Internal Model Control

Modello Interno

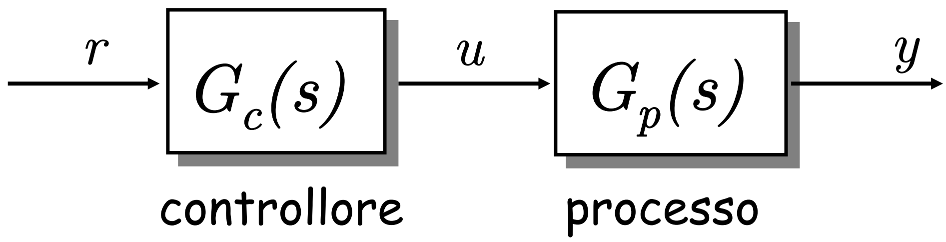
La tecnica dell'*Internal Model Control* (IMC) è utilizzata nel controllo di processo per l'inseguimento del riferimento e la reiezione del disturbo. Presenta due importanti vantaggi:

- è un approccio *robusto* al controllo di processo, in quanto funziona bene anche in presenza di incertezza di modello
- permette di bilanciare nel progetto la prestazione del regolatore con la robustezza nei confronti degli errori strutturali di modello ed incertezze parametriche.

Soluzione in feedforward

Nel caso particolare in cui il modello del processo sia ben accurato e *invertibile* (cioè senza ritardi e zeri/poli a parte reale positiva) una soluzione consiste nel definire il controllore come l'inverso del processo stesso

$$G_c(s) = G_p(s)^{-1}$$



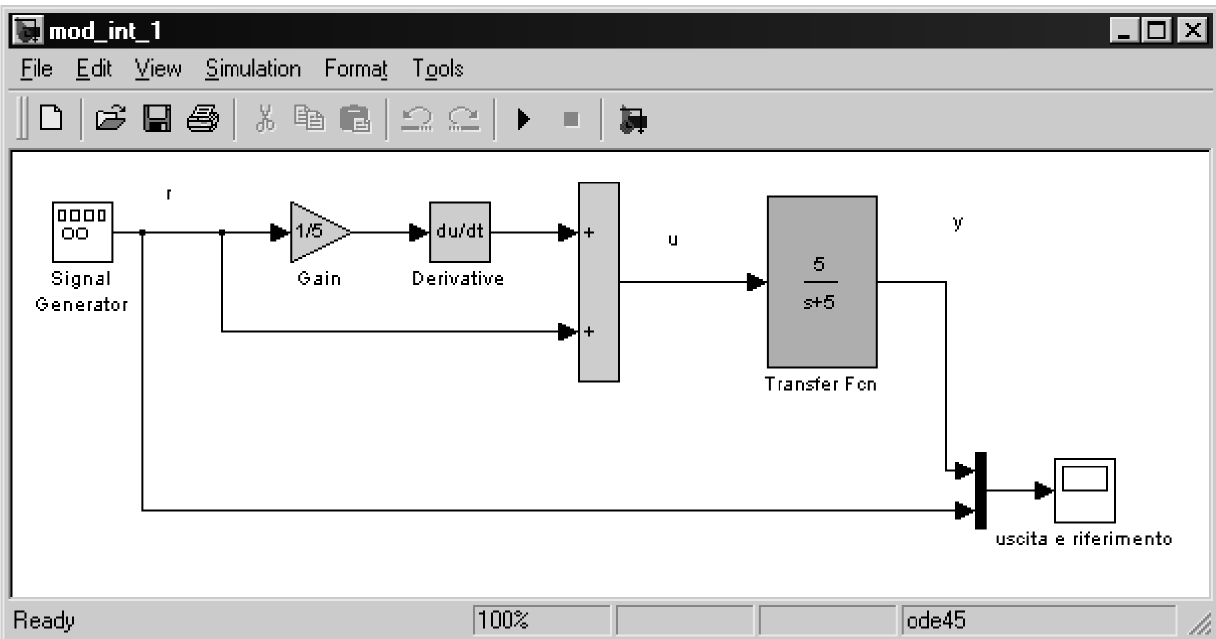
Problemi:

- Realizzabilità (e simulabilità) del controllore: se il sistema ha differenza poli/zeri maggiore o uguale a 1, allora il controllore non è causale!
- Non applicabile se il sistema ha ritardi e/o poli/zeri a parte reale positiva (=instabilità/non minimalità di fase)
- Poco "robusto" se il processo non è esattamente descritto dalla funzione di trasferimento G_p (=incertezza di modello)

Soluzione in feedforward - Esempio

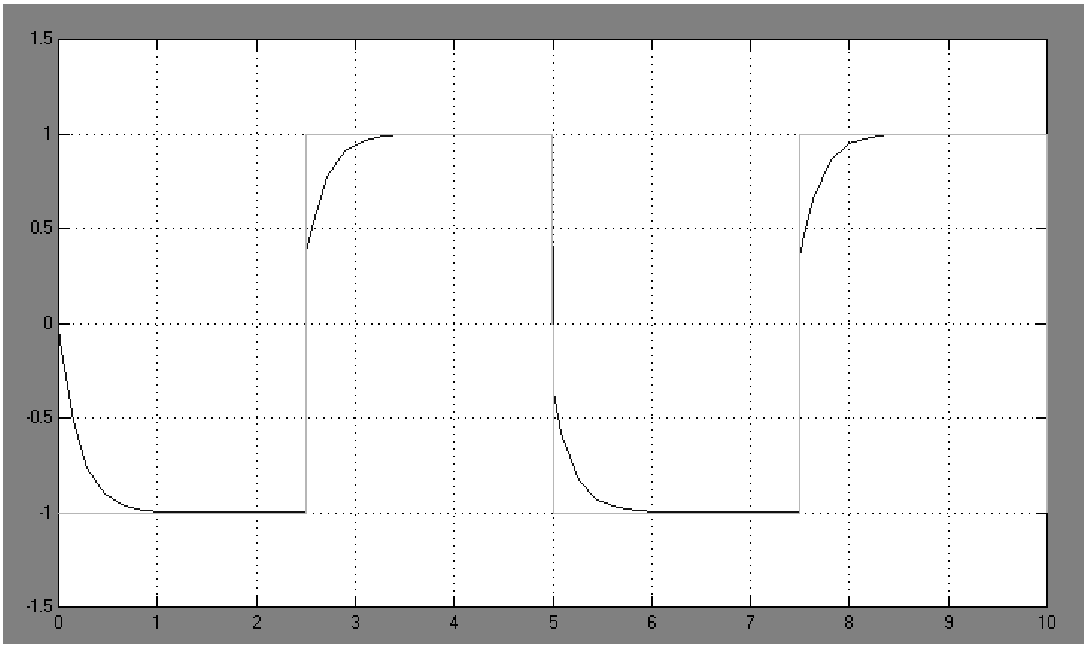
Esempio:

$$G_p(s) = \frac{5}{s+5}, \qquad G_c(s) = G_p^{-1}(s) = \frac{s+5}{5}$$



Soluzione in feedforward - Esempio

Inseguimento di onda quadra:

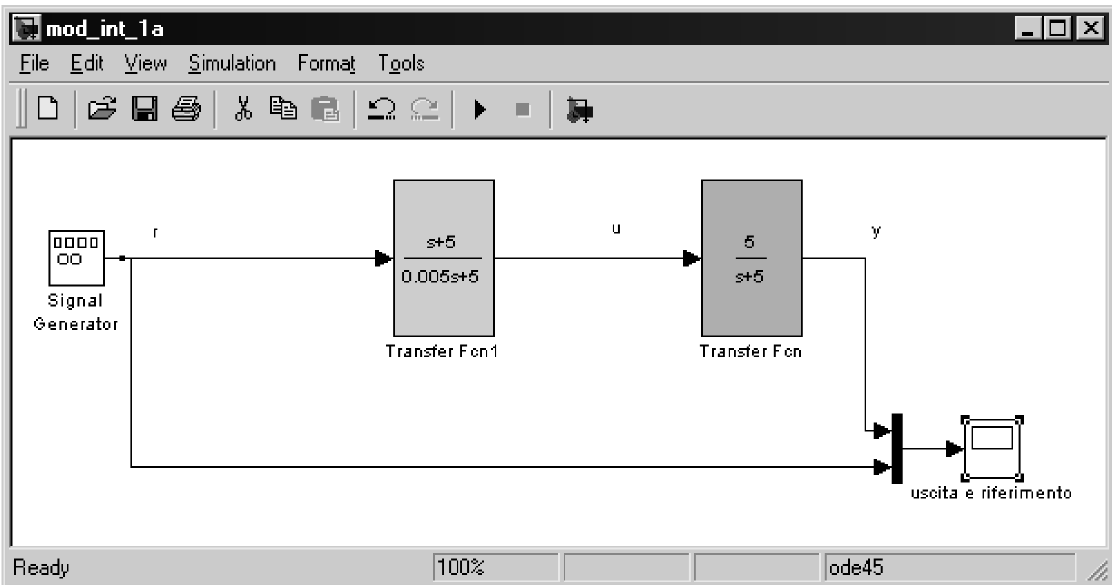


Contraddice il risultato teorico! La causa sono gli errori del metodo di integrazione (derivazione di segnali discontinui)

Soluzione in feedforward - Esempio

Esempio modificato: Rendiamo il controllore causale mediante l'introduzione di un polo

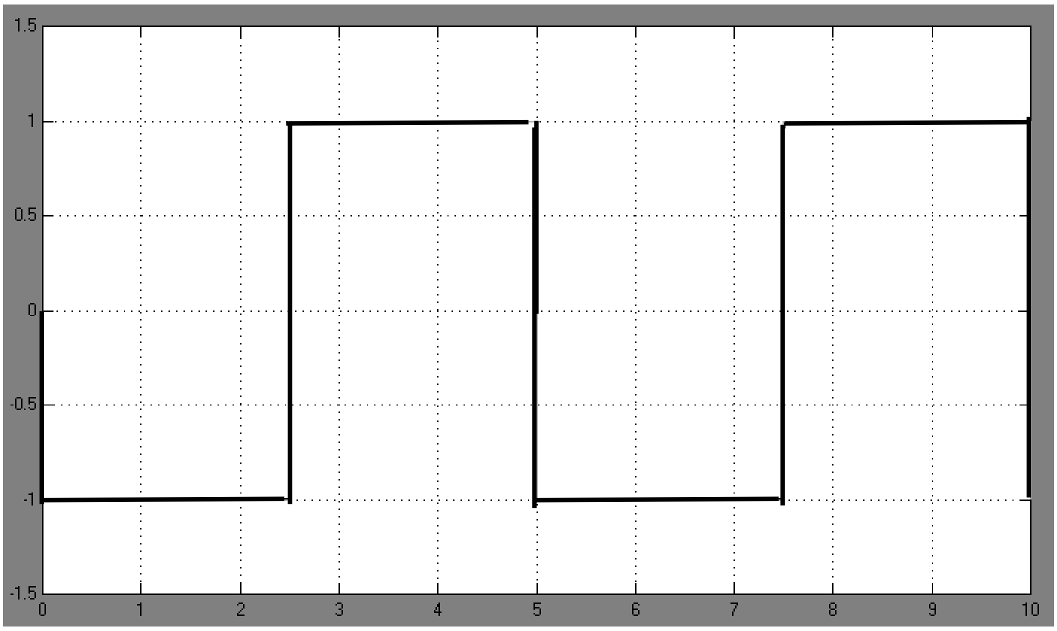
$$G_p(s) = \frac{5}{s+5}, \qquad G_c(s) = \frac{s+5}{5(0.001s+1)}$$



Nota: corrisponde a prefiltrare il riferimento con $1/(1 + 0.001s)$, e quindi evitare di derivare la funzione onda-quadra

Soluzione in feedforward - Esempio

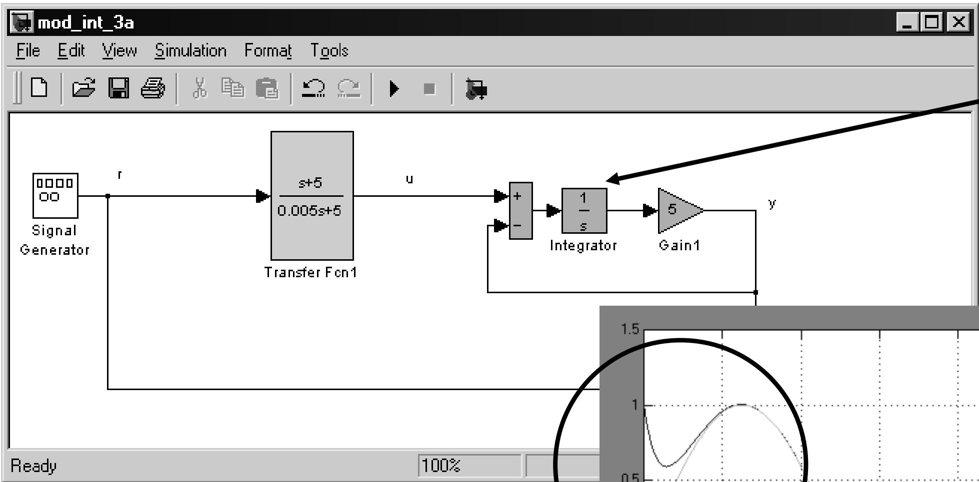
Inseguimento di onda quadra:



Conferma il risultato teorico. L'integratore numerico (Simulink) fornisce risultati corretti

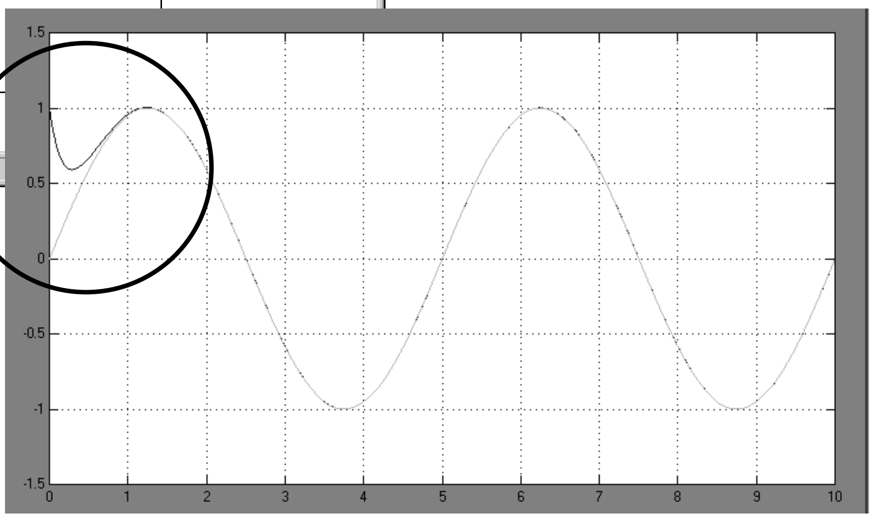
Soluzione in feedforward

Nota: anche se la funzione di trasferimento da r a y è 1, l'uscita potrebbe non inseguire esattamente il riferimento a causa dell'effetto delle condizioni iniziali



Condizione iniziale:

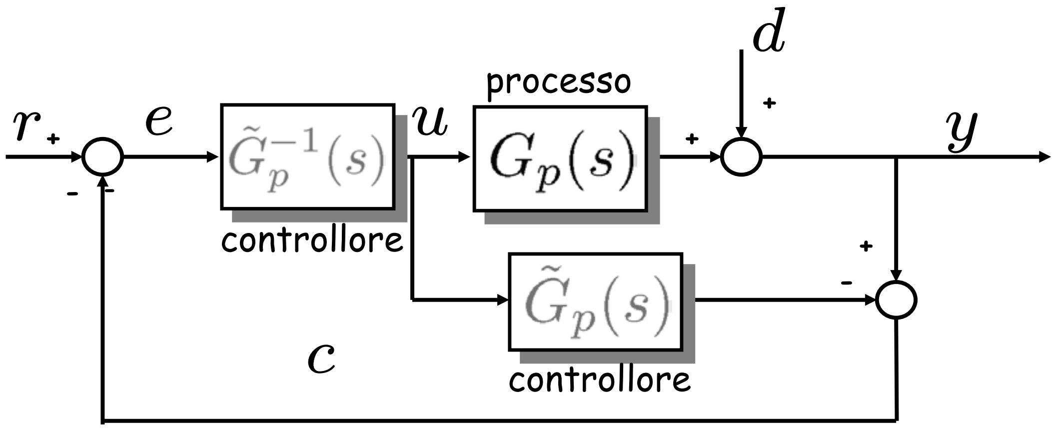
y(0)=1



Internal Model Control

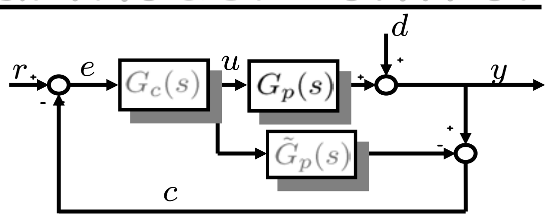
Modifichiamo la configurazione di controllo feedforward mandando in feedback l'errore $c = (G_p - \tilde{G}_p)u + d$ dovuto a incertezze e disturbi, dove

- G_p=modello del processo (non noto)
- $\tilde{G}_p$=modello approssimato (noto) del processo
- G_c=controllore=$\tilde{G}_p^{-1}$



Internal Model Control

- Ricaviamo c in funzione di r e d:



$$\begin{aligned} c &= (G_p - \tilde{G}_p)G_c(r-c) + d \\ \Rightarrow c &= \frac{(G_p - \tilde{G}_p)G_c}{1 + (G_p - \tilde{G}_p)G_c} r + \frac{1}{1 + (G_p - \tilde{G}_p)G_c} d \end{aligned}$$

- Ricaviamo y in funzione di c e r:

$$c = y - \tilde{G}_p G_c (r - c) \qquad \Rightarrow \qquad y = (1 - \tilde{G}_p G_c)c + \tilde{G}_p G_c r$$

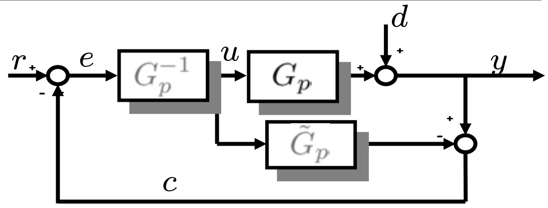
- da cui (con facili passaggi):

$$\boxed{y = \frac{1 - \tilde{G}_p G_c}{1 + (G_p - \tilde{G}_p)G_c} d + \frac{G_p G_c}{1 + (G_p - \tilde{G}_p)G_c} r}$$

- Nota: il feedback viene fatto utilizzando la variabile $c = (G_p - \tilde{G}_p)u + d$, che rappresenta tutta l'incertezza presente nell'anello di controllo

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2001/02

IMC - Caso invertibile



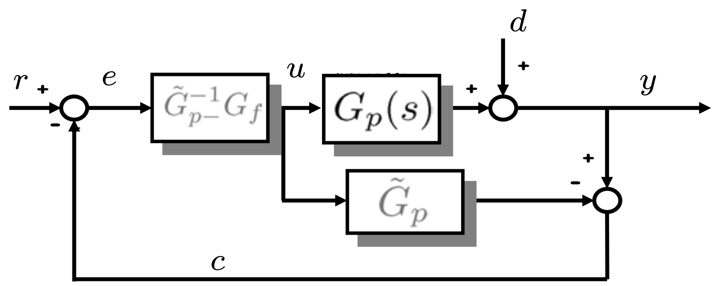
- Nel caso in cui $\tilde{G}_p$ sia invertibile, ponendo
$$G_c = \tilde{G}_p^{-1}$$
si ottiene:

$$y = \frac{\cancel{1} - \cancel{1}}{1 + G_p\tilde{G}_p^{-1} - 1} d + \frac{\cancel{G_p\tilde{G}_p^{-1}}}{\cancel{1} + \cancel{G_p\tilde{G}_p^{-1}} - \cancel{1}} r = r$$

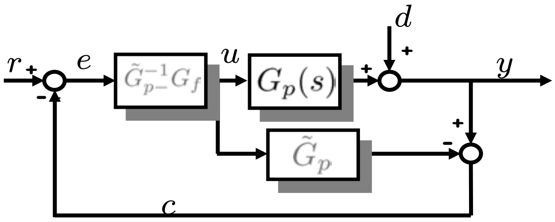
- La funzione di trasferimento dal disturbo all'uscita è nulla: (reiezione asintotica del disturbo) !
- La funzione di trasferimento dal riferimento all'uscita è unitaria (inseguimento asintotico del riferimento) !
- Queste due proprietà valgono nonostante non si conosca esattamente il modello G_p del processo ma soltanto una sua approssimazione $\tilde{G}_p$ (robustezza) !
- Problemi: (1) realizzabilità fisica di G_c; (2) $\tilde{G}_p$ non invertibile

IMC - Caso non invertibile

- Nel caso in cui $\tilde{G}_p$ non sia invertibile, scomponiamo $\tilde{G}_p$ nella sua parte invertibile $\tilde{G}_{p-}$ e non invertibile $\tilde{G}_{p+}$
$$\tilde{G}_p = \tilde{G}_{p-}\tilde{G}_{p+}$$
dove per costruzione $\tilde{G}_{p+}$ contiene tutti gli zeri instabili e i ritardi di $\tilde{G}_p$, ed ha guadagno in continua unitario (si suppone che G_p non abbia poli instabili)
- Si pone quindi
$$G_c = \tilde{G}_{p-}^{-1} G_f$$
dove G_f è un filtro passa-basso, che serve a rendere il controllore causale (e quindi realizzabile e simulabile). Ad esempio: $G_f(s) = 1/(1 + \tau s)$ (tempo continuo), $G_f(z) = (1 - \alpha)/(1 - \alpha z^{-1})$ (tempo discreto)



IMC - Caso non invertibile



- Sostituendo $G_c = \tilde{G}_{p-}^{-1}G_f$, otteniamo:

$$y = \frac{1-\tilde{G}_{p+}G_f}{1+(G_p-\tilde{G}_p)\tilde{G}_{p-}^{-1}G_f}d + \frac{\tilde{G}_{p+}G_f+(G_p-\tilde{G}_p)\tilde{G}_{p-}^{-1}G_f}{1+(G_p-\tilde{G}_p)\tilde{G}_{p-}^{-1}G_f}r$$

- Nel caso di assenza di incertezza di modello ($G_p = \tilde{G}_p$) otteniamo

$$y = (1-G_{p+}G_f)d + G_{p+}G_f r$$

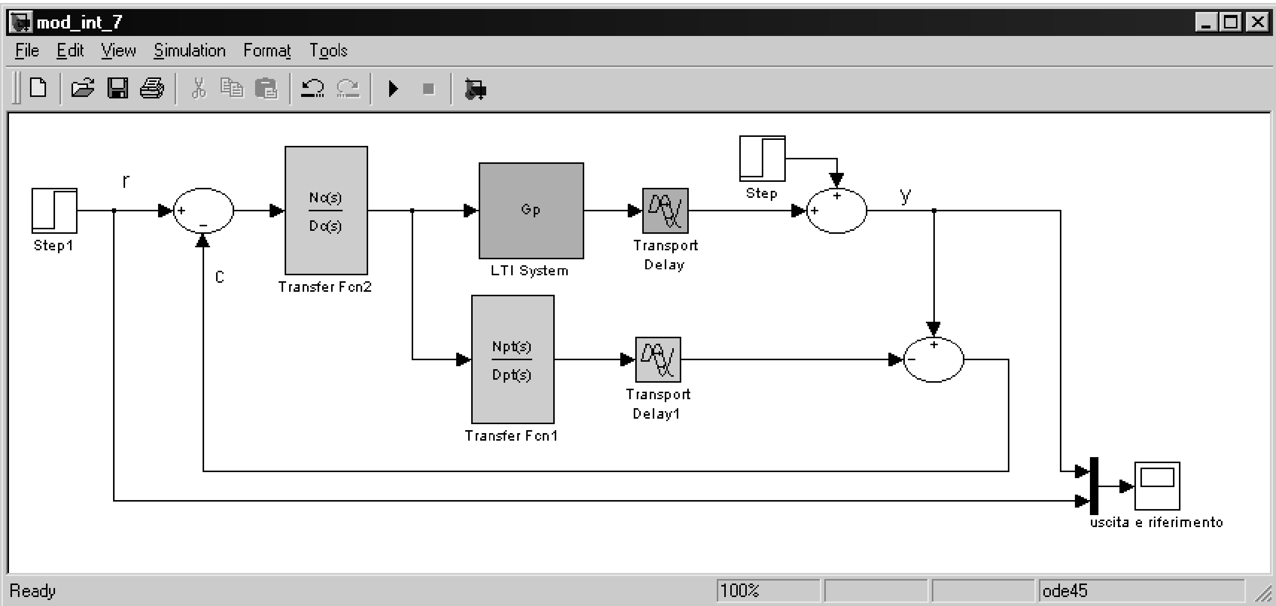
- Nota: G_{p+} e G_f hanno guadagno in continua unitario, percui disturbi costanti d vengono rimossi a regime, e riferimenti costanti r inseguiti con zero offset a regime

- Nota: la soluzione IMC è una variazione della soluzione feedforward, ottenuta sottraendo al riferimento il termine correttivo dovuto all'incertezza $c = (G_p - \tilde{G}_p)u + d$

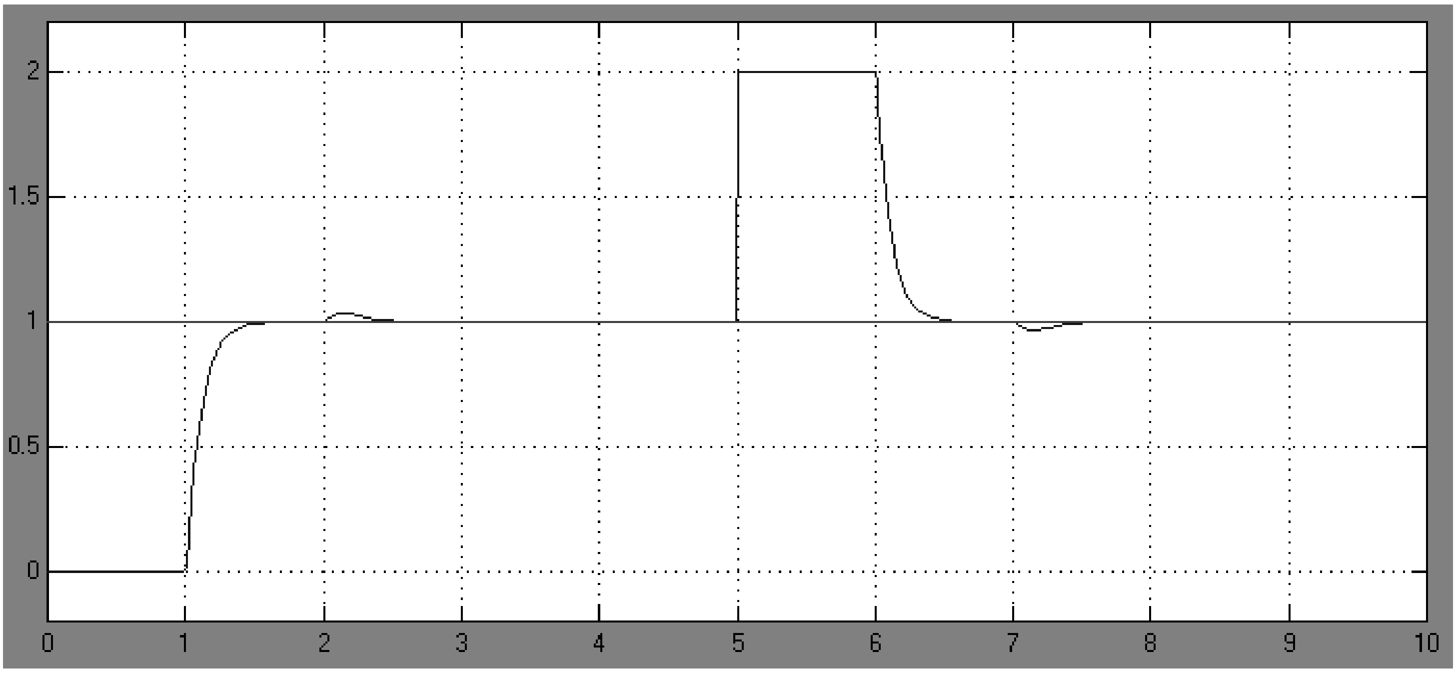
IMC - Esempio

Esempio:

$$G_p(s) = \frac{5e^{-s}}{(s+5)(1+0.01s)}, \quad \tilde{G}_p(s) = \frac{5e^{-s}}{s+5}, \quad G_c(s) = \underbrace{\frac{s+5}{5}}_{G_{p-}^{-1}(s)}\underbrace{\frac{1}{0.1s+1}}_{G_f(s)}$$



IMC - Esempio



Simulazione per riferimento a gradino e disturbo $d(t)$ a gradino che interviene dopo 5 secondi

IMC - Tempo discreto

Come nel caso continuo. L'operazione di sintesi del regolatore IMC viene effettuata in due passi:

- **Fattorizzazione del modello del processo:**

$$\tilde{G}_p(z) = \tilde{G}_{p+}(z) \cdot \tilde{G}_{p-}(z)$$

  dove $\tilde{G}_{p+}(z)$ contiene

  - l'elemento di ritardo z^{-N-1}
  - tutti gli eventuali poli instabili
  - gli zeri a fase non minima o ad *alta frequenza* (vicini al punto (-1,0))

  Si impone che $\tilde{G}_{p+}(z)$ abbia guadagno unitario

- **Sintesi del regolatore:** il regolatore IMC si ottiene invertendo soltanto la parte stabile $\tilde{G}_{p-}(z)$ moltiplicata per un filtro passa-basso del primo ordine con guadagno unitario $G_f(z)$ usato per aumentare la robustezza del regolatore e per garantirne la fisica realizzabilità:

$$G_c(z) = \tilde{G}_{p-}^{-1}(z) G_f(z) \quad \text{con } G_f(z) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$$

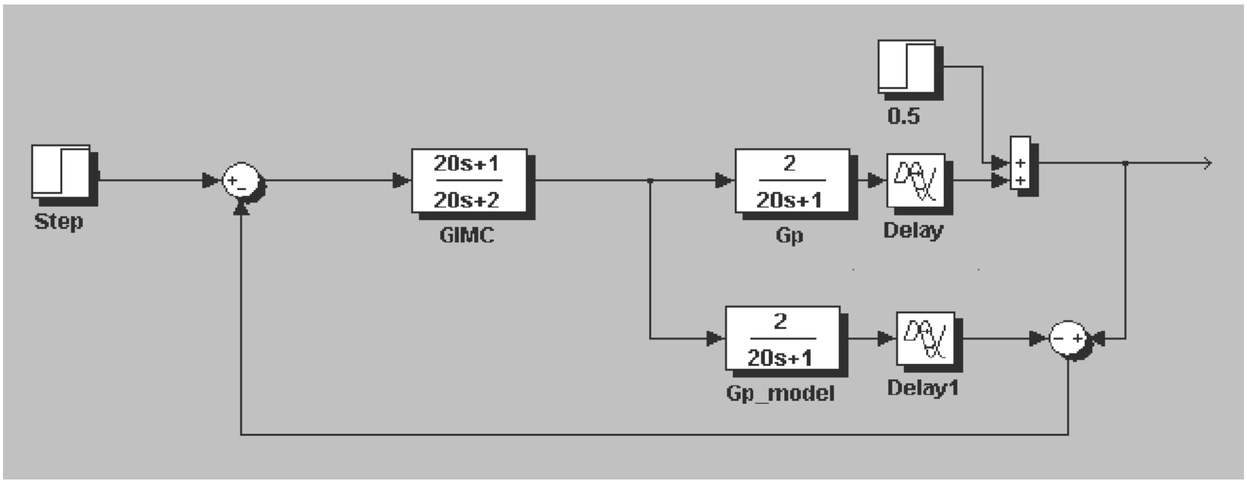
IMC - Altro esempio di sintesi

- Modello approssimato del processo:

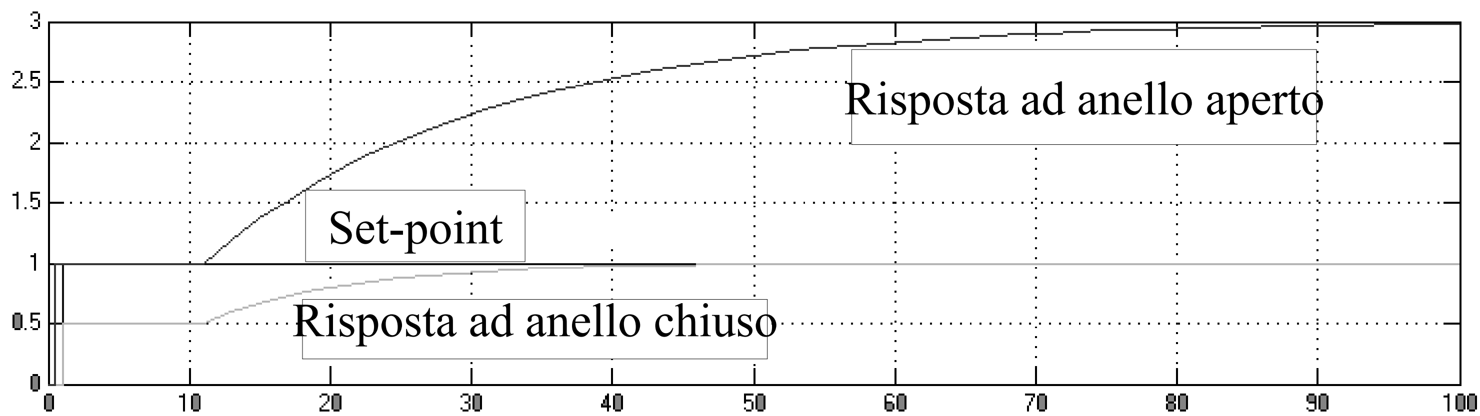
$$\tilde{G}_p(s) = \frac{2e^{-5s}}{1+20s} = \underbrace{\frac{2}{1+20s}}_{\tilde{G}_{p-}(s)} \cdot \underbrace{e^{-5s}}_{\tilde{G}_{p+}(s)}$$

- Controllore sintetizzato:

$$G_{\mathrm{IMC}}(s) = \tilde{G}_{p-}^{-1}(s)G_f(s) = \frac{1+20s}{2(1+10s)}$$



IMC - Altro esempio di sintesi



IMC - Altro esempio di sintesi

- Esaminiamo un altro esempio per testare l'azione del filtro $G_f = (1-\alpha)/(1-\alpha z^{-1})$ al variare di α

- Sia

$$G_p(s) = \frac{e^{-2s}}{5s+1} \quad \text{con } T_s = 1 \text{ sec} \quad \Rightarrow G_p(z) = z^{-2}\frac{0.1813}{z(1-0.8187z^{-1})}$$

- $G_p(z)$ si scompone in

$$\tilde{G}_p^+(z) = z^{-3} \quad \text{e} \quad \tilde{G}_p^-(z) = \frac{0.1813}{1-0.8187z^{-1}}$$

- L'equazione del regolatore risulta

$$G_{IMC}(z) = \frac{1-0.8187z^{-1}}{0.1813}\frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$$

- La funzione di trasferimento da r a y ad anello chiuso risulta

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \tilde{G}_p^+(z) \cdot G_f(z) = z^{-3}\frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$$

IMC - Altro esempio di sintesi

Prestazione del regolatore al variare della costante α