ESERCIZIO 1 - RAGGIUNGIBILITÁ

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Calcoliamo la matrice di raggiungibilità

$$R = \left[B \; AB \; A^2B \right]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si nota subito che R non ha rango 3 perché le righe e le colonne non sono linearmente indipendenti

Il rango di una matrice si può calcolare con:

1) metodo degli orlati:
- si controlla se R ha almeno rango 1
  $\Rightarrow$ un elemento $\neq 0$
  $\rightarrow$ diciamo $r_{11} = 1$
- si "orla" l'elemento: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e si calcola il determinante: -5
  $\Rightarrow$ R ha almeno rango 2
- si "orla" ancora e si ottiene tutta R e se ne calcola il determinante: 0
  $\Rightarrow$ R non ha rango 3

2) metodo dei determinanti dei minori:

"il rango di una matrice è pari al massimo ordine di ~~un~~ minore invertibile della matrice"

- si calcola il ~~rango~~ determ. di R: 0 ⇒ R non ha rango 3
- si calcola il determinante di tutti i minori di R

[un minore di R è $\tilde{R}_{ij}$ la matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna di R]

e se ce n'è ~~una~~ almeno uno invertibile e con determinante $\neq 0$ R ha rango 2

⇒ in questo caso per esempio $\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix} = -5$

3) Metodo di Gauss-Jordan:

- si trasforma la matrice a scalini con somme e sottrazioni di righe e colonne

⇒ es.:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\downarrow \text{2° riga} - 1°$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -4 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[-1°]{3°\text{ riga}} \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & -4 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[-2]{\text{riga }3} \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

- poiché la matrice ottenuta ha solo 2 righe non nulle ⇒ R ha rango 2

Poiché R ha rango 2 e non 3 il sistema NON è completamente raggiungibile.

Calcoliamo il sottospazio di raggiungibilità per individuare la parte non raggiungibile del sistema $\Rightarrow$ decomposizione canonica di raggiungibilità

Per calcolare una base di $Im(R)$ ~~si può usare il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt~~:

- Prendiamo un vettore di R linearmente indipendente

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ prima colonna di R

e calcoliamo v_2 sommando a v_1 la 2° colonna di R e dividendo il risultato per 4 $\rightarrow$ si ottiene

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per completare la matrice T per ~~la trasformazione~~ il cambiamento di coordinate prendiamo il vettore linearmente indipendente dagli altri 2:

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene la matrice di cambio di coordinate

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

60 Tot. ore

[redacted]

Calcolo l'inversa di T che serve per il cambio di coordinate

$$T^{-1} = \frac{\mathrm{agg}(T)}{\det(T)}$$

$\hat{A}_{11} = \det\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} = 0$ $\quad \hat{A}_{23} = -\det\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix} = 1$

$\hat{A}_{12} = -\det\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix} = 1$ $\quad \hat{A}_{31} = \det\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = 1$

$\hat{A}_{13} = \det\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix} = 0$ $\quad \hat{A}_{32} = -\det\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix} = -1$

$\hat{A}_{21} = -\det\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = 0$ $\quad \hat{A}_{33} = \det\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix} = -1$

$\hat{A}_{22} = \det\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix} = 0$

$$[\hat{A}_{ij}] = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix} \qquad \mathrm{agg}(T) = [\hat{T}_{ij}]^T = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$\det(T) = 1 \cdot \hat{T}_{31} = 1$ (si vedeva anche senza farlo permutando le colonne)

↳ risp. l'ultima riga

$$T^{-1} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

parte compl. ragg.

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix}0&-2&1\\1&5&-2\\0&0&0\end{bmatrix} T = \left[\begin{array}{cc|c}-1&0&-2\\4&1&5\\\hline 0&0&0\end{array}\right]$$

parte non ragg.

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

l'autovalore della parte non ragg. del sist. è 0

$\Rightarrow$ per il teorema di controllabilità il sistema è controllabile

$\Rightarrow$ il sistema è stabilizzabile (perché la parte non ragg. ha autoval. in mod. <1, essendo il sist. a tempo discreto)

ESERCIZIO 2 - POLE PLACEMENT

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & -1/4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 3/4 \end{bmatrix}$$ matrice di raggiungibilità

$\det(R) = 1{,}25 \Rightarrow R$ ha rango 2 perciò il sistema è raggiungibile

Si desiderano assegnare gli autovalori $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{4}$:

$$p_d(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{4}\right) = \lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{8} = \det(\lambda I - A - BK)$$

$$\lambda I - A - BK = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & -1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 1/2 - k_1 & 1 - k_2 \\ -1 - k_1 & \lambda + \frac{1}{4} - k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A - BK) = \left(\lambda - \frac{1}{2} - k_1\right)\left(\lambda + \frac{1}{4} - k_2\right) - (-1 - k_1)(1 - k_2) =$$

$$= \left(\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda - \lambda k_2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}k_2 - \lambda k_1 - \frac{1}{4}k_1 + k_1 k_2\right) -$$

$$-\left(-1 + k_2 - k_1 + k_1 k_2\right) =$$

$$= \lambda^2 + \left(-\frac{1}{4} - k_2 - k_1\right)\lambda - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}k_2 - \frac{1}{4}k_1 + \cancel{k_1 k_2} + 1 - k_2 + k_1 - \cancel{k_1 k_2}$$

$$= \lambda^2 + \left(-\frac{1}{4} - k_2 - k_1\right)\lambda + \frac{3}{4}k_1 - \frac{1}{2}k_2 + \frac{7}{8}$$

Uguagliando i coefficienti si ottiene

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} - k_1 - k_2 = -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}k_1 - \frac{1}{2}k_2 + \frac{7}{8} = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ \frac{3}{4}k_1 - \frac{1}{2}k_2 = -1 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} k_1 + k_2 = \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}k_1 - \frac{1}{2}k_2 = -1 \end{cases}} \cancel{\Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{3}{4} - k_2 \\ \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} - k_2\right) - \frac{1}{2}k_2 = -1 \end{cases}}$$

$$\cancel{\frac{9}{16} - \frac{3}{4}k_2 - \frac{1}{2}k_2 = -1 \Rightarrow +\frac{5}{4}k_2 = +1 + \frac{9}{16} \Rightarrow k_2 = \frac{4}{5}\left(1 + \frac{9}{16}\right)}$$

$$k_1 = -k_2$$

$$+\frac{3}{4}k_2 + \frac{1}{2}k_2 = +1 \Rightarrow \frac{5}{4}k_2 = 1 \Rightarrow k_2 = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\Rightarrow k_1 = -0.8$$

ESERCIZIO 3 - POLE PLACEMENT

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0.5 & -1 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$$

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.75 & -2 \\ 1 & 1.5 & -1.75 \\ 0.5 & -1 & -2.125 \end{bmatrix}$$

$\det(R) = -2.375 \Rightarrow \mathrm{rank}(R) = 3 \Rightarrow$ raggiungibile

Vogliamo assegnare gli autovalori $0.5, -0.5, 0$:

$$p_d(\lambda) = (\lambda - 0.5)(\lambda + 0.5)\lambda = \lambda^3 - 0.25\lambda = \det(\lambda I - A - BK)$$

con $K = [k_1 \; k_2 \; k_3]$

$$(\lambda I - A - BK) = \begin{bmatrix} \lambda - k_1 & 1 - k_2 & -\frac{1}{2} - k_3 \\ 1 - k_1 & \lambda - k_2 & -1 - k_3 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k_1 & 1 - \frac{1}{2}k_2 & \lambda - 1 - \frac{1}{2}k_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A - BK) = (\lambda - k_1)\det\begin{bmatrix} \lambda - k_2 & -1 - k_3 \\ 1 - \frac{1}{2}k_2 & \lambda - 1 - \frac{1}{2}k_3 \end{bmatrix} -$$

$$-(1 - k_2)\det\begin{bmatrix} 1 - k_1 & -1 - k_3 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k_1 & \lambda - 1 - \frac{1}{2}k_3 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2} - k_3\right)\det\begin{bmatrix} 1 - k_1 & \lambda - k_2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k_1 & 1 - \frac{1}{2}k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^3 + \left(-1 - k_1 - \frac{1}{2}k_3 - k_2\right)\lambda^2 + \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{2}k_2 + \frac{7}{4}k_1 + \frac{3}{2}k_3\right)\lambda - 1 - k_1 + k_2$$

Uguagliando i coefficienti si ha il sistema

$$\begin{cases} -1 - k_1 - \frac{1}{2}k_3 - k_2 = 0 \\ \frac{9}{4} - \frac{1}{2}k_2 + \frac{7}{4}k_1 + \frac{3}{2}k_3 = -\frac{1}{4} \\ -1 - k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$k_1 = -0.8421$

$k_2 = 0.1579$

$k_3 = -0.6316$

ISTRUZIONI MATLAB PER POLE PLACEMENT:

K = - acker(A, B, p)

K = - place(A, B, p)

Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

- Serve per ottenere una base ortonormale di un sottospazio
- Una base di un sottospazio è costituita da vettori linearmente indipendenti ~~dell'...~~
- Tali vettori si dicono ortonormali se la loro norma è unitaria

Algoritmo:

- Dato un insieme linearmente indipendente di vettori $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dello spazio vettoriale W si determina una base ortonormale ponendo:

1) $$v_1 \leftarrow x_1$$
$$u_1 \leftarrow \frac{v_1}{\|v_1\|_2}$$

2) $$v_i \leftarrow x_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle u_j, x_i \rangle u_j$$
$$u_i \leftarrow \frac{v_i}{\|v_i\|_2} \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

NB: $\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$ $\qquad \langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$

Algoritmo di Gauss-Jordan

Sia B la matrice sulla quale vengono eseguite le operazioni e i il numero dell'iterazione corrente dell'algoritmo (B è $m \times n$)

1) $i = 1$
2) si considerano gli elementi di B con indici di riga e colonna $\geq i$ e si sceglie quello con il più grande valore assoluto (se tutti gli elem. considerati sono $= 0$ STOP) b_{pq}
3) si scambiano le righe i e p e le colonne q e k per cui $b_{ii} \neq 0$:

$$b_{ik} \leftrightarrow b_{pk} \; (k = 1, \ldots, n), \quad b_{ki} \leftrightarrow b_{kq} \; (k = 1, \ldots, m)$$

4) si somma la riga i moltiplicata per $-\frac{b_{ji}}{b_{ii}}$
a tutte le righe j con $j \neq i$:

$$b_{jk} \leftarrow b_{jk} - b_{ik}\frac{b_{ji}}{b_{ii}} \quad (k=1,\dots,n;\ j=1,\dots,i-1;\ i=1,\dots,n)$$

5) si moltiplica la riga i per $\frac{1}{b_{ii}}$:

$$b_{ik} \leftarrow \frac{b_{ik}}{b_{ii}} \quad (k=1,\dots,n)$$

6) $i \leftarrow i+1$; se $i<m+1$, $i<n+1$ si torna a 2)
se $i=m+1$ o $i=n+1$ STOP

Questo procedimento serve per calcolare rango, matrici di base di im e ker e matrice inversa

MATRICE INVERSA

Sia A una matrice nonsingolare; $A(n\times n)$:

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$$

MATRICE AGGIUNTA

$\operatorname{adj}(A) = [\hat{A}_{ij}]^T \rightarrow$ matrice trasposta di componenti $\hat{A}_{ij}$

$\hat{A}_{ij}$ complemento algebrico di a_{ij}

$\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

A_{ij} minore di A: è una matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna di A

DETERMINANTE

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\hat{A}_{ij} \quad (j=1,\dots,n)$$ sviluppo rispetto alla j-esima colonna

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{A}_{ij} \quad (i=1,\dots,n)$$ sviluppo rispetto alla i-esima riga

NB: ogni A t.c. $\det A \neq 0$ si dice nonsingolare