ESERCITAZIONE 23/05/2008

Compito dell'8 Giugno 2005

Es. 2)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & a+2 & 0 \\ a+1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \end{bmatrix} x(t)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a^2+3a+3 \\ 0 & a+1 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rank$(R) \neq 3$

$\Downarrow$

non raggiungibile

E non controllabile

(sistema tempo continuo)

- Per $a \neq -1 \Rightarrow$ Rank$(R) = 2$

base di R: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T = I \Rightarrow (A, B)$ è già in decomposizione canonica di raggiungibilità

Parte non raggiungibile $1-a$

$\Rightarrow$ sistema stabilizzabile se $1-a<0 \Rightarrow a>1$

- Per $a = -1 \Rightarrow$ Rank$(R) = 1$

base di R: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T = I \Rightarrow (A, B)$ è già in decomposizione canonica di raggiungibilità

Parte ~~non~~ raggiungibile $\begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$\Rightarrow$ non stabilizzabile

Es. 3)

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

$y(2) = 2 \;;\; y(1) = 2 \;;\; y(0) = 2$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}(\Theta) = 2$

$\ker(\Theta)$ ha dim. 1

$\Rightarrow$ non osservabile

$\ker(\Theta) = \{x \mid \Theta x = 0\}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$\ker(\Theta) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{bmatrix}\right) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow T = I_3$$

$\Rightarrow (A, C)$ è già in forma canonica di osservabilità

$\Rightarrow$ è ricostruibile e rivelabile

Stato iniziale:

$$Y = \Theta x(0) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_{01} + x_{02} = 2 \\ 3x_{01} - x_{02} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_{01} = 1 \\ x_{02} = 1 \end{matrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ * \end{bmatrix}$$

Il numero minimo di passi necessari per ricostruire lo stato corrente è

$$x(k) = \cancel{\quad} = A^k x(0)$$

$$x(1) = A x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x(k)$ è ricostruibile in 1 passo

Compito del 30 Maggio 2003

Es. 2) $$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

- Osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & 0 & 0 \\ -27 & -19 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{rank}(\mathcal{O}) = 2 \\ \text{rank}(\ker(\mathcal{O})) = 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -x_2 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 &= 0 \\ -6x_1 - 7x_2 &= 0 \\ -27x_1 - 19x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ &\Downarrow \\ x_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{base } \ker(\mathcal{O}) : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow T = I_4 \Rightarrow$ il sist. è già in forma d'oss.

parte non oss. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -1 \end{array} \Rightarrow$ rivelabile

- Stimatore asintotico $s = -1, -1, -2, -3$

NB: il guadagno dello stimatore non è influenzato dalla parte non osservabile del sistema!

$$(s+1)^2 = \det(sI - A + LC) = \begin{vmatrix} s-1 & -2-l_1 \\ -3 & s-2-l_2 \end{vmatrix} = (s-1)(s-2-l_2) - (-3)(-2-l_1)$$

$$A - LC = \begin{bmatrix} 1 & 2+l_1 \\ 3 & 2+l_2 \end{bmatrix}$$

$$= s^2 - 2s - l_2 s - s + 2 + l_2 - 6 - 3l_1$$
$$= s^2 - (3 + l_2)s - 4 + l_2 - 3l_1$$

$$s^2+2s+1 = s^2-(3+l_2)s+4+l_2-3l_1$$

$$\left.\begin{array}{l}(-3+l_2)=2\\ -4+l_2-3l_1=1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} l_2=-5\\ l_1=-\frac{10}{3}\end{array}$$

l_3 e l_4 possono essere scelti a piacere

Es. 3)

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{3}\\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

$$R=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

rank$(R)=1$

$\Rightarrow$ non raggiungibile

$$Im(R)=\text{Span}\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right] \qquad T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\left[\begin{array}{c|cc}\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{4}{3}\\ \hline 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

controllabile

stabilizzabile

In quanti passi si raggiunge l'origine?

<u>1 passo</u>

$$-Ax(0)=R_1u(0) \qquad R_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$Im(A)\subseteq Im(R_1)$? no

rank$(A)=2$

rank$(R_1)=1$

2 passi

$$-A^2 x(0) = R_2 \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0.4167 & 0.1667 & 3.1667 \\ -0.4167 & -0.1667 & -3.1667 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rank $(A^2) = 1$

rank $(R_2) = 1$ $\Rightarrow \operatorname{Im}(A^2) \subseteq \operatorname{Im}(R_2)$

$\Rightarrow$ l'origine si raggiunge in 2 passi

- Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} b & a+b & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ -a-b & -a-b & -a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

con $a, b > 0$

si determini

1) ~~caso~~ raggiungibilità
2) controllore con poli in -3
3) osservabilità
4) stimatore con pol in -3

1) $R = \begin{bmatrix} 2 & b-a & a^2+b^2 \\ -1 & a & -a^2 \\ -1 & -b & -b^2 \end{bmatrix}$ $\quad \det(R) = 0$

$\operatorname{rank}(R) \neq 3$

$\Rightarrow$ non raggiungibile e non controllabile

R ha rango 1 se $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha v_1 = v_2$

$\Rightarrow$ non esiste

$\Rightarrow \operatorname{rank}(R) = 2 \; : \; \operatorname{Im}(R) = \operatorname{span}\left[\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} b-a \\ a \\ -b \end{pmatrix}} \right]$

se $a = b = 1 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \frac{v_1 - v_2}{2} & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \hat{A} = \left[\begin{array}{cc|c} -a & a+b & 0 \\ 0 & b & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a \end{array}\right]$$

stabilizzabile se $a > 0$ $\qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$B_r K = \begin{bmatrix} 2k_1 & 2k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

2) $(\lambda+3)^2 = \det(\lambda I - A_r - B_r K)$

$\cancel{K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}}$ $K = [k_1 \; k_2]$

$$\lambda I - A_r - B_r K = \begin{bmatrix} \lambda + a - 2k_1 & -a - b - 2k_2 \\ -k_1 & \lambda - b - k_2 \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - A_r - B_r K) = \cancel{\lambda^2 + (a - b - 2k_1 - k_2)\lambda + \ldots}$

$= (\lambda + a - 2k_1)(\lambda - b - k_2) + k_1(-a - b - 2k_2) =$

$= \lambda^2 - b\lambda - k_2\lambda + a\lambda - ab - ak_2 - 2k_1\lambda + 2k_1 b \cancel{+ 2k_1k_2}$
$- ak_1 - bk_1 \cancel{- 2k_1k_2} =$

$= \lambda^2 + (a - b - 2k_1 - k_2)\lambda - (a - b)k_1 - ak_2 - ab$

$(\lambda+3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$

$$\left.\begin{aligned} a - b - 2k_1 - k_2 &= 6 \\ -(a-b)k_1 - ak_2 - ab &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_1, k_2 = f(a,b)$$

3) $$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2a & -a & -2a \\ 2a^2 & a^2 & 2a^2 \end{bmatrix}$$ $\text{rank}(\mathcal{O}) = 1$

$\Rightarrow$ non osservabile e non ricostruibile (tempo continuo!)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2ax_1 - ax_2 - 2ax_3 &= 0 \\ 2a^2x_1 + a^2x_2 + 2a^2x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{sp}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \left[\begin{array}{c|cc} -a & 0 & 0 \\ \hline a+b & -2a-b & 2a+2b \\ a+b & -a-b & a+2b \end{array}\right]$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Parte non osservabile $\begin{bmatrix} -2a-b & 2a+2b \\ -a-b & a+2b \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ rivelabile se $\det\left(\lambda I - \begin{bmatrix} -2a-b & 2a+2b \\ -a-b & a+2b \end{bmatrix}\right)$

ha autovalori a parte reale < 0

4) $\lambda + 3 = \det(\lambda I - A_o + L C_o) = \lambda + a + l_1$

$\Rightarrow l_1 = 3 - a$