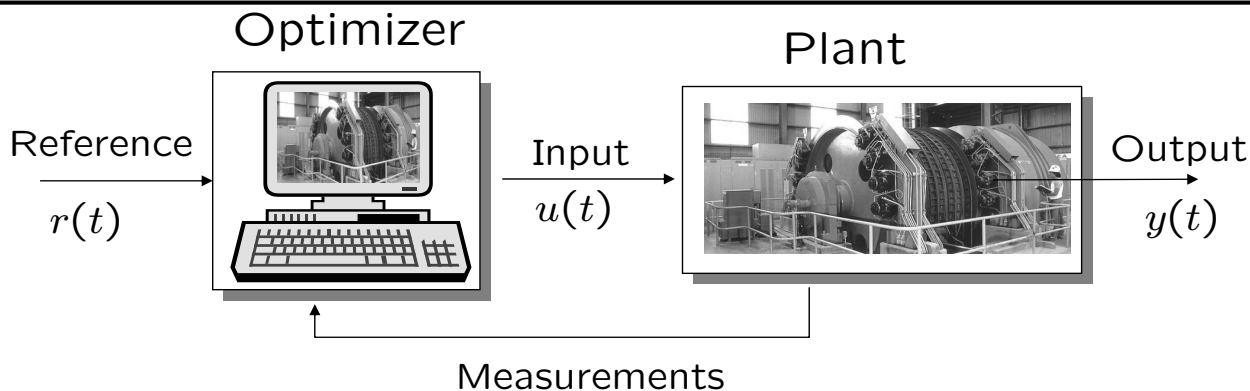


Controllo Predittivo (cenni)

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Model Predictive Control



- **MODEL**: è richiesto un modello del processo da controllare per prevedere il comportamento futuro del processo stesso
- **PREDICTIVE**: l'ottimizzazione è basata sull'evoluzione futura del processo (predetta tramite il modello)
- **CONTROL**: serve per il controllo di complessi sistemi vincolati, con molti ingressi e molte uscite

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Filosofia *Receding Horizon*

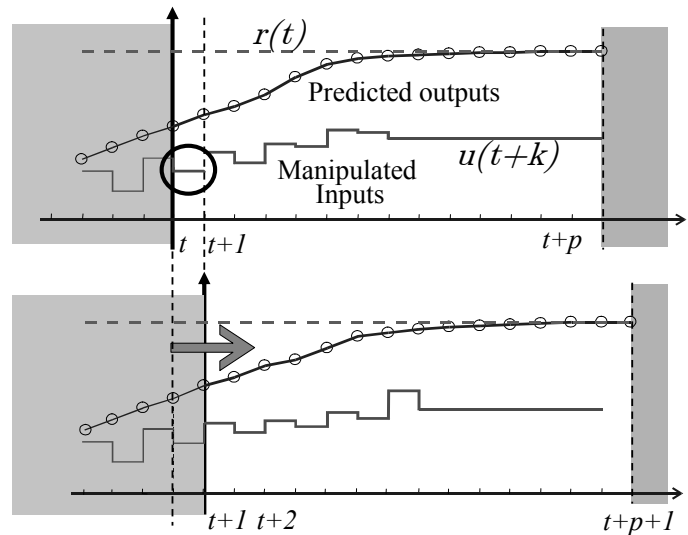
- Al tempo t :

Si risolve un problema di controllo ottimo su un orizzonte futuro di p passi:

- minimizza $f(|y - r|, |u|)$
- soggetto ai vincoli

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$$

$$y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$$



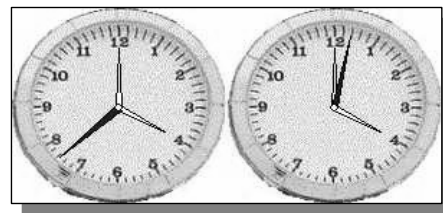
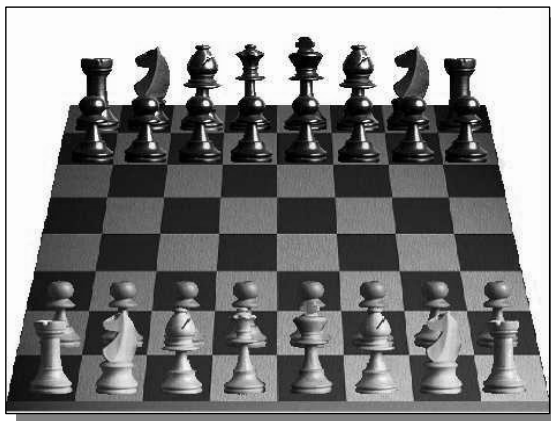
- Si applica soltanto la prima della sequenza ottima di mosse: $u^*(t)$
- Ottenute nuove misure, si ripete l'ottimizzazione al tempo $t+1$

Vantaggio dell'ottimizzazione in linea: **FEEDBACK!**

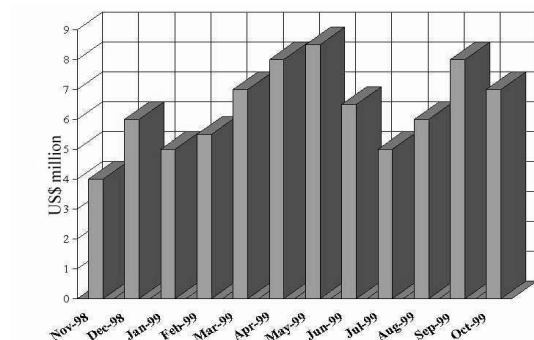
Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Receding Horizon - Esempi

- MPC is like playing chess !



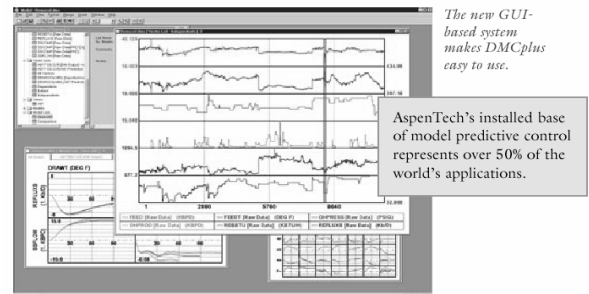
- MPC and investing money



Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

- History: 1979 Dynamic Matrix Control (DMC) by Shell (Motivation: multivariable, constrained)

DMCplus™



The new GUI-based system makes DMCplus easy to use.

AspenTech's installed base of model predictive control represents over 50% of the world's applications.

New Generation Controller
DMCplus is the "new generation" multivariable control product devel-

optimization technology and thus also for AspenTech's plant-wide optimiza-

- Present Industrial Practice
 - linear impulse/step response models
 - sum of squared errors objective function
 - executed in supervisory mode
- Particularly suited for problems with
 - many inputs and outputs
 - constraints on inputs, outputs, states
 - varying objectives and limits on variables (e.g. because of faults)

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Controllo ottimo LQ non vincolato

- Modello lineare:
$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{matrix}$$

- Obiettivo: trova la sequenza $u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)$ che minimizza

$$J(x(0), U) = \sum_{k=0}^{N-1} x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k) + x'(N)Px(N)$$

$$U = [u'(0) \ u'(1) \ \dots \ u'(N-1)]'$$

$u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(N-1)$ è la sequenza di ingressi che porta lo stato verso l'origine $x=0$ in maniera "ottima"

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Controllo ottimo LQ non vincolato

Si è visto che il problema di controllo ottimo LQ può essere riscritto come

$$\min J(x(0), U) = \frac{1}{2}U'HU + x'(0)FU + \frac{1}{2}x'(0)Yx(0)$$

L'ottimo viene ottenuto azzerando il gradiente:

$$\nabla_U J(x(0), U) = HU + F'x(0) = 0, \text{ e quindi}$$

$$U^* = \begin{bmatrix} u^*(0) \\ u^*(1) \\ \vdots \\ u^*(T-1) \end{bmatrix} = -H^{-1}F'x(0)$$

(questo metodo è conosciuto anche come "batch least squares")

Alternativa: trovare la soluzione ottima utilizzando le iterazioni di Riccati (programmazione dinamica)

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

MPC Lineare

- Modello lineare:
$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array}$$
- Vincoli:
$$\begin{cases} u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \\ y_{\min} \leq y(t) \leq y_{\max} \end{cases}$$
- Problema di controllo ottimo (con indice di prestazione quadratico):

$$\begin{aligned} \min_{u(0), \dots, u(N-1)} & \sum_{k=0}^{N-1} [x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k)] + x'(N)Px(N) \\ \text{s.t.} & \quad u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \quad k = 0, \dots, N-1 \\ & \quad y_{\min} \leq y(k) \leq y_{\max}, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$Q = Q' \succeq 0, \quad R = R' \succ 0, \quad P \succeq 0$$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

- Sostituzione:
$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u(k-1-j)$$

- Problema di ottimizzazione:

$$V(x(0)) = \frac{1}{2} x'(0) Y x(0) + \min_U \frac{1}{2} U' H U + x'(0) F U \quad (\text{quadratico})$$

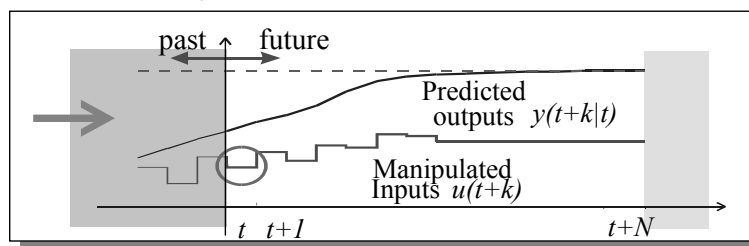
$$\text{s.t. } GU \leq W + Sx(0) \quad (\text{lineare})$$

Convex QUADRATIC PROGRAM (QP)

- $U \triangleq [u'(0), \dots, u'(N-1)]' \in \mathbb{R}^s$, $s \triangleq Nm$, è il vettore di ottimizzazione
- $H = H' \succ 0$, e H, F, Y, G, W, S sono ottenuti dai pesi Q, R, P e dalle matrici del modello A, B, C

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Algoritmo MPC



Al tempo t :

- Misura o stima lo stato corrente $x(t)$
- Risolvi il problema QP
$$\min_U \frac{1}{2} U' H U + x'(t) F U$$

s.t. $GU \leq W + Sx(t)$

e sia $U = \{u^*(0), \dots, u^*(N-1)\}$ la soluzione (=controllo ottimo vincolato ad anello aperto su orizzonte finito)

- Applica soltanto $u(t) = u^*(0)$ al processo e scarta gli ingressi ottimi futuri rimanenti
- Vai al tempo $t+1$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Formulazione incrementale per tracking

- Obiettivo: portare l'uscita $y(t)$ sul valore di riferimento $r(t)$
- Idea: parametrizzare il problema mediante gli incrementi dell'ingresso

$$\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$$

- Modello lineare:
$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

- Predizione:

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^i Bu(k-1-i) \quad k = 1, \dots, N$$

$$u(k) = u(-1) + \sum_{i=0}^{k-1} \Delta u(i) \quad k = 0, \dots, N-1$$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

MPC Lineare - Tracking

- Problema di controllo ottimo (indice di prestazione quadratico)

$$\min_{\Delta U} \sum_{k=0}^{N-1} \|W^y(y(k+1) - r(t))\|^2 + \|W^{\Delta u} \Delta u(k)\|^2$$
$$[\Delta u(k) \triangleq u(k) - u(k-1)]$$

$$\text{subj. to } u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u(k) \leq \Delta u_{\max}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$y_{\min} \leq y(k) \leq y_{\max}, \quad k = 1, \dots, N$$

- Problema di ottimizzazione

$$\min_{\Delta U} J(\Delta U, x(t)) = \frac{1}{2} \Delta U' H \Delta U + [x'(t) \quad r'(t) \quad u'(t-1)] F \Delta U$$

$$\text{s.t. } G \Delta U \leq W + K \begin{bmatrix} x(t) \\ r(t) \\ u(t-1) \end{bmatrix}$$

Convex QUADRATIC PROGRAM (QP)

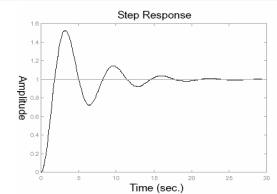
Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

MPC Lineare - Esempio

- Processo: $G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}$

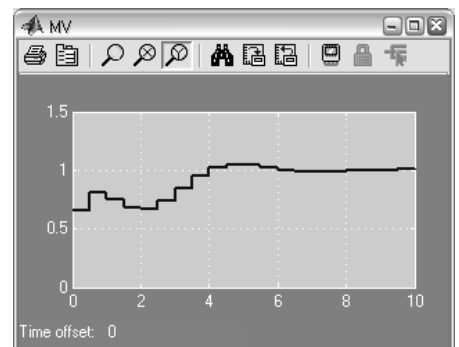
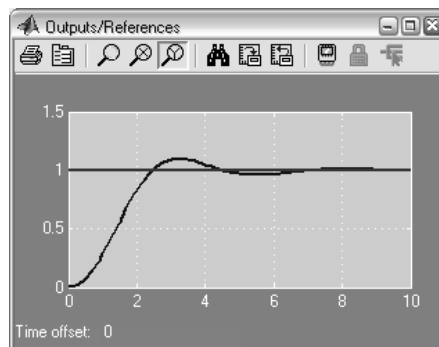
- Modello: $T_s = 0.5$ sec.

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 0.7115 & -0.4345 \\ 0.4345 & 0.8853 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$



- Indice di prestazione: $J(U, t) \triangleq \sum_{k=0}^9 [y(t+k+1|t) - r(t)]^2 + \Delta u^2(t)$

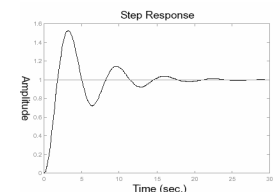
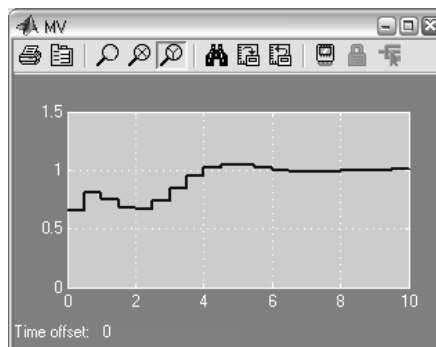
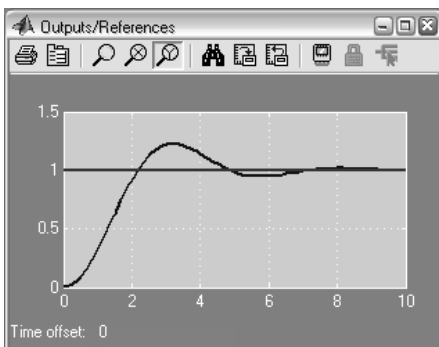
- Prestazioni ad anello chiuso:



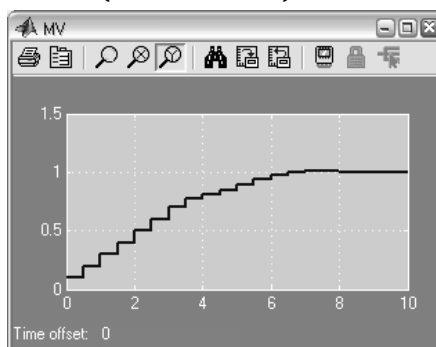
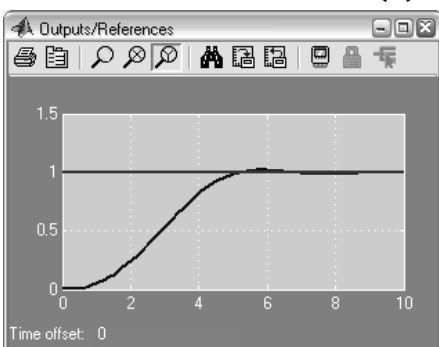
Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

MPC Lineare - Esempio

- Vincolo: $0.8 \leq u(t) \leq 1.2$ (saturazione dell'ingresso)



- Vincolo: $-0.2 \leq \Delta u(t) \leq 0.2$ (slew-rate)

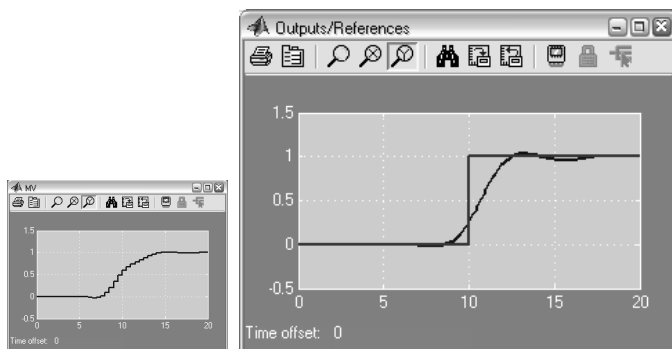


Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

$$\min_{\Delta U} \sum_{k=0}^{N-1} \|W^y(y(t+k+1|t) - r(t+k+1|t))\|^2 + \|W^{\Delta u} \Delta u(t)\|^2$$

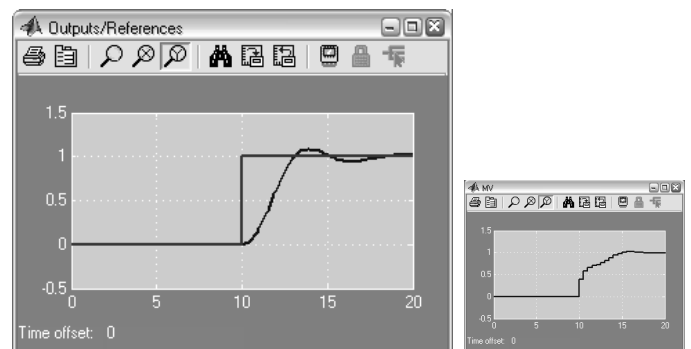
- I campioni futuri del riferimento sono (parzialmente) noti in anticipo:

$$r(t+k|t) = \begin{cases} r(t+k) & \text{if } k=0, \dots, N_r \\ r(t+N_r) & \text{if } k > N_r \end{cases}$$



- I campioni futuri del riferimento non sono noti in anticipo (il controllore è causale):

$$r(t+k|t) \equiv r(t), \quad \forall k \geq 0$$



Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

MPC vs. Controllo Convenzionale

Per sistemi singolo ingresso/singola uscita con vincoli di saturazione:

si possono ottenere prestazioni del tutto equivalenti utilizzando tecniche convenzionali più semplici (ad esempio PID + anti-windup)

TUTTAVIA

il controllo MPC permette (in linea di principio) una UNIFORMITÀ nell'approcciare il problema di controllo (cioè la stessa tecnica si può applicare ad un range di problemi molto diversi), con conseguenti riduzione dei costi di progettazione del controllore.

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Caratteristiche del controllo MPC

- Controllo di sistemi multivariabili soggetti a vincoli, anche “non quadrati” (numero di ingressi \neq numero di uscite)
- Compensazione ottima dei ritardi
- Azione anticipativa sul riferimento
- Azione integrale per l'inseguimento di riferimenti costanti senza offset

Prezzo da pagare:

- Carico computazionale in linea (programmazione quadratica)
- Per sistemi di piccole dimensioni e/o molto veloci, le tecniche convenzionali sono più appropriate (ad esempio PID + anti-windup)
- Nuove possibilità per l'MPC: soluzioni esplicite lineari a tratti, che non richiedono più l'ottimizzazione in linea

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Stabilità ad anello chiuso dell'MPC

$$\begin{aligned} \min_U J(U, t) &= \sum_{k=0}^{N-1} \{y'(t+k|t)Qy(t+k|t) + u'(t+k)Ru(t+k)\} \\ \text{subj. to} \quad &y_{\min} \leq y(t+k) \leq y_{\max} \\ &u_{\min} \leq u(t+k) \leq u_{\max} \end{aligned}$$

$$Q=Q' \geq 0, R=R' > 0$$

- Le proprietà di stabilità dipendono in maniera abbastanza complessa dai parametri dell'MPC ($N, Q, R, u_{\min}, u_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$)
- È possibile scegliere i pesi del funzionale di costo e/o imporre dei vincoli in maniera da garantire la stabilità ad anello chiuso

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Teorema Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

e la legge di controllo MPC basata sul problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \min_U J(U, t) &= \sum_{k=0}^{N-1} \{y'(t+k|t)Qy(t+k|t) + u'(t+k)Ru(t+k)\} \\ \text{subj. to} & \quad y_{min} \leq y(t+k) \leq y_{max} \\ & \quad u_{min} \leq u(t+k) \leq u_{max} \end{aligned}$$

Si assuma che il problema di ottimizzazione sia risolvibile al tempo $t = 0$. Allora, sia per $N \rightarrow \infty$ che imponendo il vincolo aggiuntivo $x(t+N|t) = 0$, per ogni $R > 0, Q \geq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) &= 0, \end{aligned}$$

e che i vincoli sono soddisfatti. Inoltre, se $(Q^{\frac{1}{2}}C, A)$ è una coppia rivelabile, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

(Keerthi and Gilbert, 1988)(Bemporad *et al.*, 1994)

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Esempio: AFTI-16

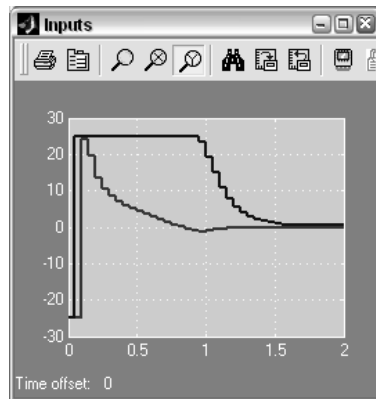
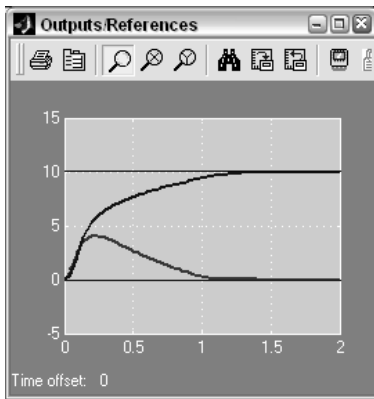
• Modello linearizzato:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -0.0151 & -60.5651 & 0 & -32.174 \\ -0.0001 & -1.3411 & .9929 & 0 \\ .00018 & 43.2541 & -.86939 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2.516 & -13.136 \\ -1.689 & -2.514 \\ -17.251 & -1.5766 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x, \end{cases}$$



- Inputs: elevator and flaperon angle
- Outputs: attack and pitch angle
- Sampling time: $T_s = .05$ s (+ zero-order hold)
- Constraints: max 25° on both angles
- Open-loop response: unstable
(open-loop poles: $-7.6636, -0.0075 \pm 0.0556j, 5.4530$)

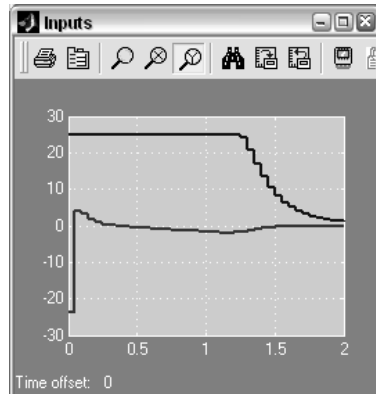
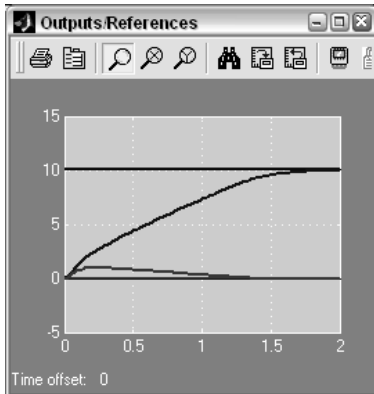
Esempio: AFTI-16



$$N_y = 10, N_u = 3,$$

$$w_y = \{10, 10\}, w_{\delta u} = \{.01, .01\},$$

$$u_{\min} = -25^\circ, u_{\max} = 25^\circ$$



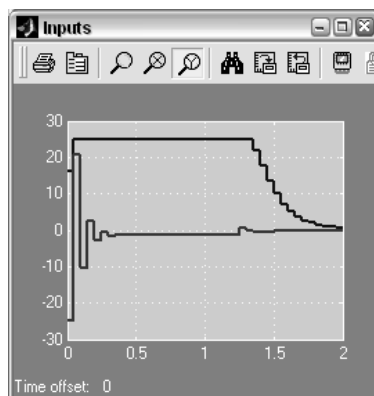
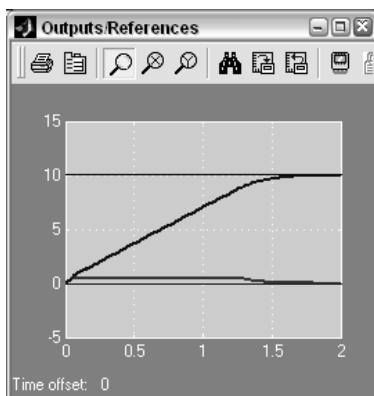
$$N_y = 10, N_u = 3,$$

$$w_y = \{100, 10\}, w_{\delta u} = \{.01, .01\},$$

$$u_{\min} = -25^\circ, u_{\max} = 25^\circ$$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Esempio: AFTI-16



$$N_y = 10, N_u = 3,$$

$$w_y = \{10, 10\}, w_{\delta u} = \{.01, .01\},$$

$$u_{\min} = -25^\circ, u_{\max} = 25^\circ,$$

$$y_{1,\min} = -0.5^\circ, y_{1,\max} = 0.5^\circ$$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

$$\min_{\Delta U} \sum_{k=0}^{N-1} \|W^y(y(t+k+1|t) - r(t))\|^2 + \|W^{\Delta u} \Delta u(t)\|^2$$

subj. to $u_{\min} \leq u(t+k) \leq u_{\max}, k = 0, \dots, N-1$
 $\Delta u_{\min} \leq \Delta u(t+k) \leq \Delta u_{\max}, k = 0, \dots, N_u-1$
 $y_{\min} \leq y(t+k|t) \leq y_{\max}, k = 1, \dots, N$
 $\Delta u(t+k) = 0, k = N_u, \dots, N-1$

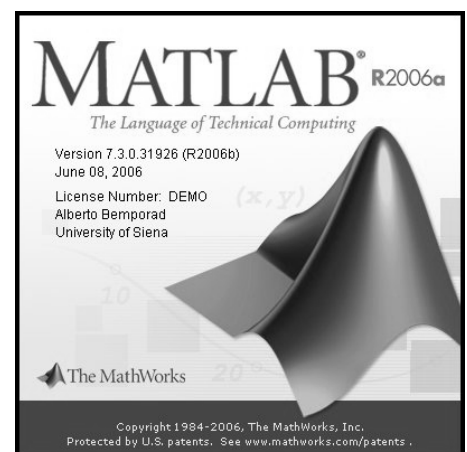
- **Pesi:** maggiore è il rapporto $W^y/W^{\Delta u}$, più aggressivo è il controllore (come nel caso LQR)
- **Orizzonte di controllo:** maggiore è N_u , maggiore è il numero di gradi di libertà che si ha a disposizione, quindi più "ottimale" la performance, ma maggiore è la complessità del controllore
- **Orizzonte di predizione:** più piccolo è N , più aggressivo è il controllore
- **Vincoli sugli incrementi di ingresso:** il controllore è meno aggressivo se $\Delta u_{\min}, \Delta u_{\max}$ sono piccoli

Cercare sempre di scegliere N_u più piccolo possibile !

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

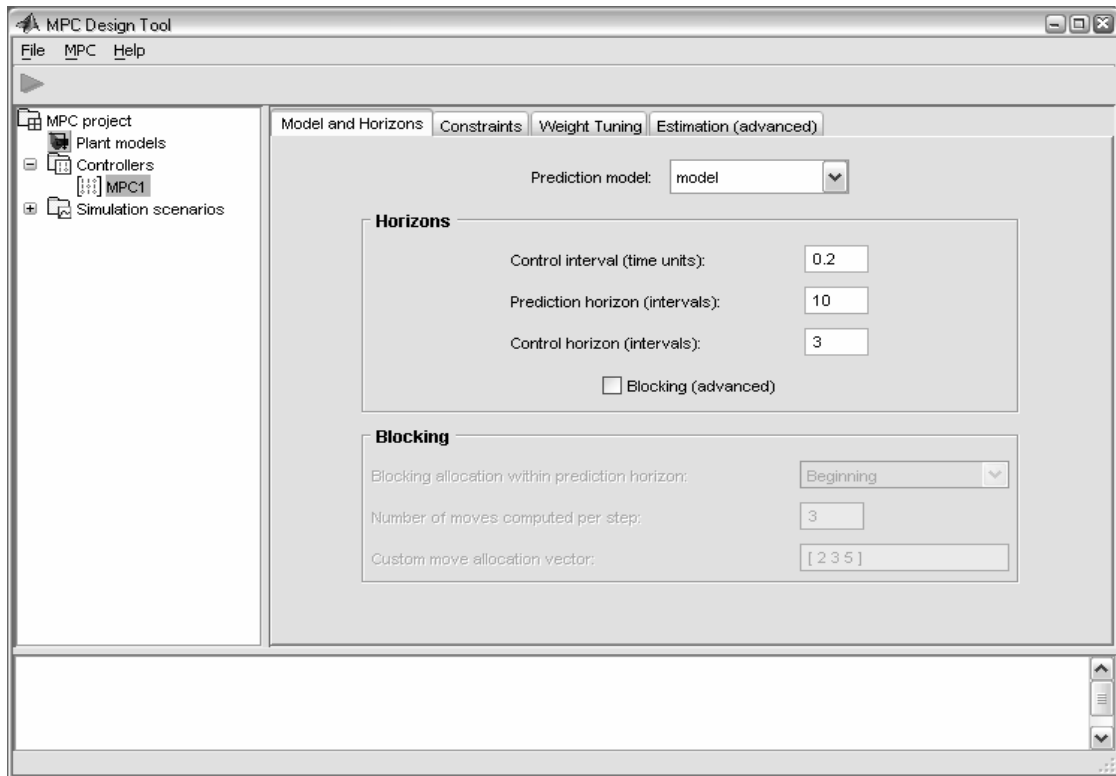
Model Predictive Control Toolbox

- **MPC Toolbox 2.0** (Bemporad, Morari, Ricker, 1998-2007):
 - Object-oriented implementation (MPC object)
 - MPC Simulink Library
 - MPC Graphical User Interface
 - RTW extension



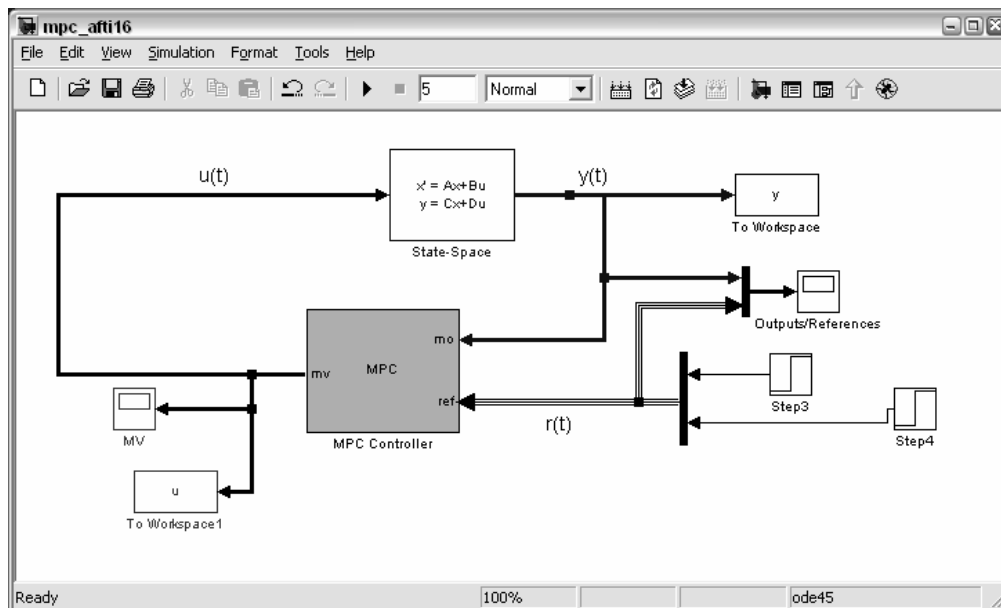
Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

MPC Graphical User Interface



Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

MPC Simulink Library



Software e documentazione: <http://www.mathworks.com/products/mpc/>

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2006/07

Maggiori dettagli sulle tecniche MPC:

Corso di “Controllo di Processo e dei Sistemi di Produzione”

(laurea specialistica)