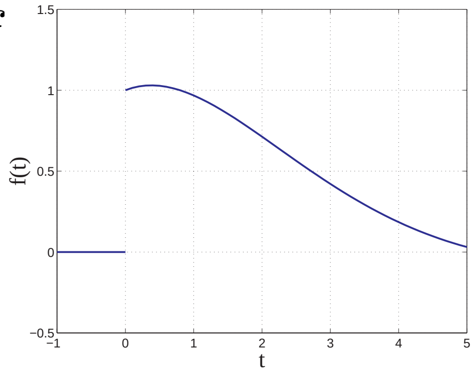
6. Trasformate e Funzioni di Trasferimento

6.3 Richiami sulla Trasformata di Laplace

Definizione

La *trasformata di Laplace* di $f(t)$ è la funzione di variabile complessa $s \in \mathbb{C}$, $(s = \sigma + j\omega)$,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \triangleq \mathcal{L}[f$$



Esempi

- *Funzione impulso (Delta di Dirac)* [a]:

$$f(t) = \delta(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ +\infty & \text{se } t = 0 \end{cases} \quad \text{tale che} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta] = F(s) = 1 \;\; \forall s \in \mathbb{C}$$

- *Funzione gradino* :

$$f(t) = 1\!\!\mathrm{I}(t) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[1\!\!\mathrm{I}] = F(s) = \frac{1}{s}$$

---

[a] La funzione $\delta(t)$ is può considerare come il limite della successione di funzioni $f_\epsilon(t)$ per $\epsilon \to 0$ tali che

$$f_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{se } 0 \leq t \leq \epsilon \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

6.3 Richiami sulla Trasformata di Laplace

Proprietà della trasformata di Laplace

- **Linearità** :

$$\mathcal{L}[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + k_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Esempio: $f(t) = \delta(t) - 2\,1\!\!1(t) \Rightarrow \mathcal{L}[f] = 1 - \frac{2}{s}$.

- **Traslazione nel tempo** :

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}\mathcal{L}[f(t)]$$

Esempio: $f(t) = 3\,1\!\!1(t-2) \Rightarrow \mathcal{L}[f] = \frac{3e^{-2s}}{s}$.

- **Traslazione nella frequenza** :

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a), \text{ dove } F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Esempio: $f(t) = e^{at}\,1\!\!1(t) \Rightarrow \mathcal{L}[f] = \frac{1}{s-a}$
Esempio: $f(t) = \cos(\omega t)\,1\!\!1(t) \Rightarrow \mathcal{L}[f] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
(Nota: $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$)

- **Derivazione nel tempo** [a]:

$$\mathcal{L}[\frac{d}{dt} f(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0^+)$$

Esempio: $f(t) = \sin(\omega t)\,1\!\!1(t) \Rightarrow L[f] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

- **Derivazione nella frequenza** :

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]$$

Esempio: $f(t) = t\,1\!\!1(t) \Rightarrow L[f] = \frac{1}{s^2}$.

[a] $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$. Se f è continua in 0, $f(0^+) = f(0)$

6.3 Richiami sulla Trasformata di Laplace

- **Teorema del valore iniziale** :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \;\Rightarrow\; f(0^+) \triangleq \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Esempio: $f(t) = 1\!\!1(t) - t\,1\!\!1(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$
$f(0^+) = 1 = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

- **Teorema del valore finale** :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \;\Rightarrow\; f(+\infty) \triangleq \lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Esempio: $f(t) = 1\!\!1(t) - e^{-t}\,1\!\!1(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$
$f(+\infty) = 1 = \lim_{s\to 0} sF(s)$

Pierre-Simon Laplace

(1749-1827)

6.4 Funzioni di Trasferimento - T. Continuo

- Considera il sistema a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

- Applichiamo la trasformata di Laplace[a]:

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

dove $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$, $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$.

- Esplicitando rispetto a x_0 e $U(s)$:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= \underbrace{C(sI - A)^{-1}x_0}_{Y_L(s)} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)}_{Y_F(s)} \end{aligned}$$

$Y_L(s)$=trasformata di Laplace della risposta libera
$Y_F(s)$=trasformata di Laplace della risposta forzata

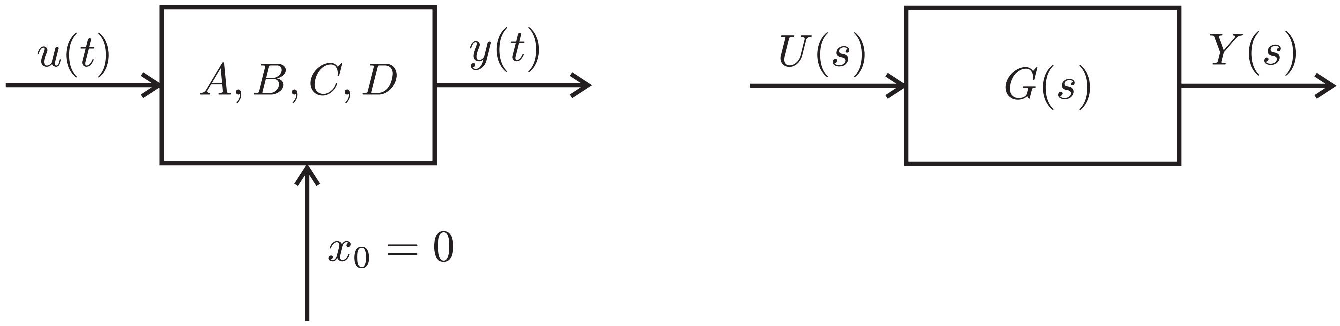
- **Definizione**: La *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo continuo (A, B, C, D) è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

cioè il rapporto fra la trasf. di Laplace $Y(s)$ dell' uscita $y(t)$ e la trasf. di Laplace $U(s)$ dell' ingresso per $u(t)$ per condizione iniziale nulla $x_0 = 0$.

[a] $x(t)$ è una funzione derivabile, e quindi continua $\Rightarrow x(0^+) = x(0) = x_0$

6.4 Funzioni di Trasferimento - T. Continuo



- **Esempio**: Il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

ha per funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{2s + 22}{s^2 + 11s + 10}$$

- **Nota**: La funzione di trasferimento non dipende dall'ingresso ! È una proprietà del sistema lineare.

6.4 Funzioni di Trasferimento - T. Continuo

- Considera l'eq. diff. con ingresso

$$\frac{dy^{(n)}(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dy^{(n-1)}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$
$$b_m\frac{du^{(m)}(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{du^{(m-1)}(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

- Ponendo condizioni iniziali $y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$ nulle, si ottiene immediatamente la funzione di trasferimento equivalente

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- **Esempio**: $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + u(t)$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+1}$$

- Nota: la stessa f.d.t. $G(s)$ si ottiene dalla forma matriciale equivalente dell'eq. differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alcune funzioni di trasferimento:

- *Integratore*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{cases} \qquad U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \longrightarrow Y(s)$$

- *Doppio integratore*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases} \qquad U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2}} \longrightarrow Y(s)$$

- *Oscillatore*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases} \qquad U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2+1}} \longrightarrow Y(s)$$

Antitrasformata di Laplace

- Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} \quad (m < n)$$

  possiamo scomporla in fratti semplici (Hp: $p_i \neq p_j$)

$$G(s) = \frac{\alpha_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s-p_n}$$

  dove α_i è detto *residuo* di $G(s)$ in $p_i \in \mathbb{C}$

$$\alpha_i = \lim_{s \to p_i} (s-p_i) G(s)$$

  (nota che se $p_i = \bar{p}_j$, allora $\alpha_i = \bar{\alpha}_j$)

- L'*antitrasformata di Laplace* di $G(s)$ è la funzione $g(t)$ tale che $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$:

$$g(t) = \alpha_1 e^{p_1 t} + \cdots + \alpha_n e^{p_n t}$$

Nel caso di radici coincidenti $(s-p_i)^k$, nello sviluppo si hanno tutti i termini del tipo

$$\frac{\alpha_{i1}}{(s-p_i)} + \cdots + \frac{\alpha_{ik}}{(s-p_i)^k}, \; \alpha_{ij} = \frac{1}{(k-j)!} \lim_{s \to p_i} \frac{d^{(k-j)}}{ds^{(k-j)}} [(s-p_i)^k G(s)]$$

la cui antitrasformata è

$$\alpha_{i1} e^{p_i t} + \cdots + \alpha_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_i t}$$

6.4 Funzioni di Trasferimento - T. Continuo

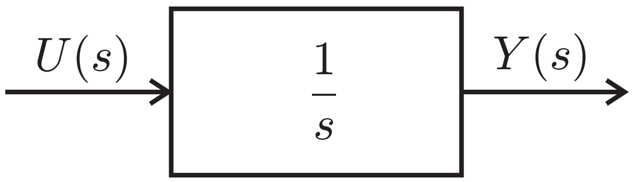
Risposta all'impulso

- Considera l'ingresso impulsivo $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$. L'uscita corrispondente $y(t)$ è detta *risposta all'impulso* .
- La trasformata di Laplace di $y(t)$ è $Y(s) = G(s) \cdot 1 = G(s)$.
- Pertanto la *risposta all'impulso* coincide con l'antitrasformata $g(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$

Esempi

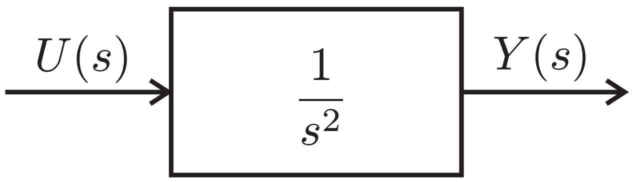
- *Integratore*

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{s}] = \mathbb{1}(t) \end{aligned}$$



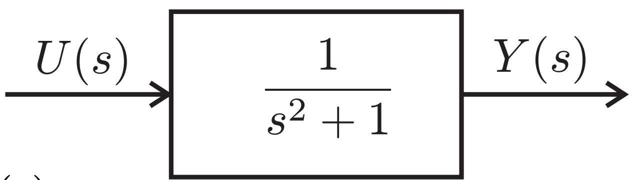
- *Doppio integratore*

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{s^2}] = t\,\mathbb{1}(t) \end{aligned}$$

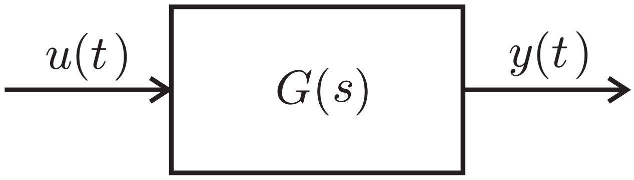


- *Oscillatore*

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\tfrac{1}{s^2+1}] = \sin t\,\mathbb{1}(t) \end{aligned}$$



6.5 Poli e zeri



- Considera il sistema lineare descritto dalla funzione di trasferimento $(m < n)$

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Si dicono *poli* del sistema le radici di $D(s)$
- Si dicono *zeri* del sistema le radici di $N(s)$
- A tempo discreto le definizioni sono analoghe
- **Esempio**:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2} = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+s+2)}$$

poli: $\{-1, -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2}, -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2}\}$, zeri: $\{-2\}$.

6.5 Poli e zeri

- Considera il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$
$$x(0) = 0$$

e la funzione di trasferimento corrispondente

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \triangleq \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Il denominatore $D(s) = \det(sI - A)$. Quindi i poli di $G(s)$ corrispondono agli autovalori di A.
- La stabilità del sistema si può quindi studiare sia tramite $G(s)$ che tramite A

Attenzione: alcuni autovalori di A possono non risultare poli di $G(s)$. Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(sI - A) = (s - 1)(s + 1)$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1}$$

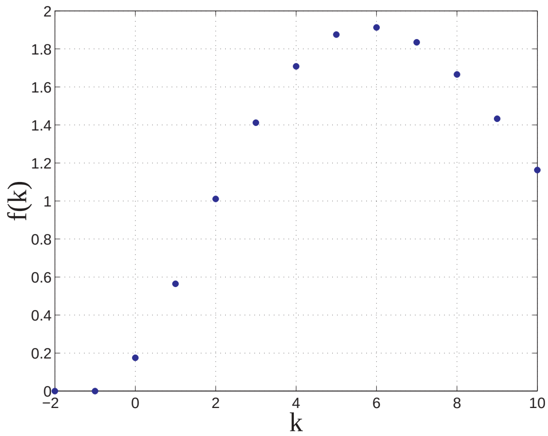
Il polo $s = 1$ non ha influenza sul comportamento ingresso-uscita del sistema, ma ha influenza sulla risposta libera: $x_1(t) = e^t x_{10}$ (il sistema è instabile).

6.6 Trasformata zeta

Definizione

La *trasformata zeta* di $f(k)$ è la funzione di variabile complessa $z \in \mathbb{C}$, $(z = \sigma + j\omega)$,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} \triangleq \mathcal{Z}[f]$$



Esempi

- *Funzione impulso discreto* :

$$f(k) = \delta(k) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0 \\ 1 & \text{se } k = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}[\delta] = F(z) \equiv 1$$

- *Funzione gradino discreto* :

$$f(k) = 1\!\!\mathrm{I}(k) \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0 \\ 1 & \text{se } k \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}[1\!\!\mathrm{I}] = F(z) = \frac{z}{z-1}$$

- *Funzione esponenziale discreto* :

$$f(k) = a^k\, 1\!\!\mathrm{I}(k) \;\Rightarrow\; \mathcal{Z}[f] = F(z) = \frac{z}{z-a}$$

6.6 Trasformata zeta

Proprietà della trasformata zeta

- **Linearità** :

$$\mathcal{Z}[k_1 f_1(k) + k_2 f_2(k)] = k_1 \mathcal{Z}[f_1(k)] + k_2 \mathcal{Z}[f_2(k)]$$

Esempio: $f(k) = 3\delta(k) - \frac{5}{2^k}\, 1\!\!\mathrm{I}(t) \Rightarrow \mathcal{Z}[f] = 3 - \frac{5z}{z-\frac{1}{2}}$.

- **Anticipo temporale** :

$$\mathcal{Z}[f(k+1)\, 1\!\!\mathrm{I}(k)] = z\mathcal{Z}[f] - zf(0)$$

Esempio: $f(k) = a^{k+1}\, 1\!\!\mathrm{I}(k) \Rightarrow \mathcal{Z}[f] = z\frac{z}{z-a} - z = \frac{az}{z-a}$

z è detto anche *operatore di anticipo unitario*

- **Ritardo temporale** :

$$\mathcal{Z}[f(k-1)] = z^{-1}\mathcal{Z}[f]$$

Esempio: $f(k) = 1\!\!\mathrm{I}(k-1) \Rightarrow \mathcal{Z}[f] = \frac{z}{z(z-1)}$

z^{-1} è detto anche *operatore di ritardo unitario*

- **Derivazione nella frequenza** :

$$\mathcal{Z}[kf(k)] = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[f]$$

Esempio: $f(k) = k\, 1\!\!\mathrm{I}(k) \Rightarrow \mathcal{Z}[f] = \frac{z}{(z-1)^2}$

6.6 Trasformata zeta

- **Teorema del valore iniziale** :

$$\mathcal{Z}[f(k)] = F(z) \;\Rightarrow\; f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

Esempio: $f(k) = 1\!\!1(k) - k\,1\!\!1(k) \Rightarrow F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2}$
$\Rightarrow f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = 1$

- **Teorema del valore finale** :

$$\mathcal{Z}[f(k)] = F(z) \;\Rightarrow\; f(+\infty) \triangleq \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

Esempio: $f(k) = 1\!\!1(k) + (-0.7)^k\,1\!\!1(t) \Rightarrow$
$F(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+0.7} \Rightarrow f(+\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) = 1$

Witold Hurewicz

(1904-1957)

6.7 Funzioni di Trasferimento - Tempo Discreto

- Considera il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$
$$x(0) = x_0$$

- Applichiamo la trasformata zeta:

$$\begin{aligned} zX(z) - zx_0 &= AX(z) + BU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned}$$

dove $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)], U(z) = \mathcal{Z}[u(k)], Y(z) = \mathcal{Z}[y(k)]$.

- Esplicitando rispetto a x_0 e $U(z)$:

$$\begin{aligned} X(z) &= z(zI - A)^{-1}x_0 + (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) &= \underbrace{zC(zI - A)^{-1}x_0}_{Y_L(z)} + \underbrace{(C(zI - A)^{-1}B + D)U(z)}_{Y_F(z)} \end{aligned}$$

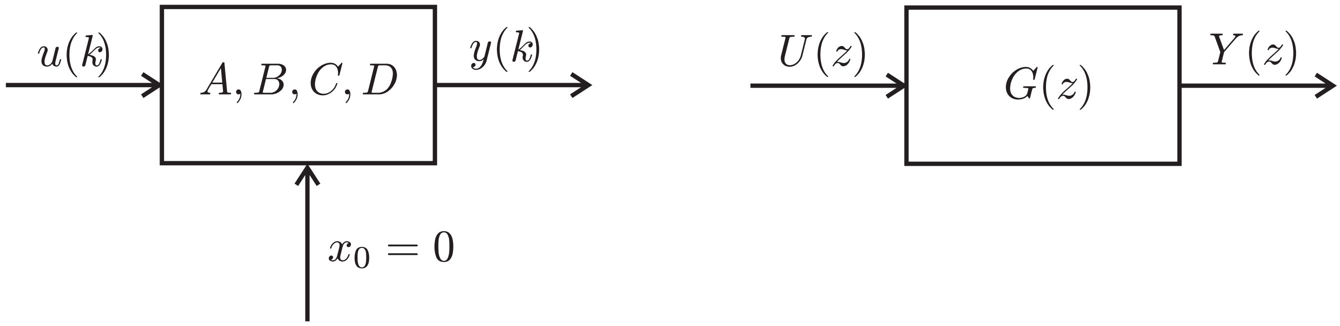
$Y_L(z)$=trasformata zeta della risposta libera
$Y_F(z)$=trasformata zeta della risposta forzata

- **Definizione**: La *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo discreto (A, B, C, D) è

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

cioè il rapporto fra la trasf. zeta $Y(z)$ dell' uscita $y(k)$ e la trasf. zeta $U(z)$ dell' ingresso per $u(k)$ per condizione iniziale nulla $x_0 = 0$.

6.7 Funzioni di Trasferimento - Tempo Discreto



- **Esempio**: Il sistema lineare

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

  ha per funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{-z + 1.5}{z^2 - 0.25}$$

- **Nota**: Anche per i sistemi tempo-discreto, la funzione di trasferimento non dipende dall'ingresso, ma è una proprietà del sistema lineare.

6.7 Funzioni di Trasferimento - Tempo Discreto

- Considera l'equazione alle differenze con ingresso

$$a_n y(k-n) + a_{n-1} y(k-n+1) + \cdots + a_1 y(k-1) + y(k) = b_n u(k-n) + \cdots + b_1 u(k-1)$$

- Ponendo condizioni iniziali nulle, si ottiene la funzione di trasferimento equivalente

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{b_n z^{-n} + b_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + b_1 z^{-1}}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + a_1 z^{-1} + 1} \\ &= \frac{b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \end{aligned}$$

- **Esempio**: $3y(k-2) + 2y(k-1) + y(k) = 2u(k-1)$

$$G(z) = \frac{2z^{-1}}{3z^{-2} + 2z^{-1} + 1} = \frac{2z}{z^2 + 2z + 3}$$

- Nota: la stessa f.d.t. $G(z)$ si ottiene dalla forma matriciale equivalente dell'eq. alle differenze:

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(z) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \left(z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6.7 Funzioni di Trasferimento - Tempo Discreto

Alcune funzioni di trasferimento:

- *Integratore*

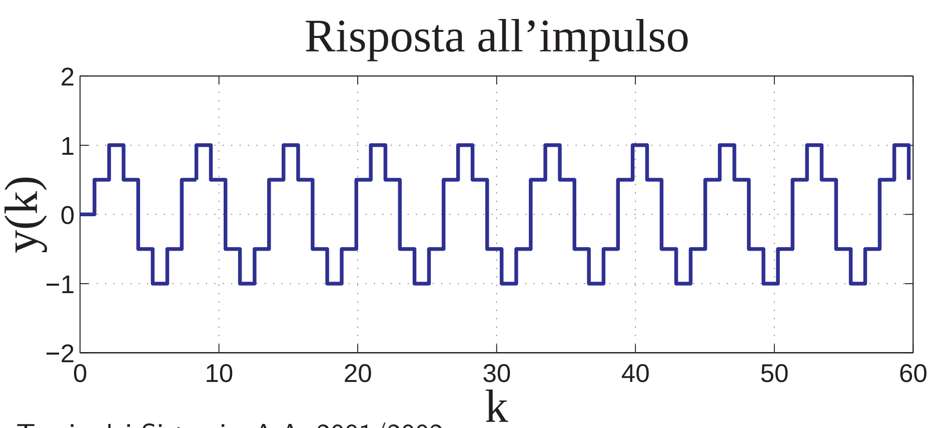
$$\begin{cases} x(k+1) &= x(k)+u(k) \\ y(k) &= x(k) \end{cases} \qquad U(z) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{z-1}} \longrightarrow Y(z)$$

- *Doppio integratore*

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_1(k)+x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k)+u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{cases} \qquad U(z) \longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{z^2-2z+1}} \longrightarrow Y(z)$$

- *Oscillatore*

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_1(k)-x_2(k)+u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) \\ y(k) &= \frac{1}{2}x_1(k)+\frac{1}{2}x_2(k) \end{cases} \qquad U(z) \longrightarrow \boxed{\dfrac{\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}}{z^2-z+1}} \longrightarrow Y(z)$$



6.7 Funzioni di Trasferimento - Tempo Discreto

Antitrasformata zeta

- Data la funzione di trasferimento

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_n)} \quad (m < n)$$

Analogamente alla trasformata di Laplace, possiamo scomporla in fratti semplici (Hp: $p_i \neq p_j$)

$$G(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\alpha_1 z}{z-p_1} + \cdots + \frac{\alpha_n z}{z-p_n}\right)$$

dove α_i è il *residuo* di $G(z)$ in $p_i \in \mathbb{C}$

$$\alpha_i = \lim_{z \to p_i} (z-p_i)G(z)$$

- L'*antitrasformata zeta* di $G(z)$ è la funzione $g(k)$ tale che $\mathcal{Z}[g(k)] = G(z)$:

$$g(k) = \left(\alpha_1 p_1^{k-1} + \cdots + \alpha_n p_n^{k-1}\right) 1\!\!\mathrm{I}(k-1)$$

- **Esempio**.

$$\begin{aligned} G(z) &= \overbrace{\frac{z^2+1}{z^2-1.5z+0.5}}^{m \not< n} = 1 + \overbrace{\frac{1.5z+0.5}{z^2-1.5z+0.5}}^{m<n} = \\ & \quad 1 + \frac{1}{z}\left(\frac{4z}{z-1} - \frac{2.5z}{z-0.5}\right) \\ g(k) &= \delta(k) + \left(4 - 2.5(0.5)^{k-1}\right) 1\!\!\mathrm{I}(k-1) \end{aligned}$$

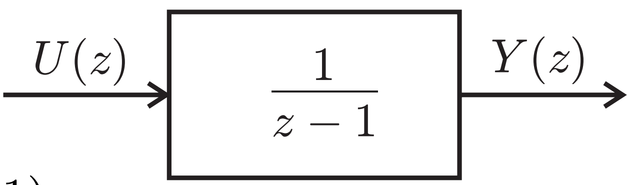
6.7 Funzioni di Trasferimento - Tempo Discreto

Risposta all'impulso

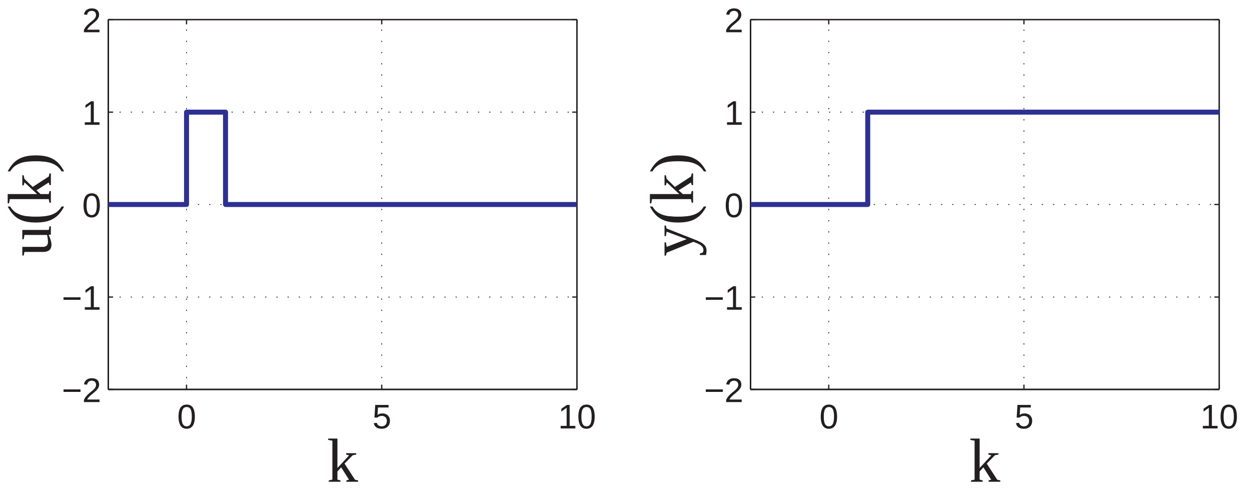
- Considera l'ingresso impulsivo $u(k) = \delta(k) \Rightarrow U(z) = 1$. L'uscita corrispondente $y(k)$ è detta *risposta all'impulso* .
- La trasformata zeta di $y(k)$ è $Y(z) = G(z) \cdot 1 = G(z)$.
- Pertanto la *risposta all'impulso* coincide con l'antitrasformata $g(k)$ della funzione di trasferimento $G(z)$

Esempi

- *Integratore*



$$
\begin{aligned}
u(k) &= \delta(k) \\
y(k) &= \mathcal{Z}^{-1}[\tfrac{1}{z-1}] = \mathbb{1}(k-1)
\end{aligned}
$$



Rappresentazioni di stato algebricamente equivalenti

- Considera il sistema lineare

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

- Sia P una matrice invertibile e definiamo un cambio di coordinate $z = P^{-1}x$
- Essendo $x = Pz$, si ha

$$\begin{cases} z(k+1) &= P^{-1}x(k+1) = P^{-1}(Ax(k) + Bu(k)) \\ &= P^{-1}APz(k) + P^{-1}Bu(k) \\ y(k) &= CPz(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$z(0) = P^{-1}x_0$$

  e quindi

$$\begin{cases} z(k+1) &= \bar{A}z(k) + \bar{B}u(k) \\ y(k) &= \bar{C}z(k) + \bar{D}u(k) \end{cases}$$

$$z(0) = P^{-1}x_0$$

  dove $\bar{A} = P^{-1}AP$, $\bar{B} = P^{-1}B$, $\bar{C} = CP$, $\bar{D} = D$.

- I sistemi (A, B, C, D) e $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ si dicono *algebricamente equivalenti*

6.8 Sistemi Algebricamente Equivalenti

- Nota: Il legame ingresso/uscita deve rimanere immutato. Infatti

$$
\begin{aligned}
\bar{G}(z) &= \bar{C}(zI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} \\
&= CP(zP^{-1}IP - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D \\
&= CPP^{-1}(zI - A)PP^{-1}B + D \\
&= C(zI - A)^{-1}B + D \\
&= G(z)
\end{aligned}
$$

- Per sistemi a tempo continuo il ragionamento è del tutto analogo