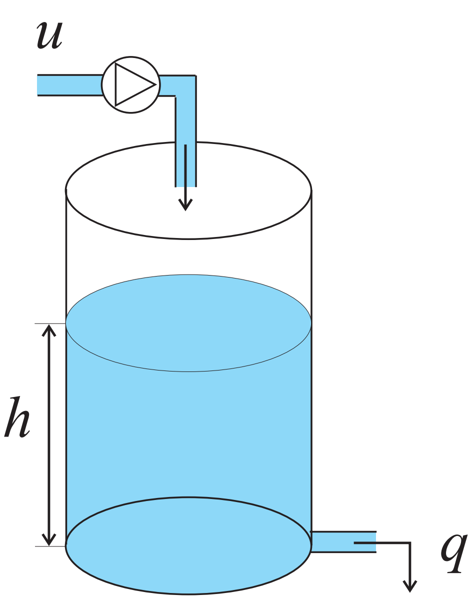
- La simulazione ha costo quasi nullo, ma ...
- ...l'utilità della simulazione dipende da quando il modello matematico è vicino al sistema fisico
- Fare un buon modello è un arte !

1 Sistemi e Modelli

Esempio: Serbatoio

Variabili:

altezza serbatoio	h	m
flusso d'ingresso	u	m^3/s
flusso d'uscita	q	m^3/s
velocità d'uscita	v	m/s



Parametri:

sezione serbatoio	A	m^2
sezione apertura	a	m^2
accelerazione di gravità	g	m/s^2

- Leggi della fisica:

$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ Legge di Torricelli

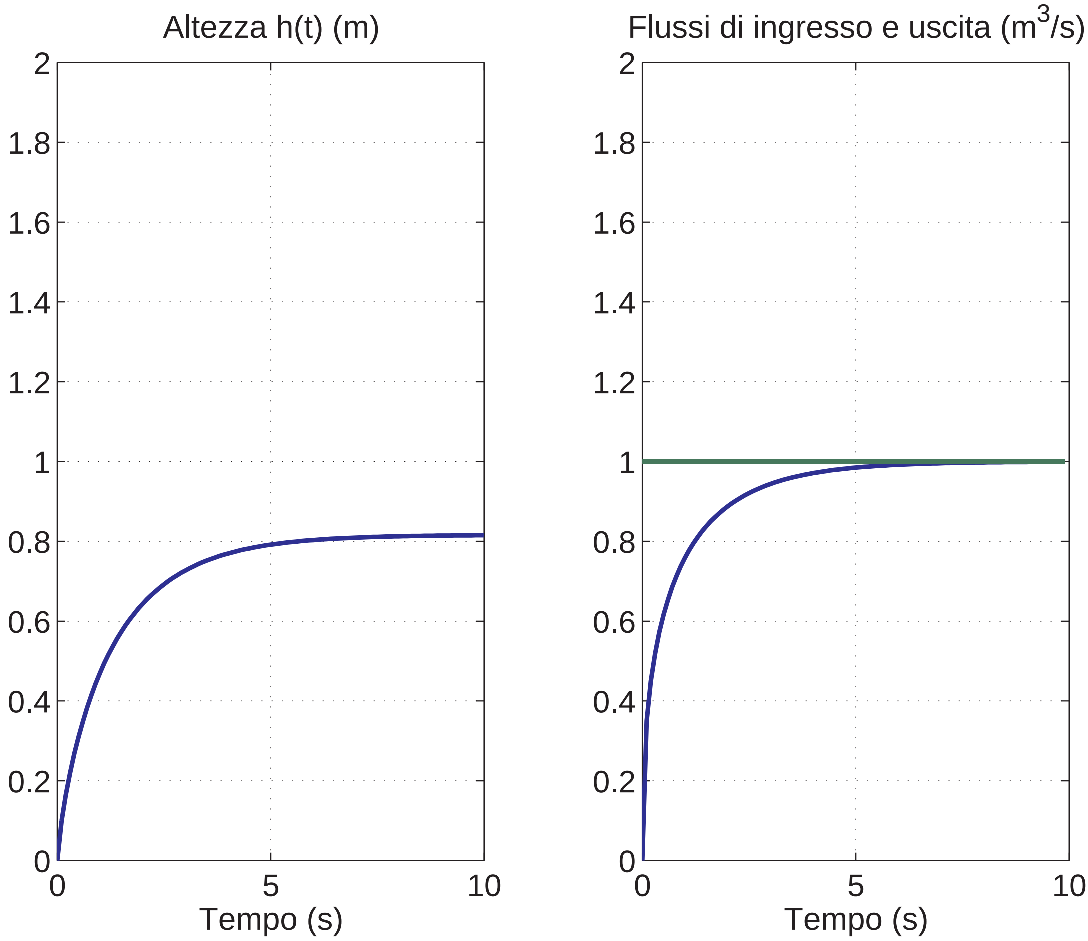
$q(t) = av(t)$ Flusso di uscita

$\frac{d}{dt}[Ah(t)] = u(t) - q(t)$ Bilancio di massa

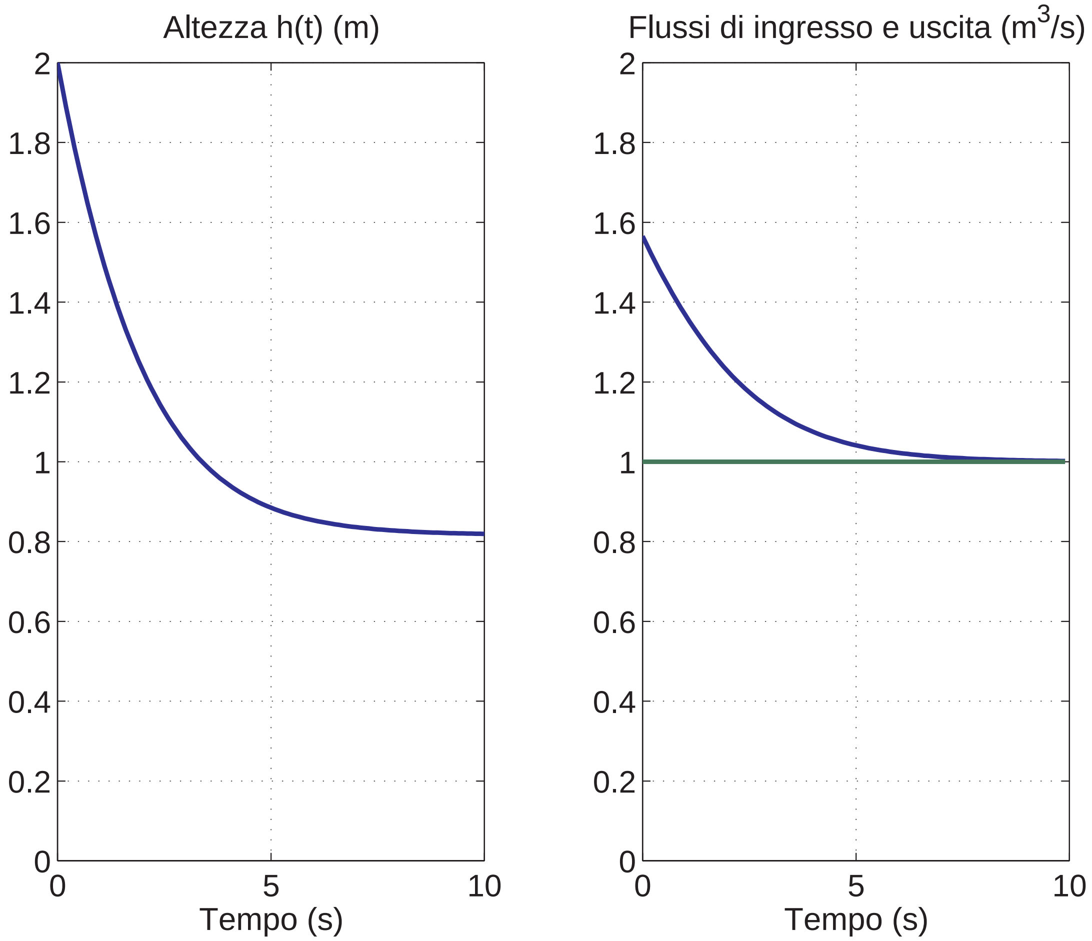
- Modello matematico del serbatoio:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}h(t) = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t) \\ q(t) = a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \end{cases}$$

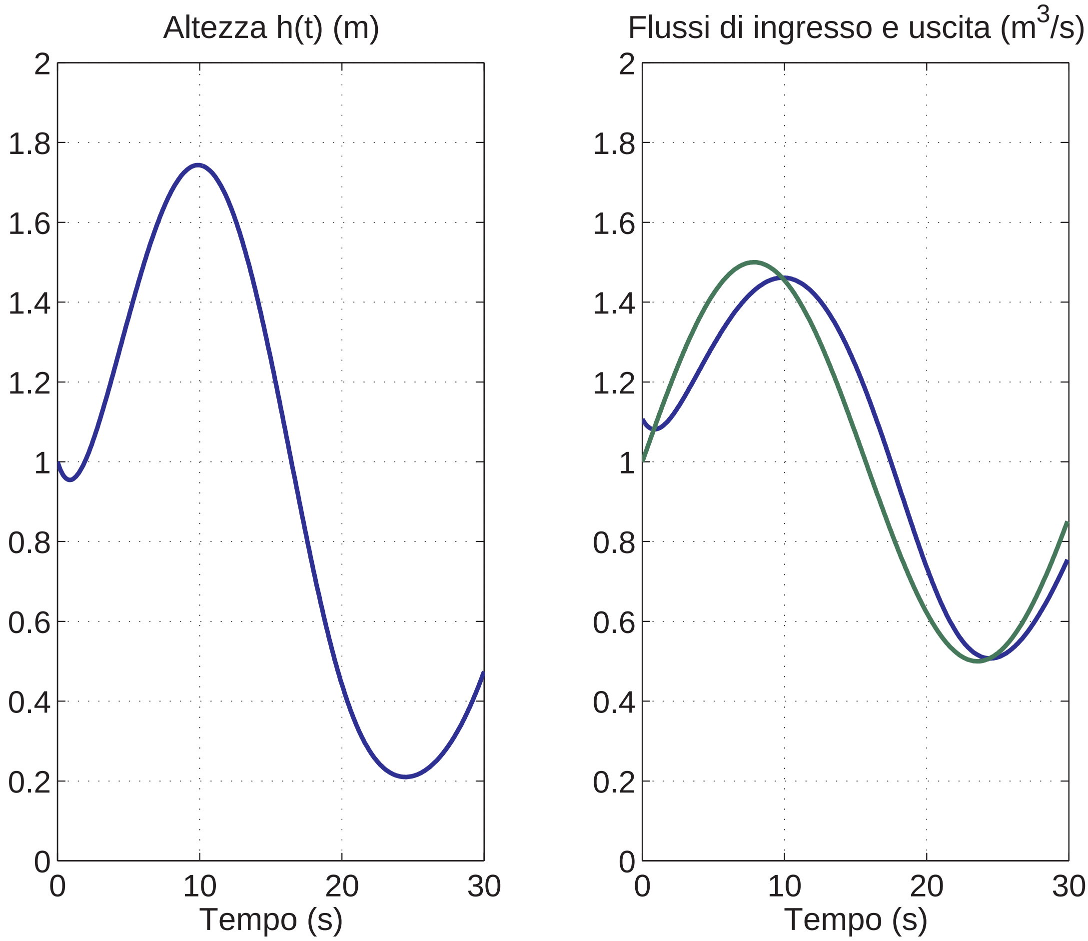
Simulazione per $A = 1 \text{ m}^2$, $a = 0.25 \text{ m}^2$, $h(0) = 0$ m, $u(t) \equiv 1 \text{ m}^3/\text{s}$



Simulazione per $A = 1$ m^2, $a = 0.25$ m^2, $h(0) = 2$ m, $u(t) \equiv 1$ m^3/s



Simulazione per $A = 1$ m^2, $a = 0.25$ m^2, $h(0) = 1$ m, $u(t) = 0.5\sin(t/5) + 1$ m^3/s



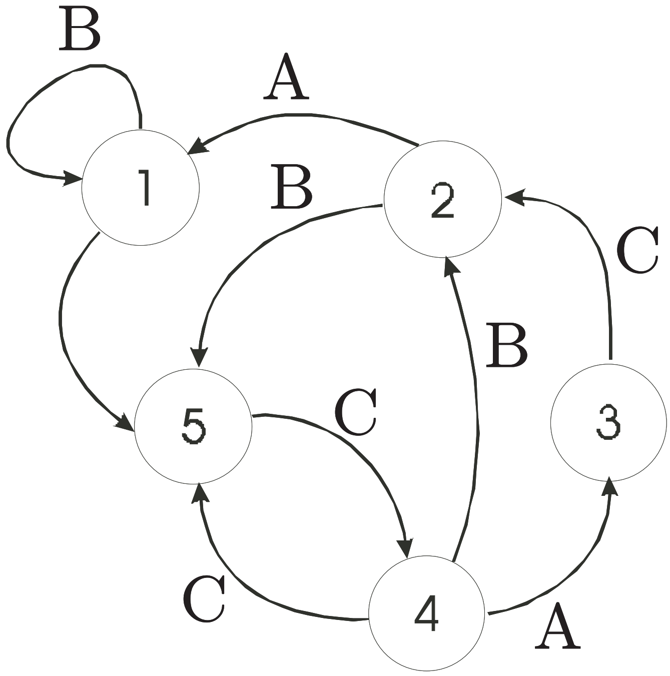
1 Sistemi e Modelli

Esempio: Calcolo degli interessi bancari

Se si deposita in banca un capitale iniziale di valore $x(0)$ e il tasso di interesse annuo è $\rho > 0$, la legge che esprime la crescita del capitale dall'anno k-esimo al successivo è semplicemente $x(k+1) = (1+\rho)x(k)$. Perché il capitale aumenti, deve essere $\rho > 0$.

Nota: mentre per descrivere la dinamica del serbatoio il tempo evolve con continuità ($t \in \mathbb{R}$), qui il tempo assume solo valori “discreti” ($k \in \mathbb{Z}$). In entrambe i casi, la grandezza di cui descriviamo la dinamica assume valori continui ($h, x \in \mathbb{R}$)

1 Sistemi e Modelli



I sistemi dinamici modellati da equazioni differenziali o alle differenze non sono gli unici: un altro caso sono ad esempio gli *automi* (o *macchine a stati finiti*) che descrivono relazioni tra grandezze a valori discreti (es: $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$), che evolvono all' accadere di determinati eventi (*sistemi ad eventi discreti*)

Esempio: Semaforo stradale, distributore di bevande, sistema di pagamento di pedaggio autostradale, vari sistemi di automazione industriale

Molto recentemente si sono studiati anche *sistemi ibridi* (*hybrid systems*), che contengono sia dinamiche continue che discrete. Esempio: powertrain di un automobile, motore a quattro tempi.

Modelli in forma *state-space* (spazio di stato)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t))) \\ y(t) & = & g(x(t), u(t)) \end{cases} \qquad \dot{x} \triangleq \frac{dx}{dt}$$

- $u(t)$ è l' *ingresso* del sistema (variabili esogene)
- $y(t)$ è l' *uscita* del sistema (variabili di interesse o misure)
- $x(t)$ è lo *stato* del sistema

$x(t_0)$ = tutta l'informazione necessaria al tempo t_0 per poter predire l'evoluzione futura dell'uscita $y(t)$ del sistema, $t \geq t_0$, per un dato ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$.

$\Rightarrow$ il concetto di stato è fondamentale per poter simulare i sistemi dinamici.

Esempio: modello matematico del serbatoio

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}h(t) & = & -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{A}u(t) \\ q(t) & = & a\sqrt{2g}\sqrt{h(t)} \end{cases}$$

$h(t)$=stato, $q(t)$=uscita, $u(t)$=ingresso.

(In generale, x, u, y sono vettori, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$).

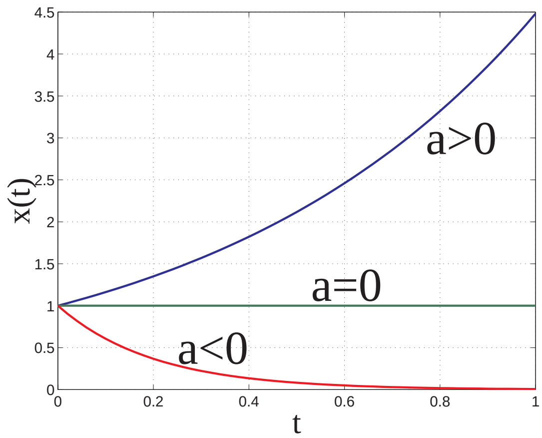
2. Sistemi Lineari a Tempo Continuo

2 Sistemi Lineari a Tempo Continuo

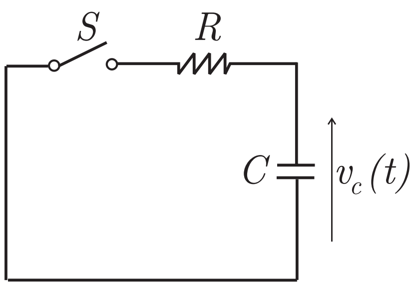
- Considera l'*equazione differenziale* del primo ordine

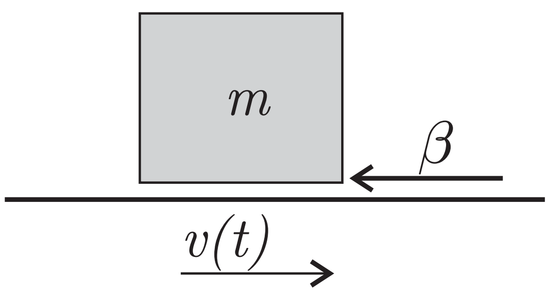
$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & ax(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases} \qquad\qquad \dot{x} \triangleq \frac{dx}{dt}$$

- Esiste una e una sola soluzione: $x(t) = e^{at}x_0$



- Esempi fisici:





$$v_c(t) + RC\dot{v}_c(t) = 0$$

$$v_c(t) = v_c(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$-\beta v(t) = m\dot{v}(t)$$

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

2 Sistemi Lineari a Tempo Continuo

- Considera l'*equazione differenziale* del primo ordine con ingresso

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

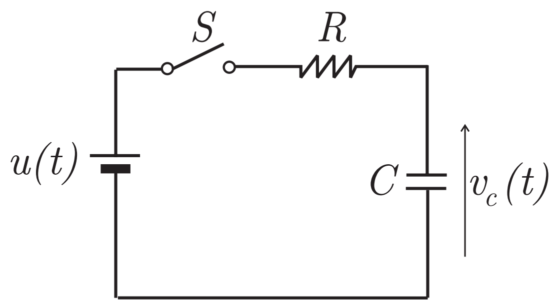
- La soluzione esiste ed è unica:

$$x(t) = \underbrace{e^{at}x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}$$

$$x_\ell(t) = e^{at}x_0 \qquad \text{effetto delle condizioni iniziali}$$

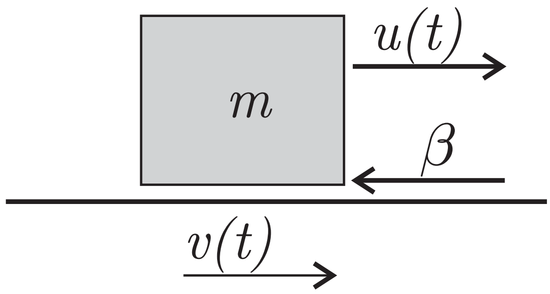
$$x_f(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau \qquad \text{effetto dell'ingresso}$$

- **Esempi fisici:**



$$u(t) - RC\dot{v}_c(t) - v_c(t) = 0$$

$$x = V_c,\ a = -\frac{1}{RC},\ b = \frac{1}{RC}$$



$$-\beta v(t) + u(t) = m\dot{v}(t)$$

$$x = v,\ a = -\frac{\beta}{m},\ b = \frac{1}{m}$$

2.1 Richiami di Algebra Lineare

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ matrice quadrata di ordine n

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$ matrice identità di ordine n

- Equazione caratteristica di A:

$$\det(sI - A) = 0$$

- Polinomio caratteristico di A:

$$P(s) = \det(sI - A)$$

- Autovettori di A: vettori v_i tali che

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Autovalori di A: Le n soluzioni[a] $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dell'equazione caratteristica di A

$$\det(\lambda_i I - A) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Diagonalizzazione di A:

$$A = T^{-1}\Lambda T,\ T^{-1} = [v_1|v_2|\dots|v_n]\,,\ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

[a] N.B.: In generale le soluzioni sono numeri complessi

2.1 Richiami di Algebra Lineare

- **Esempio 1**:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{vmatrix} = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

Autovalori: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$

- **Esempio 2**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-1 & -3 \\ 5 & s-2 \end{vmatrix} = s^2 - 3s + 17$$

Autovalori: $\lambda_1 = \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{59}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{59}}{2}$

Nota:

· $j \triangleq \sqrt{-1}$ unità immaginaria

· $|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$

· $\rho e^{j\theta} = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

2 Sistemi Lineari a Tempo Continuo

- *Sistema di equazioni differenziali* di ordine n con ingresso

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & a_{11}x_1(t) + \ \ldots + a_{1n}x_n(t) & +b_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & a_{21}x_1(t) + \ \ldots + a_{2n}x_n(t) & +b_2u(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_n(t) & = & a_{n1}x_1(t) + \ \ldots + a_{nn}x_n(t) & +b_nu(t) \\ x_1(0) = x_{10}, & \ldots & x_n(0) = x_{n0} & \end{cases}$$

- Forma matriciale equivalente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) & = & x_0 \end{cases}$$

- La soluzione esiste ed è unica:

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}$$

La *matrice esponenziale* è definita come
$e^{At} \triangleq I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ \ldots$
Se la matrice A è diagonalizzabile: $A = T^{-1}\Lambda T$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{At} = T^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T$$

Risposta modale

- Sia l'ingresso $u(t) = 0$, $\forall t \geq 0$, e supponiamo che A sia diagonalizzabile
- La traiettoria di stato (risposta libera) è

$$x(t) = e^{At}x_0 = T^{-1}e^{\Lambda t}Tx_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i$$

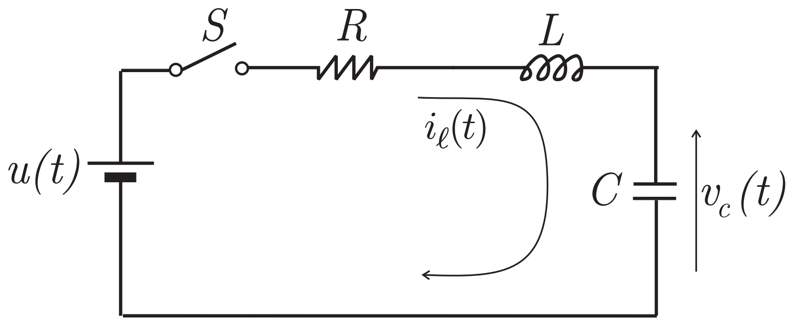
dove v_i=autovettori di A, λ_i=autovalori di A, α_i=coefficienti che dipendono dalla condizione iniziale $x(0)$ (il vettore $\alpha = Tx(0)$, $T^{-1} = [v_1 \ldots v_n]$).

- Il modo di evolvere del sistema dipende quindi dagli autovalori di A (detti, appunto, *modi* del sistema)

- Un modo si dice *eccitato* se il relativo $\alpha_i \neq 0$

2 Sistemi Lineari a Tempo Continuo

- **Esempio fisico: Circuito RLC**



$$\begin{cases} u(t) - Ri_\ell - L\frac{di_\ell(t)}{dt} - v_c(t) = 0 & \text{Equilibrio tensione} \\ i_\ell(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} & \text{Equilibrio corrente} \end{cases}$$

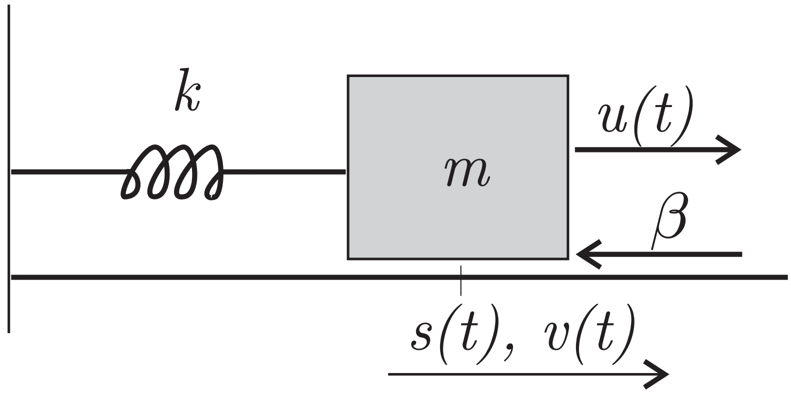
Equivale al sistema di equazioni differenziali di ordine 2:

$$\begin{cases} \frac{di_\ell(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i_\ell(t) - \frac{1}{L}v_c(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_\ell(t) \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_\ell(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} i_\ell(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

- **Esempio fisico: Massa-Molla-Smorzatore**



$$\begin{cases} \dot{s}(t) = v(t) & \text{Definizione di velocità} \\ m\dot{v}(t) = u - \beta v(t) - ks(t) & \text{Legge di Newton} \end{cases}$$

Equivale al sistema di equazioni differenziali di ordine 2:

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\beta}{m}v(t) - \frac{k}{m}s(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

- *Equazioni differenziali di ordine* n

$$\frac{dy^{(n)}(t)}{dt} + a_{n-1}\frac{dy^{(n-1)}(t)}{dt} + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0$$

Ponendo $x_1(t) \triangleq y(t), x_2(t) \triangleq \dot{y}(t), \ldots, x_n(t) \triangleq y^{n-1}(t)$, equivale al sistema di n equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_3(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_n(t) & = & -a_0 x_1(t) + \ \ldots \ - a_{n-1}x_{n-1}(t) \\ x(0) & = & [y(0)\ \dot{y}(0) \ldots \ y^{n-1}(0)]' \end{cases}$$

- **Esempio:**

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = 0$$

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & y(t) \\ x_2(t) & = & \dot{y}(t) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & -5x_1(t) - 2x_2(t) \\ x(0) & = & [y(0)\ \dot{y}(0)]' \end{cases}$$

2 Sistemi Lineari a Tempo Continuo

- *Equazioni differenziali di ordine* n con ingresso

$$\frac{dy^{(n)}(t)}{dt} + a_{n-1}\frac{dy^{(n-1)}(t)}{dt} + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$
$$b_{n-1}\frac{du^{(n-1)}(t)}{dt} + b_{n-2}\frac{du^{(n-2)}(t)}{dt} + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

- Equivale al sistema di n equazioni del primo ordine:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_3(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_n(t) & = & -a_0x_1(t) + \ \ldots\ - a_{n-1}x_{n-1}(t) + u(t) \\ y(t) & = & b_0x_1(t) + \ \ldots\ + b_{n-1}x_n \end{array}\right.$$

- Equivale alla forma matriciale

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} \end{bmatrix} x(t) \end{array}\right.$$

- **Esempio 1:**

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}x(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{array} \right.$$

- **Esempio 2:**

$$\frac{d^{(3)}y(t)}{dt} + 5\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 6y(t) = 3u(t) + 4\dot{u}(t)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}x(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{array} \right.$$

2 Sistemi Lineari a Tempo Continuo

Sistema lineare tempo-continuo, tempo-invariante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

- Dato lo *stato iniziale* $x(0)$ e un segnale di ingresso $u(t)$, $t \geq 0$, è possibile predire tutta l'evoluzione dello stato $x(t)$ e dell' *uscita* $y(t)$ del sistema, per ogni $t \geq 0$.
- Nota che lo stato $x(0)$ sintetizza tutta la storia passata del sistema.
- La dimensione n dello stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è detta *ordine* del sistema.
- Il sistema si dice *proprio* se $D = 0$.

In generale $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$,
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Soluzione di regime stazionario

- Ipotesi: A ha tutti autovalori a parte reale < 0
- Quale sarà il valore asintotico dell'uscita corrispondente ad un dato ingresso costante $u(t) \equiv u_r$, $t \geq 0$?
- Imponiamo $\dot{x}_r(t) = 0 \Rightarrow Ax_r + Bu_r = 0$

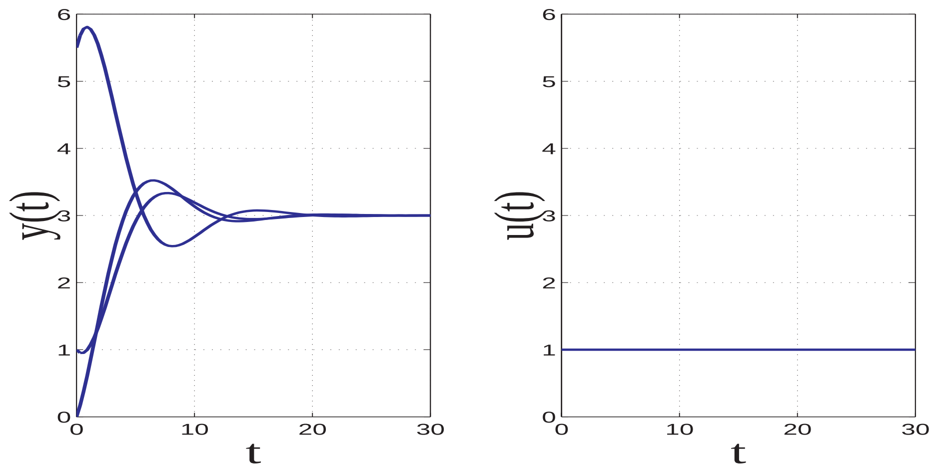
$$y_r = \underbrace{(-CA^{-1}B + D)}_{\text{guadagno in continua}} u_r$$

- **Esempio**:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Guadagno in continua:

$$-\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3$$



Evoluzione dell'uscita $y(t)$ per diverse cond. iniz. e ingresso $u(t) \equiv 1$

Definizione generale di equilibrio:

- Dato il sistema (tempo continuo, non lineare, tempo variante)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) & = & g(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

- Lo stato costante x_r e l'ingresso costante u_r sono un *equilibrio* del sistema se per $x(t_0) = x_r$ e $u(t) \equiv u_r$, $\forall t \geq t_0$, si ha $x(t) \equiv x_r$, $\forall t \geq t_0$.
- Definizione equivalente: $f(t, x(t), u(t)) = 0$, $\forall t \geq t_0$
- x_r è detto *stato di equilibrio*
- u_r è detto *ingresso di equilibrio*