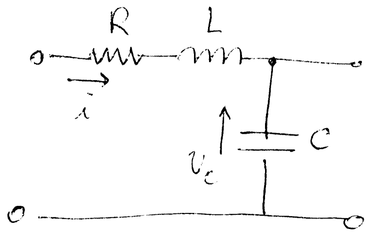
Es N° 1



$$\begin{cases} U = Ri + L\dfrac{di}{dt} + v_c \\ i = C\dfrac{dv_c}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{R}{L}i - \dfrac{v_c}{L} + \dfrac{u}{L} \\ \dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{1}{C}i \end{cases}$$

Rappresentazione di stato TC:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad x = \begin{bmatrix} i \\ v_c \end{bmatrix} \qquad y = [v_c]$$

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supponendo: $R = 2\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = 1\ F$ $\Rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

1) Il sistema è stabile? (Risposta: SI)

Calcolo gli autovalori:

$$\det(\lambda I - A) = \det\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda+2 & +1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda+2) + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

$\lambda_{1,2} = -1 \Rightarrow$ Il sistema è stabile

2) Progettare un regolatore dello stato $u(t) = -Kx(t)$ t.c. gli autovalori ad anello chiuso corrispondano ad una coppia di poli complessi e coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = 10$ e smorzamento $\zeta = 0.5$.

$$p_d(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 =$$

$$= s^2 + 10 s + 100 \Rightarrow p_d(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda + 100$$

$$\det\left[\lambda I - A - BK\right] = \det\left[\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \det\left[\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda + 2 - k_1 & 1 - k_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda + 2 - k_1) + (1 - k_2) =$$

$$= \lambda^2 + (2 - k_1)\lambda + (1 - k_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - k_1 = 10 \\ 1 - k_2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -8 \\ k_2 = -99 \end{cases}$$

Es N°2

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} X(k)$$

1) Il sistema e' raggiungibile? (Risposta: No)

Il sistema e' già in forma di decomposizione canonica di raggiungibilità. Si nota che la parte non raggiungibile e' $A_{\bar{R}} = -1/2$.

2) Il sistema e' stabile? (Risposta: No)

Il sistema ha un autovalore (raggiungibile) in modulo maggiore di 1.

3) Il sistema e' stabilizzabile? (Risposta: Si)

La parte non raggiungibile e' in modulo < 1 dunque il sistema e' stabilizzabile.

4) Trovare una legge di retroazione dello stato $u(k) = K x(k)$ tale che gli autovalori raggiungibili ad anello chiuso sono $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$ e $\lambda_2 = +\frac{1}{4}$.

Essendo il sistema non raggiungibile gli autovalori non raggiungibili non sono affetti dalla retroazione dello stato, dunque posso considerare solo $K_R = [k_1 \ k_2]$

Il polinomio desiderato: $p_d(\lambda) = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)\left(\lambda + \frac{1}{4}\right) = \lambda^2 - \frac{1}{16}$

$$\lambda I_2 - A_R - B_2 K_R = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda + 1 - k_1 & -k_2 \\ -k_1 & \lambda + 2 - k_2 \end{bmatrix}$$

Per cui $\det(\lambda I_2 - A_\Omega - B_\Omega K_\Omega) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 - k_1 & -k_2 \\ -k_1 & \lambda + 2 - k_2 \end{bmatrix} =$

$$= (\lambda + 1 - k_1)(\lambda + 2 - k_2) - k_1 k_2 =$$

$$= \lambda^2 + (2 - k_2)\lambda + (1 - k_1)\lambda + 2 - k_2 - 2k_1 + \cancel{k_1 k_2} - \cancel{k_1 k_2} =$$

$$= \lambda^2 + (2 - k_2)\lambda + (1 - k_1)\lambda + 2 - k_2 - 2k_1 =$$

$$= \lambda^2 + (3 - k_1 - k_2)\lambda + 2 - 2k_1 - k_2$$

da cui

$$\begin{cases} 0 = 3 - k_1 - k_2 \\ -\frac{1}{16} = 2 - 2k_1 - k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 3 - k_2 \\ 4 - \frac{1}{16} = k_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -0.9375 \\ k_2 = 3.9375 \end{cases}$$

Riprova in Matlab

<u>ES N°3</u> Esempio in Matlab: 2masse + molla-smorzatore

mass_2.m