Elementi di Modellistica

Introduzione

Obiettivo: Sviluppare un modello matematico di un sistema fisico per il progetto di controllori.

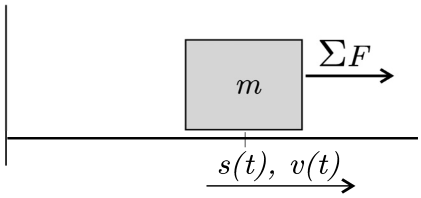
Un modello fisico per il controllo deve essere:

- ***descrittivo***: in grado di catturare le principali caratteristiche del modello;
- ***semplice***: più semplice è il modello più semplice è il controllore sintetizzato.

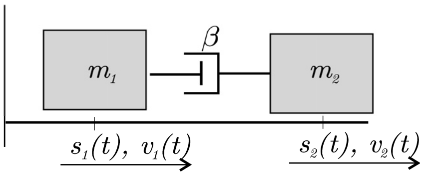
Si ricordi comunque:

> "Make everything as simple as possible, but not simpler" (A. Einstein)

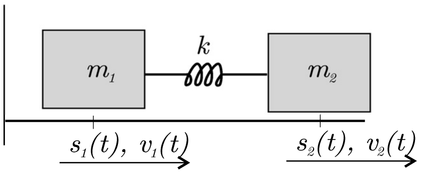
Sistemi Meccanici - Traslazione



$$\Sigma F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$ **massa**



$$F_1 = \beta(v_2 - v_1) = -F_2$$ **attrito viscoso**

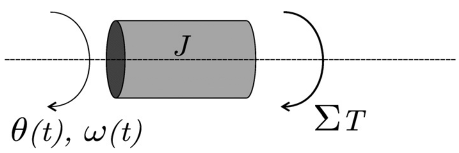


$$F_1 = k(s_2 - s_1) = -F_2$$ **accoppiamento elastico**

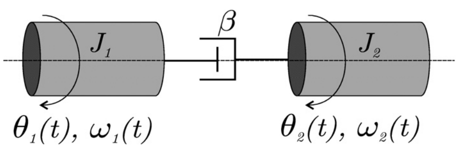
s_i, v_i: posizione e velocità del corpo #i rispetto ad un sistema di riferimento fisso (inerziale)

F_i: forza agente sul corpo #i P=Fv: potenza meccanica

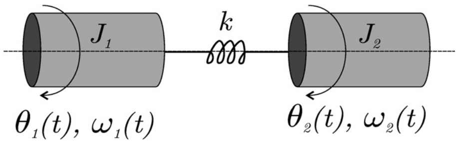
Sistemi Meccanici - Rotazione



$$\Sigma T = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$ **inerzia**



$$T_1 = \beta(\omega_2 - \omega_1) = -T_2$$ **attrito viscoso**



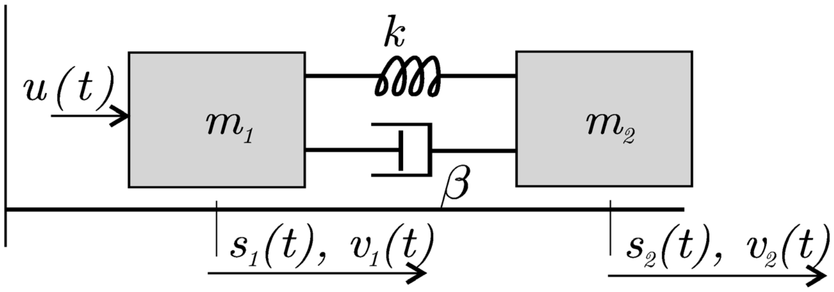
$$T_1 = k(\theta_2 - \theta_1) = -T_2$$ **accoppiamento elastico**

θ_i, ω_i: posizione e velocità angolari del corpo #i rispetto ad un sistema di riferimento fisso

T_i: coppia agente sul corpo #i P=$T\omega$: potenza meccanica

Sistemi Meccanici

Esempio: 2 masse accoppiate da molla-smorzatore



Ipotesi: superficie senza attrito

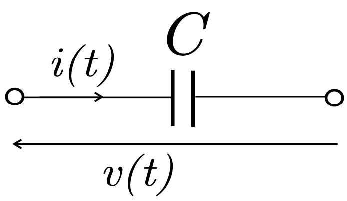
Dinamica della massa m_1

$$m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = u(t) + k(s_2 - s_1) + \beta(v_2 - v_1)$$

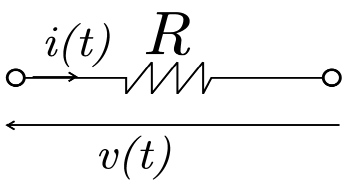
Dinamica della massa m_2

$$m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} = -k(s_2 - s_1) - \beta(v_2 - v_1)$$

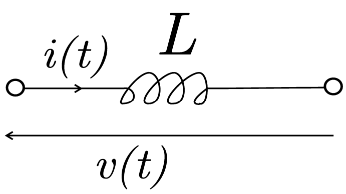
Sistemi Elettrici



$$i = C\frac{dv}{dt}$$ **capacità**



$$v = Ri$$ **resistenza**



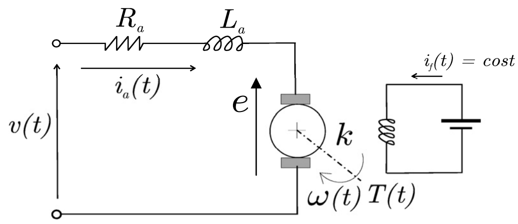
$$v = L\frac{di}{dt}$$ **induttanza**

v: tensione ai capi del componente
i: corrente attraverso il componente

$P{=}vi$: potenza elettrica

Sistemi Elettrici-Motori DC

Controllo in tensione di armatura



$$\phi = k_f i_f = \text{cost}$$

$$e = k\omega$$

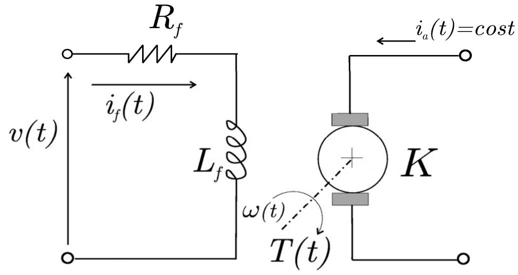
$$T = k i_a$$

$$v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e$$

ω: velocità angolare

T: coppia prodotta

Controllo in corrente di campo



$$T = K i_f$$

$$v = L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f$$

L_f: induttanza di campo

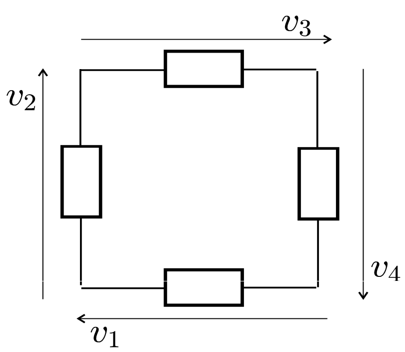
R_f: resistenza di campo

i_f: corrente di campo

Sistemi Elettrici

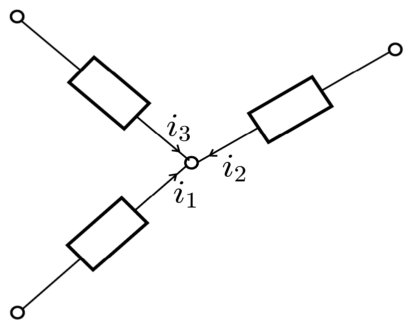
Strumenti di analisi: Leggi di Kirchhoff

equilibrio delle tensioni alla maglia



$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

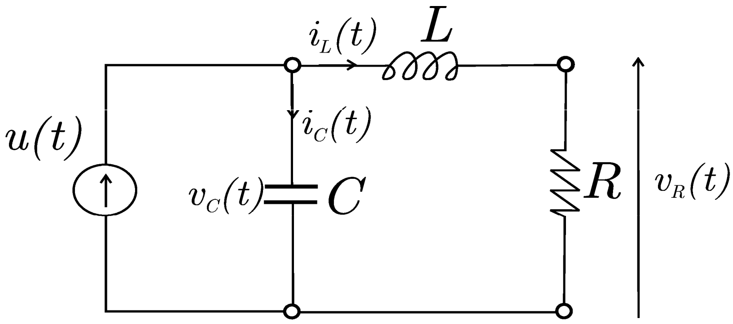
equilibrio delle correnti al nodo



$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Sistemi Elettrici

Esempio: circuito elettrico



Legge di Kirchhoff ai nodi: $$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = u(t) - i_L$$

Legge di Kirchhoff alle maglie: $$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L - v_c = 0$$

Sistemi Termici

θ	Temperatura
Q	Calore
P	Potenza termica o flusso di calore
M	Massa
c_s	Calore specifico
R	Resistenza termica fra due corpi

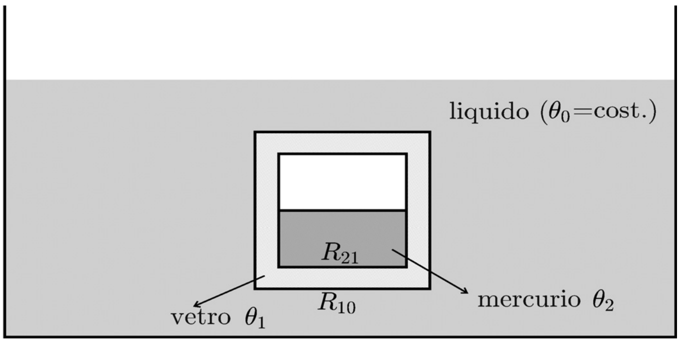
Relazioni:

- $P = \frac{dQ}{dt}$ flusso di calore
- $P = C\frac{d\theta}{dt}$ variazione di temperatura
- $P = \frac{\theta_1 - \theta_2}{R}$ flusso di calore fra due corpi

Analogo elettrico:

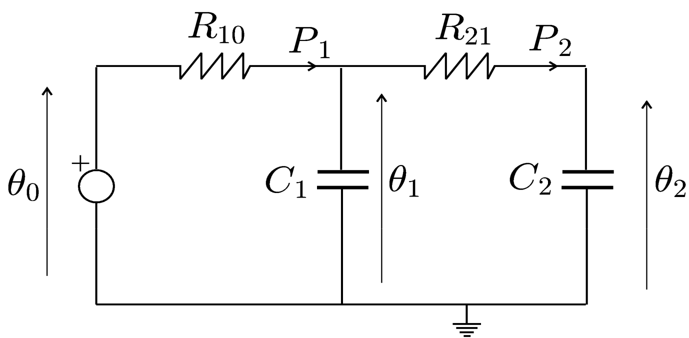
- Per ogni capacità termica $C = c_s M$, associa un condensatore C collegato a massa (=temperatura di riferimento, e.g. 0 K).
- Per ogni coppia (i,j) di corpi che si scambiano calore, associa una resistenza elettrica R_{ij}.
- Per ogni generatore di calore, associa un generatore di corrente.
- Tensione=temperatura, corrente=flusso di calore.
- Nota: non ci sono "induttanze termiche" ($\Rightarrow$ no oscillazioni!)

Esempio: Termometro



θ_0	Temperatura liquido da misurare
θ_1	Temperatura vetro
θ_2	Temperatura mercurio
R_{10}	Resistenza termica fra liquido e vetro
R_{21}	Resistenza termica fra vetro e mercurio

Equivalente elettrico:



Scelta variabili di stato

Regola di massima

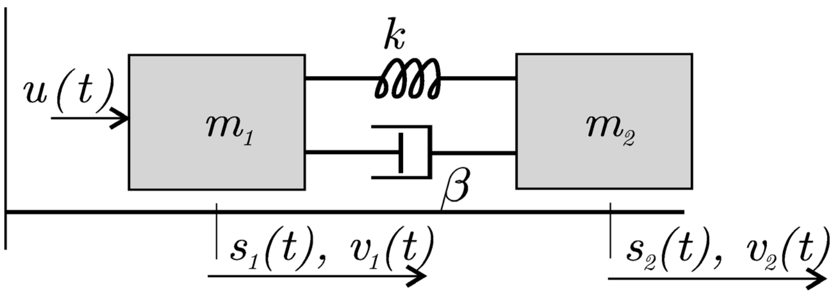
num. variabili di stato necessarie
=
num. elementi immagazzinatori
di energia

Esempi:

Sistemi meccanici		**Sistemi elettrici**	
massa	(en. cinetica)	condensatore	(en. potenziale elettrica)
molla	(en. elastica)	induttanza	(en. potenziale magnetica)
~~attrito viscoso~~		~~resistenza~~	

Sistemi Meccanici

Esempio: 2 masse accoppiate da molla-smorzatore



Ipotesi: superficie senza attrito

Dinamica della massa m_1

$$m_1\frac{d^2s_1}{dt^2} = u(t) + k(s_2 - s_1) + \beta(v_2 - v_1)$$

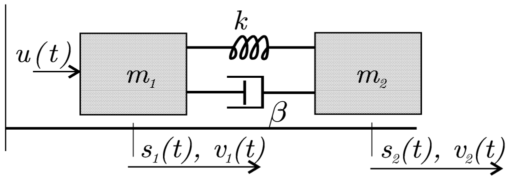
Dinamica della massa m_2

$$m_2\frac{d^2s_2}{dt^2} = -k(s_2 - s_1) - \beta(v_2 - v_1)$$

Sistemi Meccanici

Misura: v_2 = velocità della seconda massa

Scelta variaribili:



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$y = x_3$$

$$\dot{x_1} = \dot{s_2} - \dot{s_1} = x_3 - x_2$$

$$\dot{x_2} = \frac{k}{m_1}x_1 + \frac{\beta}{m_1}(x_3 - x_2) + \frac{1}{m_1}u(t)$$

$$\dot{x_3} = -\frac{k}{m_2}x_1 - \frac{\beta}{m_2}(x_3 - x_2)$$

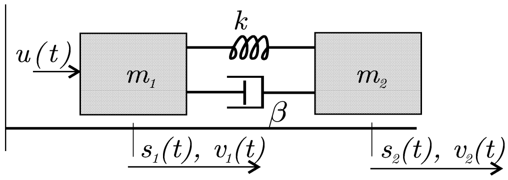
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{k}{m_1} & -\frac{\beta}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{\beta}{m_2} & -\frac{\beta}{m_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Sistemi Meccanici

Misura: s_2 =posizione della seconda massa

Scelta variabili:



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ v_1 \\ s_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \dot{s_1} \\ s_2 \\ \dot{s_2} \end{bmatrix}$$

$$y = x_3$$

$$\dot{x_1} = \dot{s_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_1}x_3 - \frac{\beta}{m_1}x_2 + \frac{\beta}{m_1}x_4 + u(t)$$

$$\dot{x_3} = \dot{s_2} = x_4$$

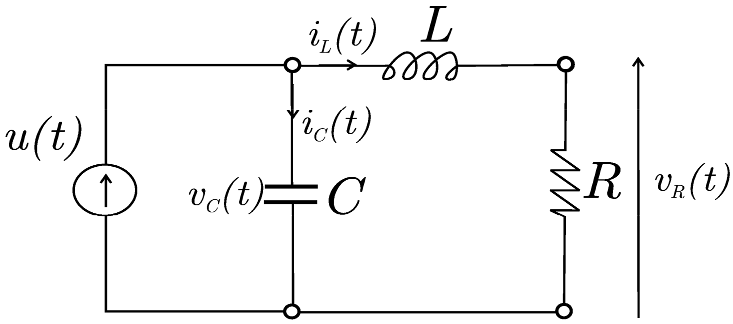
$$\dot{x_4} = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_3 + \frac{\beta}{m_2}x_2 - \frac{\beta}{m_2}x_4 + u(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{\beta}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{\beta}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & -\frac{\beta}{m_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Sistemi Elettrici

Esempio: circuito elettrico



Legge di Kirchhoff ai nodi: $$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = u(t) - i_L$$

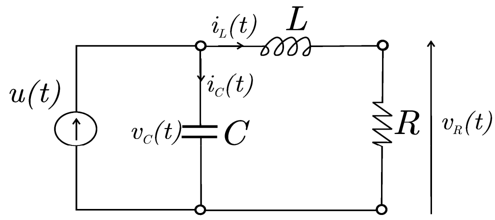
Legge di Kirchhoff alle maglie: $$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L - v_c = 0$$

Uscita del sistema: $$v_R = Ri_L(t)$$

Sistemi Elettrici

Scelta variabili: $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$y = v_R$$



$$\begin{aligned} C\frac{dv_C}{dt} &= u(t) - i_L \\ L\frac{di_L}{dt} &= -Ri_L + v_c \\ v_R &= Ri_L(t) \end{aligned}$$

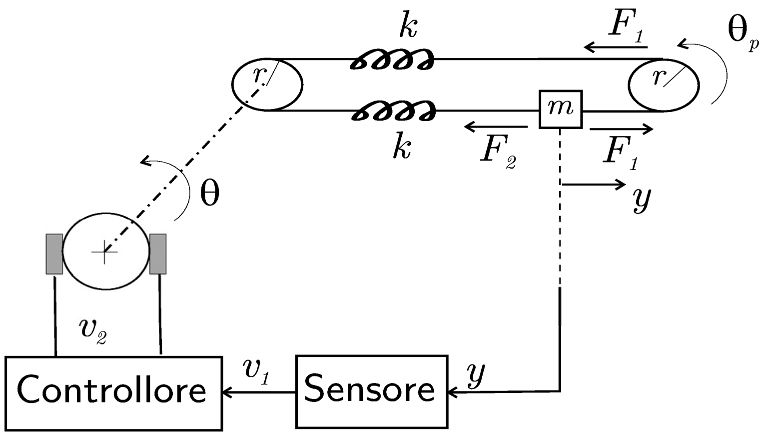
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 \\ y &= Rx_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Esercizio di modellistica

Esempio: Stampante a cinghia (ink-jet)

k	costante della cinghia
r	raggio puleggia
θ	rotazione angolare motore
θ_p	rotazione angolare puleggia dx
m	massa della testina di stampa
y	posizione testina di stampa
F_i	tensioni interne alla cinghia
v_2	tensione comando motore

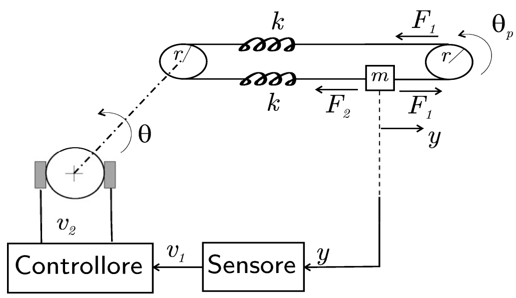


La posizione della testina è rilevata da un sensore.

La tensione v_1 di uscita del sensore è utilizzata dal controllore per regolare la posizione della testina di scrittura.

Esercizio di modellistica

Dinamiche traslatorie del sistema



Noto che $y = r\theta_p$

si ha che $F_1 = k(r\theta - r\theta_p) = k(r\theta - y)$

$F_2 = k(y - r\theta)$

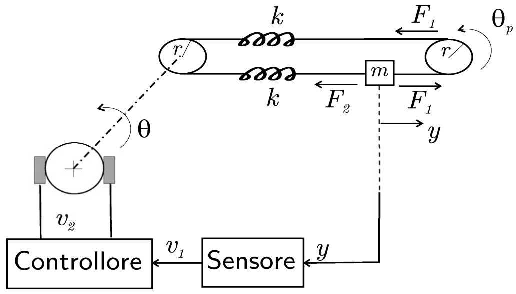
La forza applicata sulla massa m è $F_1 - F_2 = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$

percui $F_1 - F_2 = 2k(r\theta - y) = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$

Scegliendo come variabili di stato $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2kr}{m}x_3 - \frac{2k}{m}x_1, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_4$$

Esercizio di modellistica



Dinamica rotatoria del motore

Coppia del motore $\quad T_m = K i_f$

$$i_f = \frac{v_2}{R_f} \quad \Longrightarrow \quad T_m = \frac{K}{R_f} v_2$$

R_f resistenza di campo

L_f si assume trascurabile

$$T_m = J\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} + r(F_1 - F_2)$$

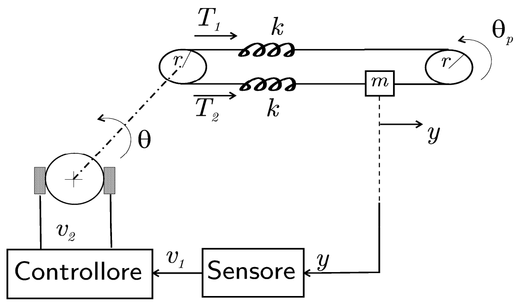
J=J_m+J_p inerzia motore-puleggia

f coefficiente d'attrito puleggia

da cui si ha:

$$\frac{dx_4}{dt} = \frac{T_m}{J} - \frac{f}{J}x_4 + \frac{2kr^2}{J}x_3 - \frac{2kr}{J}x_1$$

Esercizio di modellistica



e ricordando che $\quad T_m = \frac{K}{R}v_2$

si ha

$$\frac{dx_4}{dt} = -\frac{2kr}{J}x_1 + \frac{2kr^2}{J}x_3 - \frac{f}{J}x_4 + \frac{K}{RJ}v_2$$

perciò il sistema dinamico risulta:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m} & 0 & \frac{2kr}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2kr}{J} & 0 & \frac{2kr^2}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{R_f J} \end{bmatrix} v_2 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Riferimenti bibliografici

Control Systems Engineering, I.J. Nagrath, M. Gopal. cap.2, pagg. 13-60.

Presente in biblioteca: 629/8/13

Fisica I e II, C. Mencuccini, V. Silvestrini.

Presenti in biblioteca: 530/6-1, 530/6-2