## ESERCIZIO 1

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(k) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) = Cx(k)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si vede che $x_1(k+1) = -\frac{1}{2}x_1(k)$
$\Rightarrow x_1(k) = (-\frac{1}{2})^k x_1(0)$

- $R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha rango $= 2$ → il sistema non è raggiungibile.

Una base di $Im(R)$ è $\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

ossia $Im(R) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

- Esiste una sequenza di ingressi che porta lo stato dall'origine in $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$?

  No, perché $x \notin Im(R)$

- Esiste una sequenza di ingressi che porta lo stato dall'origine in $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$?

  Sì, perché $x \in Im(R)$

  Si deve risolvere $x = RU$, dove $U = [u(2)\ u(1)\ u(0)]'$

$$\begin{cases} 1 = u_2 + \frac{3}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_0 \\ -1 = \frac{1}{2}u_2 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = -2 \\ u_1 + u_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u(0) = 1,\ u(1) = 1,\ u(2) = -2}$$

- $p_A(\lambda) = (\lambda + \frac{1}{2})\lambda(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -\frac{1}{2}$ il sistema è stabile

  $= \lambda(\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}) = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda$

- decomposizione canonica di raggiungibilità → in realtà già A è in forma canonica di raggiungibilità ...

$$T = [\underbrace{v_1\ v_2}_{\text{base di } Im(R)}\ \ w_1]$$

$w_1$: completamento a base di $\mathbb{R}^3$

Scegliendo $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ si ha:

- $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$ , $\tilde{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \hline 0 \end{array}\right]$

(permutazione della matrice identità)

le colonne di $\tilde{A}$ sono le coordinate dei vettori $Av_1, Av_2, Aw_1$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, w_1\}$

(permette di non calcolare $T^{-1}$)

$\tilde{B}$ = coordinate di $B$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, w_1\}$

$\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ è autovalore della parte non raggiungibile.

<u>Il sistema è stabilizzabile</u>, <u>ma non controllabile</u>.

La coppia $(A_r, B_r) = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)$ è raggiungibile.

$$A_r + B_r K_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{r1} & k_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k_{r1} & 1+k_{r2} \\ \frac{1}{2}k_{r1} & \frac{1}{2}k_{r2} \end{bmatrix}$$

$p(\lambda) = \lambda^2 - (1 + k_1 + \frac{1}{2}k_2)\lambda - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$

es. $p(\lambda) = \lambda^2$

$\Rightarrow k_1 = -\frac{2}{3}$, $k_2 =$ [illegible]

ad es. $k_{r1} = -1$, $k_{r2} = -1 \Rightarrow A_r + B_r K_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$ autovalori in $0$ e $-\frac{1}{2}$.

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_r & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \tilde{K} T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma(A+BK) = \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

- $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango $= 3$

<u>il sistema è osservabile</u>

Per la dualità:

$$\mathcal{O} g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3

$$T = \begin{bmatrix} g & Ag & A^2 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0,\ a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$p_D(\lambda) = \lambda^3 \quad \Rightarrow \quad d_0 = d_1 = d_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{L} = -\begin{bmatrix} a_0 - d_0 \\ a_1 - d_1 \\ a_2 - d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad ; \quad L = T\tilde{L} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L\left(y(k) - C\hat{x}(k)\right) \\ u(k) = K\hat{x}(k) + v(k) \end{cases}$$

- CONTROLLORE -

# ESERCIZIO

1

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k)\left(1 - x_2^2(k)\right) + x_3(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k)\left(1 + x_3^2(k)\right) + u(k) \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2(1 - x_2^2) + x_3 \\ x_3(1 + x_3^2) \end{bmatrix}$$

Progettare un controllo in retroazione dallo stato tale che l'origine sia un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3x_2^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1+3x_3^2 \end{bmatrix} \Rightarrow J_f(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↳ è in forma di Jordan (instabile)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ ha rango 3 $\Rightarrow$ $(A,B)$ è raggiungibile (anche con test di Popov)

$$hR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} h_3 = 0 \\ h_2 + h_3 = 0 \\ h_1 + 2h_2 + h_3 = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \end{cases} \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} h \\ hA \\ hA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 \Rightarrow a_0 = -1,\ a_1 = 3,\ a_2 = -3$$

$$p_0(\lambda) = \lambda^3 \Rightarrow d_0 = d_1 = d_2 = 0$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} a_0 - d_0 & a_1 - d_1 & a_2 - d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$K = \tilde{K} T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{u(k) = Kx(k) = -x_1(k) - 3x_2(k) - 3x_3(k)}$$

# ESERCIZIO 1.21



$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(k) = Ax(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Si determini una uscita dalla quale il solo modo $(-1)^k$ è osservabile.
Progettare uno stimatore dello stato tale che $|e(k)|$ è limitato per $k \to \infty$.

$$p_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+\frac{1}{2}) \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ -x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

molt. alg. = 2
molt. geom. = 1 $\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile; il sistema è instabile.

$$Av_2 = v_1 + \lambda_1 v_2 \Rightarrow (\lambda_1 I - A)v_2 = -v_1 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 = -1 \\ -x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 - 2 \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = 0 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad J^k = \begin{bmatrix} (-1)^k & k(-1)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^k \end{bmatrix} = T^{-1}A^kT$$

coordinate dei vettori $A^k v_1, A^k v_2, A^k v_3$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$:

$$A^k v_1 = (-1)^k v_1$$
$$A^k v_2 = k(-1)^{k-1} v_1 + (-1)^k v_2$$
$$A^k v_3 = (-\frac{1}{2})^k v_3$$

$$y(k) = CA^k x_0 = CTJ^kT^{-1}x_0 = \tilde{C}J^k z_0 =$$

$\tilde{C} = CT$

$z_0 = T^{-1}x_0$ coordinate di $x_0$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$

②

$$= \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^k & k(-1)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{01} \\ z_{02} \\ z_{03} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^k z_{01} + k(-1)^{k-1} z_{02} \\ (-1)^k z_{02} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^k z_{03} \end{bmatrix} = \left(\tilde{c}_1 z_{01} + \tilde{c}_2 z_{02}\right)(-1)^k + \tilde{c}_1 z_{02}\, k(-1)^{k-1} + \tilde{c}_3 z_{03}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Affinché il solo modo $(-1)^k$ sia osservabile deve essere: $\tilde{c}_1 = 0$, $\tilde{c}_3 = 0$

$$\Rightarrow \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

$$C = \tilde{C}\, T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & * & \\ 1 & 0 & 0 \\ & * & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NB - $A^k v_1 = \lambda_1^k v_1$

$A^k v_3 = \lambda_2^k v_3$

perché sono autovettori

$A v_2 = v_1 + \lambda_1 v_2$

$A^2 v_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_1 + \lambda_1^2 v_2 = 2\lambda_1 v_1 + \lambda_1^2 v_2$

$A^3 v_3 = 2\lambda_1^2 v_1 + \lambda_1^2 v_1 + \lambda_1^3 v_2 = 3\lambda_1^2 v_1 + \lambda_1^3 v_2$

$\vdots$

$A^k v_3 = \underbrace{k\lambda_1^{k-1}}\, v_1 + \lambda_1^k v_2$

evolve lungo l'autospazio!

Si osservi che:

$$y(k) = CA^k x_0 = CA^k\left(z_{01} v_1 + z_{02} v_2 + z_{03} v_3\right) =$$

$$= z_{01}\, CA^k v_1 + z_{02}\, CA^k v_2 + z_{03}\, CA^k v_3 =$$

$$= z_{01}(-1)^k C v_1 + z_{02}\left(k(-1)^{k-1} C v_1 + (-1)^k C v_2\right) + z_{03}\left(-\frac{1}{2}\right)^k C v_3 =$$

$$= \left(z_{01} C v_1 + z_{02} C v_2\right)(-1)^k + z_{02}\, C v_1\, k(-1)^{k-1} + z_{03}\, C v_3 \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Affinché il solo modo $(-1)^k$ sia osservabile deve essere: $C v_1 = 0$, $C v_3 = 0$

$$\begin{cases} c_2 - 2c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases} \qquad C = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq 0.$$

Dato che $v_1$ e $v_3$ sono autovettori, risulta anche $CAv_1 = 0$; $CAv_3 = 0$, $CA^2 v_1 = 0$, $CA^2 v_3 = 0$, ossia $v_1, v_3 \in \ker(\mathcal{O})$.

$$\Rightarrow \ker(\lambda_1 I - A) \subseteq \ker(\mathcal{O})$$

$$\ker(\lambda_2 I - A) \subseteq \ker(\mathcal{O})$$

$$A-LC = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\ell_1 & 0 & 0 \\ 1-\ell_2 & -1 & 0 \\ -\ell_3 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di $A-LC$ sono $\left\{-1-\ell_1, -1, -\frac{1}{2}\right\}$

$\ell_1 = -1 \Rightarrow$ un autovalore in 0.

$$\Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NB- il sistema non è rivelabile

$\Rightarrow$ stimatore: $\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + L\left(y(k) - C\hat{x}(k)\right) = (A-LC)\hat{x}(k) + Ly(k)$.

NB- $(A,C)$ è già in forma canonica di osservabilità!

Infatti: $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\{e_2, e_3\}$ è una base di $\ker(\mathcal{O})$, $\{e_1\}$ ne è completamento a base di $\mathbb{R}^3$.

$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \Rightarrow e(k+1) = (A-LC)e(k)$

$\sigma(A-LC) = \left\{0, -\frac{1}{2}, -1\right\}$ stabile

# ESERCIZIO

1

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u(k)=Ax(k)+Bu(k)$$

$$y(k)=[1\ \ 1\ \ 0]\,x(k)=Cx(k)$$

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&-\frac{2}{3}\end{bmatrix}\ ;\ A^3=\begin{bmatrix}0&0&\frac{2}{3}\\0&0&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&0\end{bmatrix}$$

$$R=\left[B\ AB\ A^2B\right]=\begin{bmatrix}1&0&-\frac{2}{3}\\1&0&-\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}$$ ha rango 2!

→ il sistema non è raggiungibile.

$\mathrm{Im}(R)=\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha\\\beta\end{bmatrix}:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$ è l'insieme degli stati raggiungibili dall'origine

- $0=Ax+Bu_0 \Rightarrow 0=\begin{bmatrix}-x_3\\-x_3\\\frac{1}{3}(x_1+x_2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_0\\u_0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}0=x_1+x_2\\u_0=x_3\end{cases}$ → ammette soluzione $u_0$ se e solo se $x_2=-x_1$

Insieme stati controllabili all'origine in un passo: $\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\-\alpha\\\beta\end{bmatrix}:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$

- $0=A^2x+Bu_1+ABu_0=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}(x_1+x_2)\\-\frac{1}{3}(x_1+x_2)\\-\frac{2}{3}x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}u_1\\u_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{2}{3}u_0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}u_1=\frac{1}{3}(x_1+x_2)\\u_0=x_3\end{cases}$ → ammette sempre soluzione $(u_1,u_0)$

tutti gli stati sono controllabili all'origine in 2 passi

⇒ dunque il sistema è controllabile → è un modo diverso di verificarlo

(l'autovalore della parte non raggiungibile è 0)

$$\mathcal{O}=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&-2\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&0\end{bmatrix}$$ ha rango 2!

→ il sistema non è osservabile

$\ker(\mathcal{O})=\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\-\alpha\\0\end{bmatrix}:\alpha\in\mathbb{R}\right\}$ è l'insieme degli stati indistinguibili dall'origine.

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda&1\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\lambda\end{bmatrix}\qquad p_A(\lambda)=\lambda\left(\lambda^2+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\lambda=\lambda^3+\frac{2}{3}\lambda=\lambda\left(\lambda^2+\frac{2}{3}\right)$$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=j\sqrt{\frac{2}{3}},\ \lambda_3=-j\sqrt{\frac{2}{3}}$ A è diagonalizzabile

2

$$Ax=0 \Rightarrow \begin{cases} -x_3=0 \\ -x_3=0 \\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dunque $\ker(A)=\left\{\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} : \alpha\in\mathbb{R}\right\}$

Dato che $C v_1 = 0$, il modo 0 non è osservabile in uscita.

Senza calcolare $v_2$ e $v_3$, si può direttamente dedurre che il modo $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^k \sin\left(\frac{\pi}{2}k+\phi\right)$ è osservabile in uscita. Infatti $\ker(A)=\ker(O)$, e ...

- Determinare una sequenza di ingressi che porti il sistema da $x_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ all'origine nel minimo numero di passi.

$x_0$ non appartiene all'insieme degli stati controllabili all'origine in un passo. Possiamo invece portare lo stato nell'origine in 2 passi.

$$0=A^2x_0+Bu_1+ABu_0$$

(vedi pag. prec.)

$$\begin{cases} u_1=\frac{1}{3}(x_1+x_2)=\frac{2}{3} \\ u_0=x_3=1 \end{cases}$$

- funzione di trasferimento e sua realizzazione minima

$$G(z)=C(zI-A)^{-1}B=[1\ 1\ 0]\left(\begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ 0 & z & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & z \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=$$

$$=[1\ 1\ 0]\frac{1}{z\left(z^2+\frac{2}{3}\right)}\begin{bmatrix} z^2+\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -z \\ -\frac{1}{3} & z^2+\frac{1}{3} & -z \\ \frac{1}{3}z & \frac{1}{3}z & z^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{[1\ 1\ 0]}{z\left(z^2+\frac{2}{3}\right)}\begin{bmatrix} z^2 \\ z^2 \\ \frac{2}{3}z \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2z^{\cancel{2}}}{\cancel{z}\left(z^2+\frac{2}{3}\right)}=\frac{2z}{z^2+\frac{2}{3}}$$

CANCELLAZIONE

$$A_{min}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix},\quad B_{min}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{min}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$