# Model reduction



## Riduzione dei sistemi

- Nella progettazione di regolatori lineari basati sul modello, la complessità della legge di controllo dipende dall'ordine del sistema (numero di poli / numero di stati).

- Può essere utile cercare di approssimare il modello originale con un modello di ordine minore, che preservi il più possibile il legame ingresso/uscita (cioè la funzione di trasferimento del sistema), ed effettuare la sintesi su tale modello.

- Sappiamo che modi non controllabili/non osservabili non influiscono sulla funzione di trasferimento, quindi possono essere eliminati dal modello tramite decomposizione.

- Cercheremo di eliminare anche altri modi "poco" controllabili e/o "poco" osservabili, e di avere una realizzazione in forma di spazio di stato numericamente ben condizionata

# Non bilanciamento e scaling

- Considera il seguente sistema:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10^{-6} \\ 10^{6} \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 10^{6} & 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Lo stato $x_1$ è "poco" raggiungibile ma "molto" osservabile
- Lo stato $x_2$ è "poco" osservabile ma "molto" raggiungibile

- Facciamo un rescaling: $z_1 = 10^6 x_1,\ z_2 = 10^{-6} x_2$

- Il sistema, nelle nuove coord., è numericamente *bilanciato*:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ z_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$



# Realizzazione bilanciata

- Gramiano di controllabilità (tempo discreto) (Hp: A as. stabile)

  In Matlab: `Wc = GRAM(SYS,'c')`

$$\boxed{W_c \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} A^j B B' (A')^j}$$

- Gramiano di osservabilità (tempo discreto) (Hp: A as. stabile)

  In Matlab: `Wo = GRAM(SYS,'o')`

$$\boxed{W_o \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} (A')^j C' C A^j}$$

- A tempo continuo esistono definizioni analoghe

- *Definizione*: una realizzazione in forma di spazio di stato di un sistema lineare si dice bilanciata se i gramiani $W_c$ e $W_o$ sono uguali e diagonali:

$$\boxed{W_c = W_o = \Sigma, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}}$$

# Calcolo trasformazione di bilanciamento

- Esiste una procedura (A.J. Laub et al., 1987) per ricavare la matrice T di trasformazione tale che il nuovo sistema di coordinate

$$\tilde{A} = T^{-1}AT,\ \tilde{B} = T^{-1}B,\ \tilde{C} = CT,\ \tilde{D} = D$$

  è bilanciato

- Tale procedura è implementata nella routine Matlab `BALREAL`:

  `[SYSb,G,Ti,T] = BALREAL(SYS)`

  dove `T` è la matrice di trasformazione, $\mathtt{Ti} = \mathtt{T}^{-1}$, `SYSb` è il sistema trasformato secondo `T`, e $\mathtt{G} = [\sigma_1^2\ \ldots\ \sigma_n^2]'$

- Vantaggi di una realizzazione bilanciata: miglior condizionamento numerico del controllore/osservatore, individuazione dei modi eliminabili.



# Esempio

Sistema: $$H(s) = \frac{s^3 + 11s^2 + 36s + 26}{s^4 + 14.6s^3 + 74.96s^2 + 153.7s + 99.65}$$

Realizzazione (forma canonica di raggiungibilità):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -99.65 & -153.7 & -74.96 & -14.6 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad C = [\,26\ 36\ 11\ 1\,],\quad D = 0$$

Gramiani:

$$W_c = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0006 \\ -0.0001 & -0.0000 & 0.0006 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0006 & 0.0000 & 0.0408 \end{bmatrix} \qquad W_o = \begin{bmatrix} 84.6757 & 122.1890 & 37.4774 & 3.3919 \\ 122.1890 & 179.5744 & 55.2945 & 5.0110 \\ 37.4774 & 55.2945 & 17.0406 & 1.5448 \\ 3.3919 & 5.0110 & 1.5448 & 0.1401 \end{bmatrix}$$

Eseguendo in Matlab `[SYSb,G,Ti,T] = BALREAL(SYS)` otteniamo:

$$\tilde{W}_c = \tilde{W}_o = \text{Diag}(\mathtt{G}) = \begin{bmatrix} 0.1394 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0095 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0006 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

# Model reduction

- Una volta che il sistema è in forma bilanciata, è possibile ottenere una riduzione dell'ordine del modello semplicemente *eliminando* gli stati relativi ai valori $\sigma_i$ più trascurabili:

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x(k)
\end{aligned}
\qquad
\tilde{W}_c = \tilde{W}_o = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= A_{11}x_1(k) + B_1 u(k) \\
y(k) &= C_1 x_1(k)
\end{aligned}
\qquad
\Sigma_2 \ll \Sigma_1
$$

(idem se il sistema è a tempo continuo)

- In Matlab: `RSYS = MODRED(SYS,ELIM,'del')`

  dove `ELIM` contiene gli indici degli stati da eliminare

[dalla versione 7.x di Matlab: `RSYS = MODRED(SYS,ELIM,'Truncate')`]



# Esempio (cont'd)

Dopo il bilanciamento:

$$
\tilde{W}_c = \tilde{W}_o = \mathrm{Diag}(\mathtt{G}) = \begin{bmatrix} 0.1394 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0095 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0.0006} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{0.0000} \end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{A} = \begin{bmatrix} -3.601 & 0.8212 & -0.6163 & -0.05831 \\ -0.8212 & -0.593 & 1.027 & 0.09033 \\ \cancel{-0.6163} & \cancel{-1.027} & \cancel{-5.914} & \cancel{-1.127} \\ \cancel{0.05831} & \cancel{0.09033} & \cancel{1.127} & \cancel{-4.492} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} -1.002 \\ -0.1064 \\ \cancel{-0.08612} \\ \cancel{0.008112} \end{bmatrix}
$$

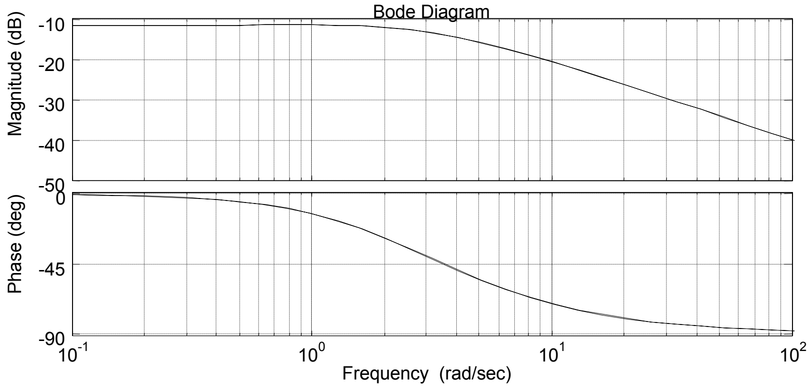
$$
\tilde{C} = \begin{bmatrix} -1.002 & 0.1064 & \cancel{-0.08612} & \cancel{-0.008112} \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = 0
$$

Eliminando gli stati #3,4, ottengo un modello di ordine 2 che ha come funzione di trasferimento

$$
H_r(s) = \frac{0.9926s + 0.7297}{s^2 + 4.194s + 2.81}
$$

# Esempio (cont'd)

Confronto delle risposte in frequenza: pressoché indistinguibili




- In generale: Più grande è la differenza fra il primo valore $\sigma_1$ e l'ultimo valore $\sigma_n$, maggiore è la possibilità che, togliendo lo stato #n, il sistema ridotto abbia un comportamento simile all'originale

- Nell'operazione di bilanciamento, gli stati perdono completamente il loro significato fisico, in genere. Tali stati possono essere calcolati a partire dagli stati originali tramite la trasformazione $T^{-1}$, oppure poiché il sistema è compl. osservabile, ricostruiti dall'uscita tramite uno stimatore



# Model reduction – Metodo *Matched DC Gain*

- È possibile eliminare alcuni stati semplicemente approssimandoli come infinitamente veloci:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1u(k) \\ x_2(k+1) &= A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2u(k) \\ y(k) &= C_1x_1(k) + C_2x_2(k) \end{aligned} \quad \xRightarrow[x_2(k+1)=x_2(k)]{} \quad \begin{aligned} (I-A_{22})x_2(k) &= \\ A_{21}x_1(k) &+ B_2u(k) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= (A_{11} + A_{12}(I-A_{22})^{-1}A_{21})x_1(k) + (B_1 + A_{12}(I-A_{22})^{-1}B_2)u(k) \\ y(k) &= (C_1 + C_2(I-A_{22})^{-1}A_{21})x_1(k) + C_2(I-A_{22})^{-1}B_2u(k) \end{aligned}$$

- Se il sistema è a tempo continuo si pone $\dot{x}_2(t) = 0$ e si ricava $x_2(t)$ in funzione di $x_1(t),\ u(t)$

- Proprietà: il guadagno in continua del modello viene preservato

- In Matlab: `RSYS = MODRED(SYS,ELIM,'mdc')`
  dove `ELIM` contiene gli indici degli stati da eliminare
  [dalla versione 7.x di Matlab: `RSYS = MODRED(SYS,ELIM,'MatchDC')`]

# Esempio (cont'd)

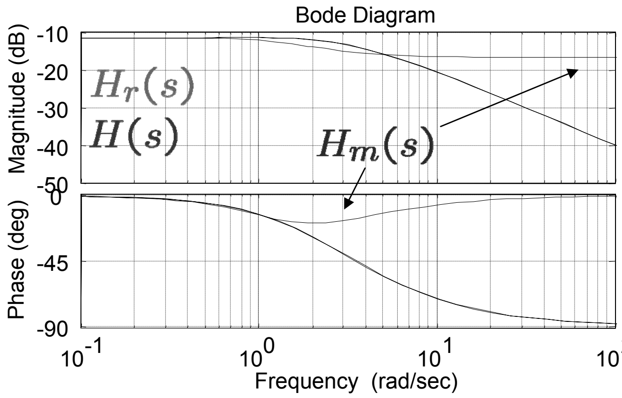
Modello completo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -99.65 & -153.7 & -74.96 & -14.6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\, 26 \;\; 36 \;\; 11 \;\; 1 \,], \quad D = 0$$

Eliminando gli stati #3,4 con il metodo *matched DC gain*, ottengo un modello di ordine 2 che ha come funzione di trasferimento

$$H_m(s) = \frac{0.1467 s^2 + 0.4803 s + 0.3469}{s^2 + 2.05 s + 1.329}$$

Confronto delle risposte in frequenza dei tre modelli:




Confronto dei guadagni in continua:

$$H(0) = H_m(0) = 0.2609$$
$$H_r(0) = 0.2597$$



# Commenti

- La bontà del modello approssimato va giudicata in base alle prestazioni che si ottengono ad anello chiuso (=sistema originale + controllore):

  un buon modello per la sintesi del controllore è quello che fornisce semplicità (quindi deve essere di ordine basso) e al tempo stesso buone prestazioni ad anello chiuso

- Nell'esempio precedente, possiamo confrontare le prestazioni dell'anello costituito dal sistema originale + controllore LQR:

$$\min \sum_{k=0}^{\infty} y^2(k) + \rho u^2(k)$$

(Nota: in questo caso il funzionale di costo non dipende dalla scelta della realizzazione $x$)

1. Controllore LQR basato sul modello completo (A,B,C,D)
2. Controllore LQR basato sul modello ridotto ($A_1$,$B_1$,$C_1$,$D_1$)

# Commenti

1. Controllore LQR basato sul modello completo (A,B,C,D):

$$u = Kx + Hv \qquad \left(H = 1/C(I - A - BK)^{-1}B + D)\right)$$

2. Controllore LQR basato sul modello ridotto ($A_1$,$B_1$,$C_1$,$D_1$)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= T^{-1}x \\ u &= K_r x_1 + Hv \end{aligned} \qquad \left(H = 1/C(I - A - BK_r[I\ 0]T^{-1})^{-1}B + D)\right)$$

3. Controllore LQR basato sul modello ridotto con metodo *matched DC gain*:

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \\ u &= K_m x_1 + Hv \end{aligned} \qquad \left(H = 1/C(I - A - BK_m[I\ 0])^{-1}B + D)\right)$$

Nel caso 1 e 2 le traiettorie ad anello chiuso sono pressoché indistinguibili.