Model reduction

(materiale di approfondimento)

Gramiano di controllabilità

$$\boxed{W_c(k) \triangleq \sum_{j=0}^{k} A^j BB'(A')^j}$$

Gramiano di controllabilità per sistemi a tempo discreto

Teorema: $W_c(k)$ è non singolare per qualche $k<\infty \Leftrightarrow$ rank $R=n$, dove R è la matrice di raggiungibilità della coppia (A,B)

Dim: ($\Leftarrow$) Poiché rank $R=n \Rightarrow RR'>0$, il gramiano $W_c(n-1) = RR'$ è non singolare

Dim: ($\Rightarrow$) Se per assurdo rank $R<n$, per il teorema di Hamilton-Cayley rank $R_k<n$ per ogni k, e quindi $W_c(k) = R_k R_k'$ avrebbe rango minore di n per ogni k, il che è assurdo.

Gramiano di controllabilità

- Nota: Nel controllo a minima energia, la sequenza di ingressi ottima è $U = R'(RR')^{-1}x(0)$. Il corrispondente costo ottimo è

$$\sum_{k=0}^{n-1} u^2(k) = U'U = x'(0)(RR')^{-T}RR'(RR')^{-1}x(0) = x'(0)W_c^{-1}(n-1)x(0)$$

- Nell'ipotesi in cui A sia as. stabile, definiamo $W_c \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} A^j BB'(A')^j$. Il costo $x'(0)W_c^{-1}x(0)$ rappresenta il costo minimo di ingresso necessario per portare lo stato a zero asintoticamente, partendo dalla condizione iniziale $x(0)$. (in Matlab: `Wc = GRAM(SYS,'c')`)

- Il gramiano di controllabilità W_c soddisfa l'equazione

$$\boxed{W_c = AW_cA' + BB'}$$

Equazione di Lyapunov a tempo discreto (in Matlab: `Wc=dlyap(A,B*B')`)

infatti: $AW_cA' = A\sum_{j=0}^{\infty} A^j BB'(A')^j A = \sum_{j=1}^{\infty} A^j BB'(A')^j = W_c - BB'$

Gramiano di osservabilità

$$\boxed{W_o(k) \triangleq \sum_{j=0}^{k} (A')^j C'CA^j}$$

Gramiano di osservabilità per sistemi a tempo discreto

Per dualità è facile dimostrare che:

Teorema: $W_o(k)$ è non singolare per qualche $k<\infty \Leftrightarrow$ rank $\Theta=n$, dove Θ è la matrice di osservabilità della coppia (A,C)

- Nota: L'energia associata all'uscita di un sistema in evoluzione libera è

$$\sum_{j=0}^{k} \|y(j)\|^2 = \sum_{j=0}^{k} y'(j)y(j) = \sum_{j=0}^{k} x'(0)(A^j)'C'CA^jx(0) = x'(0)W_o(k)x(0)$$

- Nell'ipotesi in cui A sia as. stabile, definiamo $W_o \triangleq \sum_{j=0}^{\infty}(A^j)'C'CA^j$ (in Matlab: `Wo = GRAM(SYS,'o')`)

- Il gramiano di osservabilità W_o soddisfa l'equazione di Lyapunov T.D.

$$\boxed{W_o = A'W_oA + C'C}$$

(in Matlab: `Wc=dlyap(A',C'*C)`

Gramiani per sistemi a tempo continuo

- Per i sistemi lineari a tempo continuo $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ valgono definizioni e risultati analoghi:

$$W_c(t) \triangleq \int_0^t e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} d\tau, \quad W_o(t) \triangleq \int_0^t e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau$$

Teorema:
(A,B) raggiungibile $\Leftrightarrow \exists t > 0$ t.che $\det Wc(t) \neq 0 \Leftrightarrow$ rank$[B \ AB \ \ldots \ A^{n-1}B] = n$
(A,C) osservabile $\Leftrightarrow \exists t > 0$ t.che $\det Wo(t) \neq 0 \Leftrightarrow$ rank$[C; CA; \ldots; CA^{n-1}] = n$

- Nell'ipotesi in cui A sia as. stabile, definiamo

$$W_c \triangleq \int_0^\infty e^{A\tau} BB' e^{A'\tau} d\tau, \quad W_o \triangleq \int_0^\infty e^{A'\tau} C' C e^{A\tau} d\tau$$

- I gramiani W_c , W_o soddisfano le eq. di Lyapunov a tempo continuo:

$$\boxed{AW_c + W_c A' + BB' = 0} \qquad \boxed{A'W_o + W_o A + C'C = 0}$$

(in Matlab: `Wc=lyap(A,B*B')` `=gram(sys,'c');`

(in Matlab: `Wo=lyap(A',C'*C)` `=gram(sys,'o');`

Realizzazione bilanciata

- *Definizione*: una realizzazione in forma di spazio di stato di un sistema lineare si dice bilanciata se i gramiani W_c e W_o sono uguali e diagonali:

$$W_c = W_o = \Sigma, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}$$

- Si dimostra che: dato un sistema (A,B,C,D) completamente raggiungibile e osservabile in forma non bilanciata, la trasformazione T che permette il bilanciamento è data dagli autovettori $v_1,\ldots,v_n$ di

$$W_{co} \triangleq W_c W_o = T^{-1} \Lambda T \quad \text{(prodotto gramiano)}$$

dove $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\lambda_i = \sigma_i^2$, $T^{-1} = [v_1 \ldots v_n]$

- Vantaggi di una realizzazione bilanciata: miglior condizionamento numerico del controllore/osservatore, individuazione dei modi eliminabili.

Calcolo trasformazione di bilanciamento

- Hp: (A,B) compl. raggiungibile, (A,C) compl. osservabile, A as. stabile
  (se manca la completa ragg./osserv., si può effettuare una decomposizione di Gilbert-Kalman e tenere soltanto la parte ragg. e osservabile)

1. Calcolo dei gramiani (eq. di Lyapunov):

$$\text{TC:}\quad \begin{aligned} AW_c + W_cA' + BB' &= 0 \\ A'W_o + W_oA + C'C &= 0 \end{aligned} \qquad \text{TD:}\quad \begin{aligned} W_c &= AW_cA' + BB \\ W_o &= A'W_oA + C'C \end{aligned}$$

2. Fattorizzazione di Cholesky: $W_c = L_cL_c',\ W_o = L_oL_o'$
   (in Matlab: `Lc=chol(Wc)`) L_c e L_o sono matrici triangolari superiori

3. Decomposizione ai valori singolari (SVD): $L_o'L_c = U\Sigma V'$
   (in Matlab: `[U,Sigma,V]=svd(Lo'*Lc)`)
   U e V sono matrici unitarie ($U' = U^{-1},\ V' = V^{-1}$), Σ è una matrice diagonale con elementi ≥ 0 ordinati in maniera decrescente

4. Calcolo matrice di trasformazione: $T = L_cV\Sigma^{-\frac{1}{2}},\ T^{-1} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}U'L_o'$

5. Cambio di coordinate: $\tilde{A} = T^{-1}AT,\ \tilde{B} = T^{-1}B,\ \tilde{C} = CT,\ \tilde{D} = D$

Calcolo trasformazione di bilanciamento

- La matrice Σ^2 contiene gli autovalori di W_{co}:

$$\begin{aligned} W_{co} &= W_cW_o = L_cL_c'L_oL_o' = L_c(L_o'L_c)'L_o' = L_c(U\Sigma V')'L_o' \\ &= L_cV\Sigma U'L_o = (L_cV\Sigma^{-\frac{1}{2}})\Sigma^2(\Sigma^{-\frac{1}{2}}U'L_o') = T\Sigma^2T^{-1} \end{aligned}$$

  Tali autovalori sono ordinati decrescentemente: $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_n > 0$

- Una procedura (leggermente più efficiente) per ricavare la matrice T viene descritta nell'articolo

  A.J. Laub et al., "Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-32, n.2, Feb. 1987.

- Tale procedura è implementata nella routine Matlab BALREAL:
  `[SYSb,G,Ti,T] = BALREAL(SYS)` dove `T` è la matrice di trasformazione, $\texttt{Ti} = \texttt{T}^{-1}$, `SYSb` è il sistema trasformato secondo `T`, e $\texttt{G} = [\lambda_1\ \ldots\ \lambda_n]'$

Calcolo trasformazione di bilanciamento

- Verifichiamo che nel nuovo sistema di coordinate $\tilde{W}_c = \Sigma$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}_c &= \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{A}^j \tilde{B}\tilde{B}'(\tilde{A}')^j = \sum_{j=0}^{\infty} (T^{-1}AT)^j (T^{-1}B)(T^{-1}B)'((T^{-1}AT)')^j \\
&= T^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} A^j BB'(A')^j (T^{-1})' = T^{-1} L_c L_c' (T^{-1})' \\
&= (T^{-1}L_c)(T^{-1}L_c)' = (\Sigma^{-\frac{1}{2}}U'L_o'L_c)(\Sigma^{-\frac{1}{2}}U'L_o'L_c)' \\
&= (\Sigma^{-\frac{1}{2}}U'U\Sigma V')(\Sigma^{-\frac{1}{2}}U'U\Sigma V')' = (\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma V')(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma V')' \\
&= \Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma\Sigma'\Sigma^{-\frac{1}{2}} = \Sigma
\end{aligned}
$$

- In maniera simile, si dimostra che nel nuovo sistema di coordinate $\tilde{W}_o = \Sigma$
- Nel nuovo sistema di coordinate, quindi, il sistema dinamico risulta perfettamente bilanciato