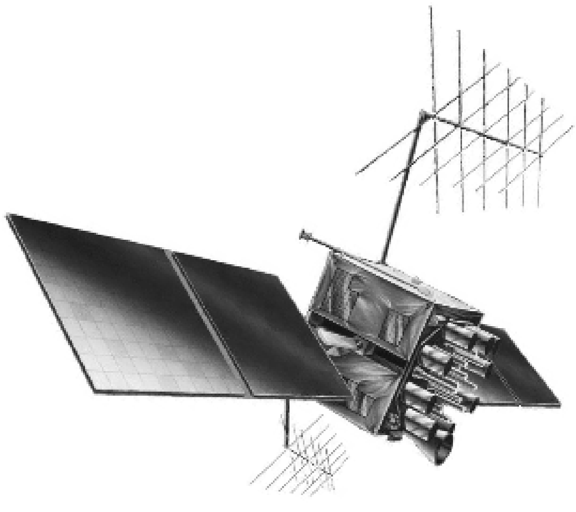
Modellizzazione e controllo di un satellite geostazionario

Introduzione

Obiettivo: Progettare un controllore digitale per il controllo di posizione di un satellite geostazionario



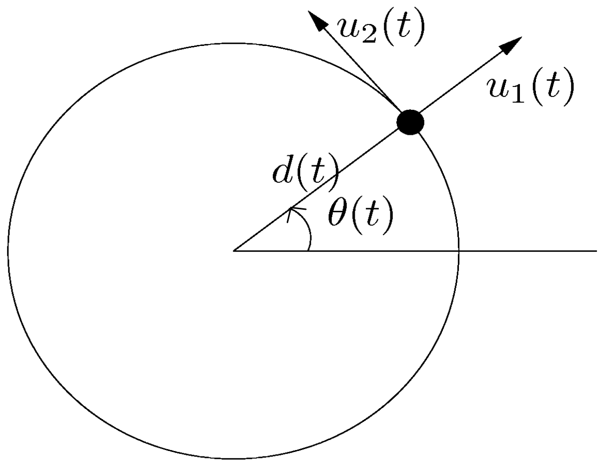
I satelliti geostazionari sono ampiamente utilizzati nello studio dell'atmosfera e degli oceani.

Maggiori dettagli possono essere trovati presso:

NASA home page: `http://www.nasa.gov`

National Oceanic and Atmospheric Administration: `http://www.noaa.gov`

Descrizione del problema



Si assume il satellite come un oggetto puntiforme di massa unitaria ad un distanza $d(t)$ dalla terra e posizione angolare $\theta(t)$.

Sul satellite ci sono due propulsori (uno radiale e uno tangenziale) che generano le forze $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Ipotesi semplificativa: il satellite ruota intorno alla Terra secondo un'orbita circolare.

Richiami di Meccanica

Ricordiamo le definizioni di:

Q^{ta} di moto: $\vec{Q} = m\vec{v}$

Momento angolare: $\vec{K} = r \wedge m\vec{\omega}$

m massa oggetto

v velocita' (vettore)

r distanza da un punto di riferimento

ω vel. angolare

$\wedge$ prodotto vettoriale

Equazioni cardinali della dinamica:

Conservazione della q^{ta} di moto:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_i F_i$$

F_i: i-esima forza applicata al corpo in rotazione.

Conservazione del momento angolare:

$$\dot{\vec{K}} = \sum_i r_i \wedge F_i$$

Dinamica del satellite

Conservazione q^{ta} di moto:

$$\dot{Q} = F_c + F_g + F_e$$

F_c: Forza centrifuga;
F_g: Forza gravitazionale;
F_e: Forza assiale esterna

$$\boxed{\ddot{d}(t) = d(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{\alpha}{d^2(t)} + u_1(t)}$$

Conservazione del momento angolare:

$$\dot{K} = d(t) \wedge u_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(md^2(t)\dot{\theta}) = d(t)u_2$$

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) = -\frac{2\dot{d}(t)\dot{\theta}(t)}{d(t)} + \frac{u_2}{d(t)}}$$

Spazio di Stato (I)

Consideriamo: $\tilde{x} = [d(t)\ \dot{d}(t)\ \theta(t)\ \dot{\theta}(t)]'$

$\tilde{y} = [d(t)\theta(t)]$

Il modello in spazio di stato risulta:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_1(t)\tilde{x}_4^2(t) - \frac{\alpha}{\tilde{x}_1^2(t)} \\ \tilde{x}_4(t) \\ \frac{-2\tilde{x}_2(t)\tilde{x}_4(t)}{\tilde{x}_1(t)} \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{x}_1(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t)$$

Il sistema non e' lineare !

Spazio di stato (II)

Scegliendo il punto di equilibrio:

$$\tilde{x}_e = [d_e\ 0\ \theta_e\ \omega_e]' \qquad \tilde{y}_e = [d_e \theta_e]'$$

$$\tilde{u}_e = [0\ 0]'$$

Possiamo linearizzare il sistema intorno a tale punto, dunque otteniamo il sistema lineare

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_e^2 + \frac{2\alpha}{d_e^3} & 0 & 0 & 2d_e\omega_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega_e}{d_e} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_e} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \tilde{y}(t) - \tilde{y}_e$$
$$u(t) = \tilde{u}(t) - \tilde{u}_e$$
$$x(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}_e$$

Osservazione

Il satellite puo' ruotare intorno alla terra ad una prefissata orbita senza l'ausilio dei propulsori ($u(t)$=0) se:

$$F_{\text{centrigua}} = F_{\text{attrazione}}$$

$$d_e\omega_e = \frac{\alpha}{d_e^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_e = \frac{\alpha}{d_e^3}$$

Dunque:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_e^2 & 0 & 0 & 2d_e\omega_e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega_e}{d_e} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_e} \end{bmatrix} u(t)$$

Simulazioni

Vedere Matlab.

Bibliografia

- A. Bertin, M. Poli, A. Vitale, **Fondamenti di Meccanica**, Progetto Leonardo.
- S. Rosati, **Fisica Generale**. Casa Editrice Ambrosiana.