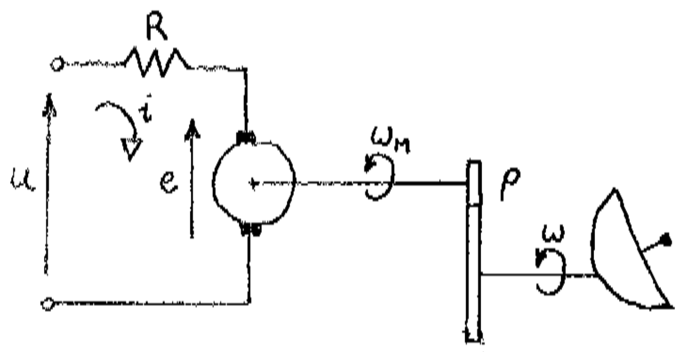
ESERCIZIO



$\rho = 20$

$k_m = 1$

$R = 1000$

$J = 0.02$

$\beta = 0.1$

- progettare un controllo in retroazione da (θ,ω) tale che l'antenna si porti alla posizione di riferimento $(0,0)$ con risposta nel tempo di tipo esponenziale smorzato $e^{-2t}\sin(3t+\varphi)$

$$\left.\begin{array}{l} u = Ri + e \\ e = k_m \omega_M \\ T_M = k_m i \\ \omega = \frac{1}{\rho}\omega_M \\ T = \rho T_M \\ J\dot{\omega} = T - \beta\omega \end{array}\right\}$$

$$T = \rho T_M = \rho k_m i = \rho k_m \frac{u-e}{R} = \rho k_m \frac{u - k_m\omega_M}{R}$$

$$= \rho k_m \frac{u - \rho k_m \omega}{R} = -\frac{\rho^2 k_m^2}{R}\omega + \frac{\rho k_m}{R} u$$

$$J\dot{\omega} = -\frac{\rho^2 k_m^2}{R}\omega + \frac{\rho k_m}{R} u - \beta\omega$$

$$\dot{\omega} + \frac{\beta + \frac{\rho^2 k_m^2}{R}}{J}\omega = \frac{\rho k_m}{JR} u \quad \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} + 25\,\omega = u}$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

Il sistema è in forma canonica di raggiungibilità.

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \; k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 - 25 \end{bmatrix}$$

$$p_d(\lambda) = (\lambda + 2 - 3j)(\lambda + 2 + 3j) = \lambda^2 + 4\lambda + 13$$

$$\Rightarrow k_1 = -13, \quad k_2 - 25 = -4 \Rightarrow k_2 = 21 \quad \Rightarrow K = [-13 \;\; 21]$$

ESERCIZIO

1

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(k)=Ax(k)+Bu(k)$$

$$y(k)=[1\ \ 1\ \ 0]\,x(k)=Cx(k)$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\ ;\ A^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & 0\end{bmatrix}$$

- $R=\left[B\ AB\ A^2B\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{2}{3}\\ 1 & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}$ ha rango 2!

  il sistema non è raggiungibile.

$\mathrm{Im}(R)=\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \beta\end{bmatrix}:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$ è l'insieme degli stati raggiungibili dall'origine

- $0=Ax+Bu_0 \Rightarrow 0=\begin{bmatrix}-x_3\\ -x_3\\ \frac{1}{3}(x_1+x_2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_0\\ u_0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}0=x_1+x_2\\ u_0=x_3\end{cases}$ ammette soluzione u_0 se e solo se $x_2=-x_1$.

  Insieme stati controllabili all'origine in un passo: $\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\ -\alpha\\ \beta\end{bmatrix}:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

- $0=A^2x+Bu_1+ABu_0=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}(x_1+x_2)\\ -\frac{1}{3}(x_1+x_2)\\ -\frac{2}{3}x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_1\\ u_1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{2}{3}u_0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}u_1=\frac{1}{3}(x_1+x_2)\\ u_0=x_3\end{cases}$ ammette sempre soluzione (u_1,u_0)

tutti gli stati sono controllabili all'origine in 2 passi

$\Rightarrow$ dunque il sistema è controllabile — è un modo diverso di verificarlo

(l'autovalore della parte non raggiungibile è 0)

- $\mathcal{O}=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0\end{bmatrix}$ ha rango 2!

  il sistema non è osservabile

$\ker(\mathcal{O})=\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\ -\alpha\\ 0\end{bmatrix}:\alpha\in\mathbb{R}\right\}$ è l'insieme degli stati indistinguibili dall'origine.

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 1\\ 0 & \lambda & 1\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \lambda\end{bmatrix}\qquad p_A(\lambda)=\lambda\left(\lambda^2+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\lambda=\lambda^3+\frac{2}{3}\lambda=\lambda\left(\lambda^2+\frac{2}{3}\right)$$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=j\sqrt{\frac{2}{3}},\ \lambda_3=-j\sqrt{\frac{2}{3}}$ A è diagonalizzabile

2

$$Ax=0 \Rightarrow \begin{cases} -x_3=0 \\ -x_3=0 \\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque $\ker(A)=\left\{\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha\in\mathbb{R}\right\}$

Dato che $C\,v_1=0$, il modo $(0)^k$ non è osservabile in uscita.

Senza calcolare v_2 e v_3, si può direttamente dedurre che il modo $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^k \sin\left(\frac{\pi}{2}k+\phi\right)$ è osservabile in uscita. Infatti $\ker(A)=\ker(O)$.

$\Rightarrow$ il sistema è ricostruibile

- Determinare una sequenza di ingressi che porti il sistema da $x_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ all'origine nel minimo numero di passi.

x_0 non appartiene all'insieme degli stati controllabili all'origine in un passo.
Possiamo invece portare lo stato nell'origine in 2 passi.

$$0=A^2x_0+Bu_1+ABu_0$$

(vedi pag. prec.)

$$\begin{cases} u_1=\frac{1}{3}(x_1+x_2)=\frac{2}{3} \\ u_0=x_3=1 \end{cases}$$

- funzione di trasferimento e sua realizzazione minima

$$G(z)=C(zI-A)^{-1}B=[1\ 1\ 0]\left(\begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ 0 & z & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & z \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=$$

$$=[1\ 1\ 0]\frac{1}{z\left(z^2+\frac{2}{3}\right)}\begin{bmatrix} z^2+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -z \\ -\frac{1}{3} & z^2+\frac{1}{3} & -z \\ \frac{1}{3}z & \frac{1}{3}z & z^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{[1\ 1\ 0]}{z\left(z^2+\frac{2}{3}\right)}\begin{bmatrix} z^2 \\ z^2 \\ \frac{2}{3}z \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2z^{\cancel{2}}}{\cancel{z}\left(z^2+\frac{2}{3}\right)}=\frac{2z}{z^2+\frac{2}{3}}$$

CANCELLAZIONE

$$A_{min}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix},\quad B_{min}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{min}=[0\ \ 2]$$

- determinare un controllo in retroazione dallo stato x che mandi qualsiasi condizione iniziale a zero in un numero finito di passi.

$$T = \left[\ \text{base di } Im(R) \quad \text{completamento}\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \to A_r$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] \to B_r$$

$$A_r + B_r K_r = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 - 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\tilde{k}_1 = 0$ e $\tilde{k}_2 = 1$, tutti gli autovalori di $A_r + B_r K_r$ sono in 0.

$$\tilde{K} = [\ K_r \ \ 0\ ] = [\ 0 \ \ 1 \ \ 0\ ] \quad ; \quad K = \tilde{K}T^{-1} = [0 \ 1 \ 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [\ 0 \ \ 0 \ \ 1\ ]$$

- si risolva il punto precedente qualora si abbiano solo misure dell'uscita y (usando un compensatore dinamico)

$$T = \left[\ \text{completamento} \quad \text{base di } \ker(O)\ \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \to A_o$$

$$\tilde{C} = CT = [1 \ \ 1 \ \ 0]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\ 1 \ \ 0 \,|\, 0\ ] \to C_o$$

$$A_o - L_o C_o = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\ell}_1 \\ \tilde{\ell}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\ell}_1 & -2 \\ \frac{1}{3} - \tilde{\ell}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

4

Se $\tilde{\ell}_1 = 0$ e $\tilde{\ell}_2 = \frac{1}{3}$, tutti gli autovalori di $A_o - L_o C_o$ sono in 0.

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} L_o \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad L = T\tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

COMPENSATORE DINAMICO

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = (A+BK-LC)\hat{x}(k) + Ly(k) \\ u(k) = K\hat{x}(k) \end{cases}$$