Controllore PID digitale

Regolatori PID - Introduzione

- I regolatori ad azione PID (Proporzionale Integrativa Derivatrice) sono utilizzati nell'automazione sin dagli anni 30 (controllori pneumatici).

- Inizialmente erano in forma analogica (realizzati con componenti elettronici analogici), oggi si tende a sostituirli con

  – dispositivi digitali;

  – programmi di calcolo da inserire nell'elaboratore di processo.

- Per l'implementazione digitale, è necessario che il comando di controllo sia espresso in forma campionata. Questo risultato può essere raggiunto

  – Progettando il regolatore nel continuo e poi discretizzandolo;

  – Effettuando il progetto direttamente nel discreto dopo aver discretizzato la funzione di trasferimento del processo.

PID - Parametri di base

- Il controllore PID è tuttora la tecnica di controllo in retroazione (output feedback) più diffusa nelle applicazioni industriali

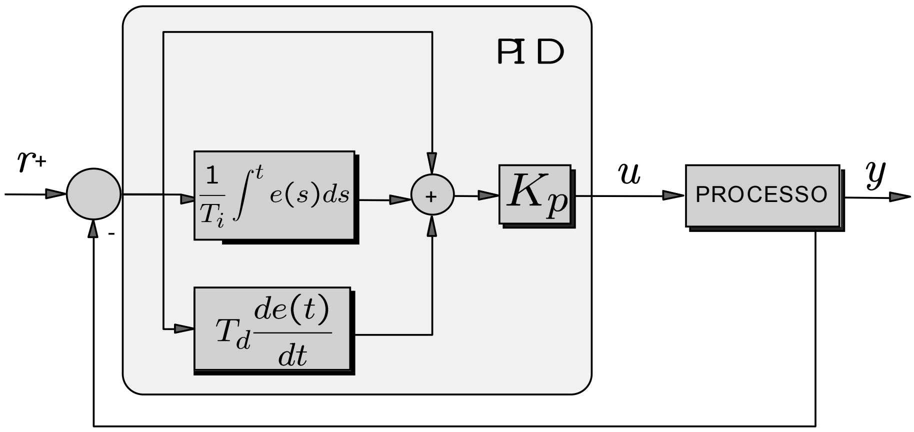
- A tempo continuo, il controllore PID si presenta nella forma

$$u(t) = K_p\Big[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\Big]$$

dove l'errore $e = r - y$ rappresenta la differenza tra il segnale di riferimento r (il set-point) e l'uscita del processo y (la variabile misurata e controllata) e

  - K_p rappresenta il guadagno del controllore, che determina l'aggressività del controllore stesso. È uno dei parametri di progetto.
  - T_i (*reset time*) è un parametro di progetto legato all'intensità dell'azione integrale.
  - T_d (*derivative time*) rappresenta invece il peso dell'azione derivatrice.

Struttura di base del PID



Azione P

$$u(t) = K_p \cdot e(t)$$

Azione PD

$$u(t) = K_p\left(e(t) + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

Azione PI

$$u(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_i}\int^t e(s)ds\right)$$

Azione PID

$$u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int^t e(s)ds + T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$

PID analogico - Accorgimenti

- L'azione derivativa ha funzione di trasferimento sT_d, che ha le caratteristiche di un filtro passa alto

- Pertanto, ha un guadagno elevato a frequenze elevate, e quindi porta ad amplificazioni del rumore di misura.

- Inoltre, un derivatore puro è impossibile da realizzare fisicamente

- La funzione di trasferimento sT_d viene quindi approssimata con

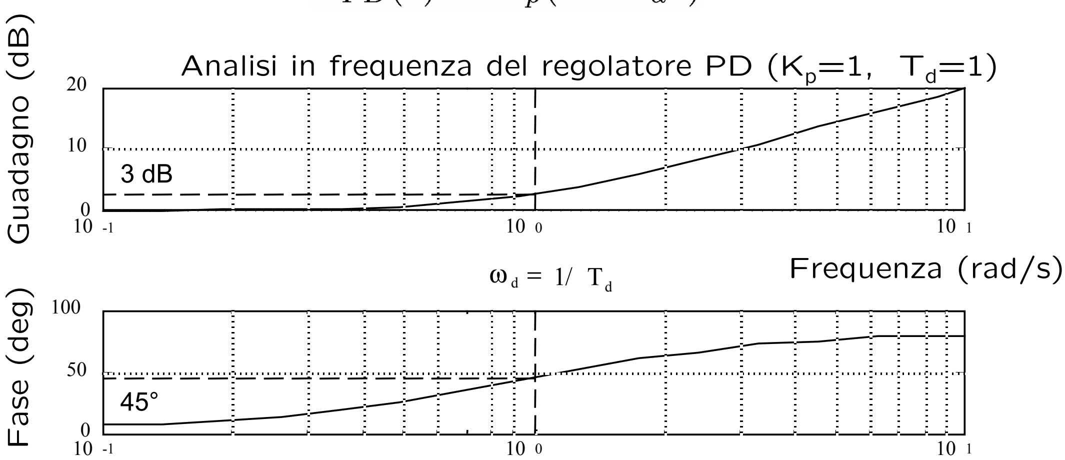
$$sT_d \approx \frac{sT_d}{1 + s\frac{T_d}{N}}$$

- Tale funzione di trasferimento approssima bene la derivata alle basse frequenze, ma il guadagno alle alte frequenze è limitato ad N

- N tipicamente è compreso tra 3 e 20.

Regolatore PD: risposta in frequenza

$$G_{\rm PD}(s) = K_p(1 + T_d s)$$



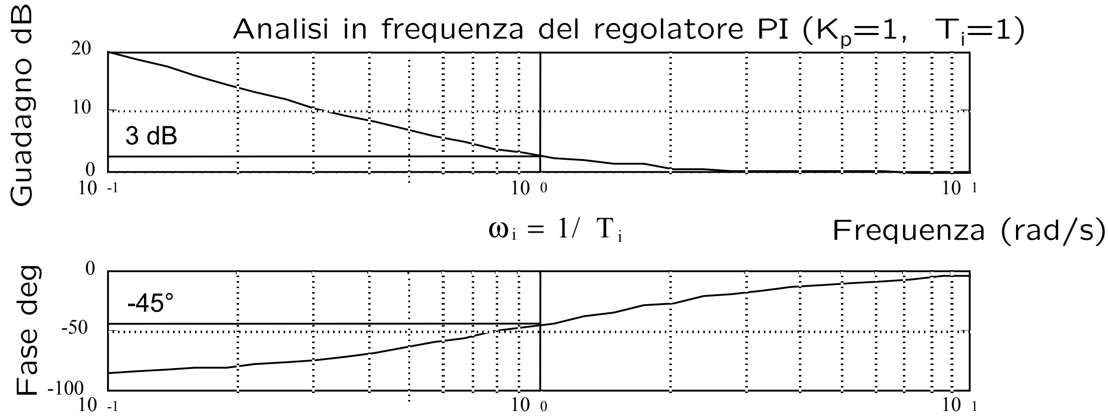
- L'eventuale polo aggiuntivo in $-N/T_d$ assicura la fisica realizzabilità della funzione di trasferimento.

- Ponendo tale polo a frequenza molto alta, esso non influenza l'azione del derivatore nella banda di interesse

- Il PD è assimilabile ad una rete anticipatrice il cui effetto quello di aggiungere fase positiva ed allargare la banda del sistema ad anello aperto

Regolatore PI: risposta in frequenza

$$G_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

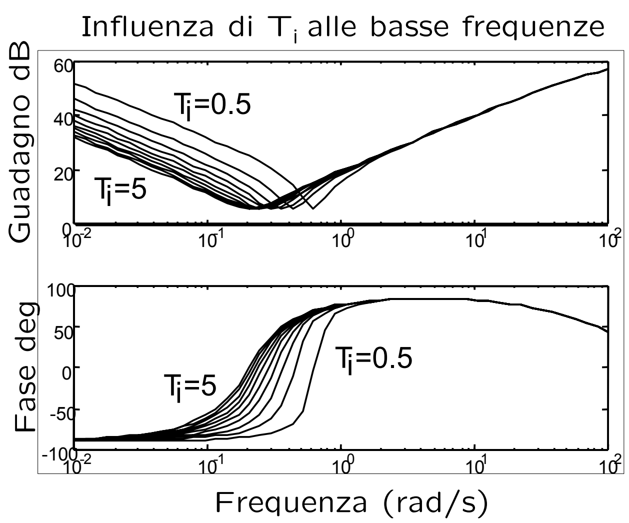


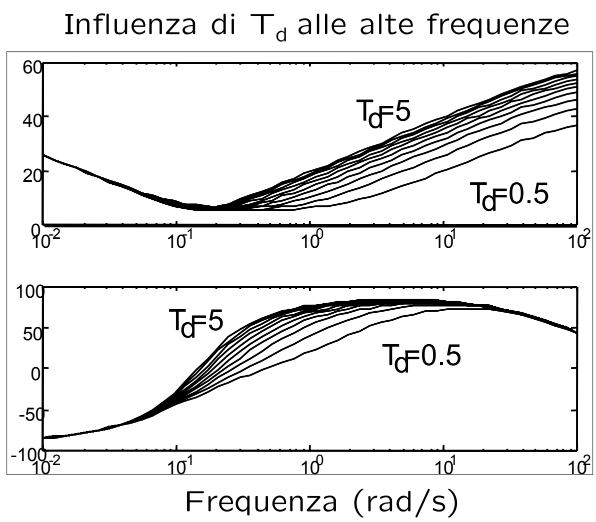
- Guadagno infinito in continua (azione integrale) e costante alle alte frequenze pari a $20\log(K_p)$.
- La frequenza di taglio è $\omega = \frac{1}{T_i}$

Regolatore PID: risposta in frequenza

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int^t e(s)ds + T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$

$$G_{PID}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = K_p \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$





PID: altri accorgimenti

Lavorando con i controllori analogici sono risultati molto opportuni anche altri due accorgimenti:

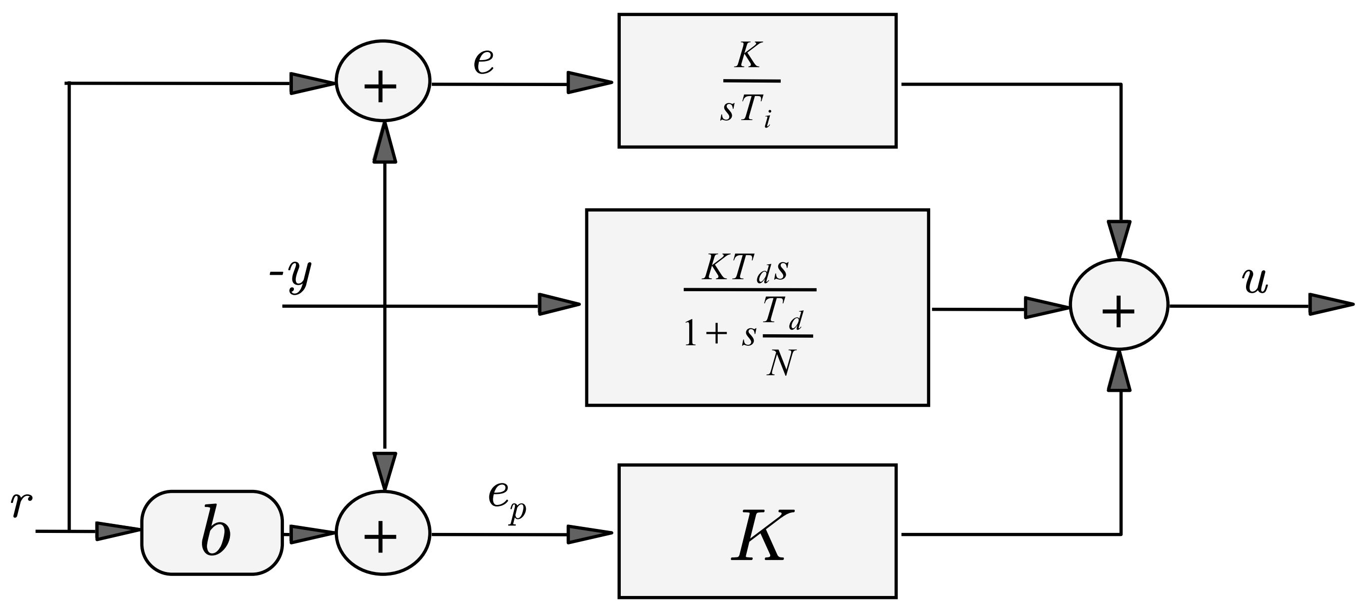
- si preferisce non includere il segnale di comando r nell'azione derivatrice; viene lasciato solo il segnale di uscita y.

- Il PID risulta più efficace se, nell'azione proporzionale, viene utilizzata solo una frazione b del segnale di comando.

Il controllore assume quindi la seguente forma:

$$u(t) = K\left[br(t) - y(t) + \frac{1}{sT_i}(r(t) - y(t)) - \frac{sT_d}{1 + s\frac{T_d}{N}}y(t)\right]$$

Schema del PID



Regolatore P - Risposta ad anello chiuso

- Considera un controllore proporzionale (P):

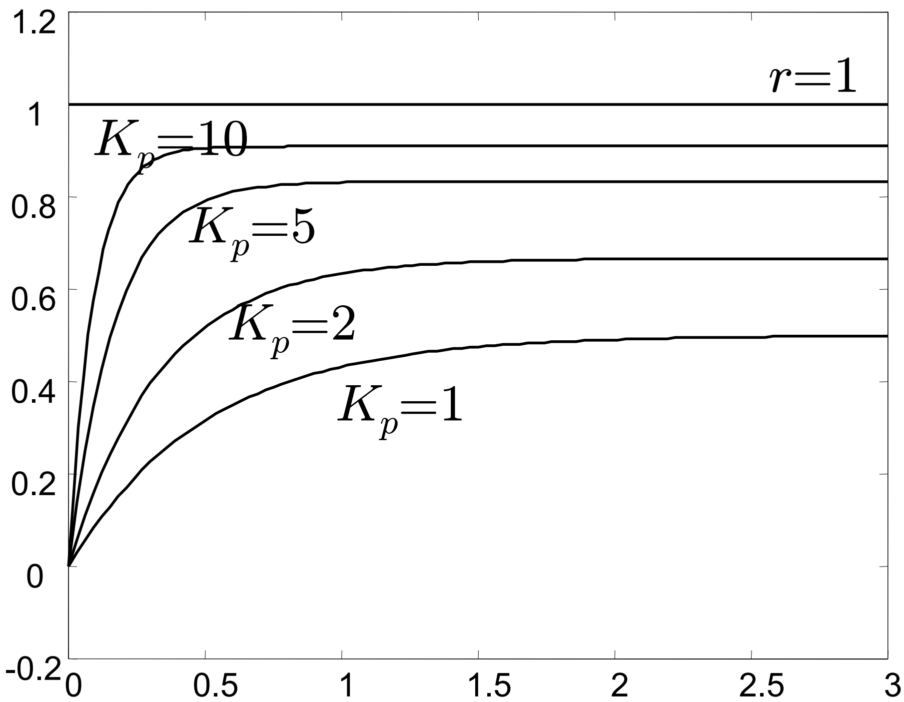
$$u(t) = K_p e(t)$$

- Applicandolo a un processo del primo ordine $G(s) = \frac{K_G}{1+\tau_G s}$, si ottiene la funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_G K_p}{1+K_G K_p}}{1 + \frac{\tau_G}{1+K_G K_p}s}$$

- Il numero di poli ad anello chiuso non è variato
- La costante di tempo ad anello chiuso $\frac{\tau_G}{1+K_G K_p}$ è minore di quella ad anello aperto τ_G
- Presenza di offset nell'inseguimento del riferimento costante

Regolatore P - Risposta ad anello chiuso



$$u(t) = K_p e(t)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G}{1+\tau_G s}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p K_G}{1+K_p K_G}}{1 + \frac{\tau_G}{1+K_p K_G}s}$$

Proprietà dell'azione integrale

- Considera un controllore integrale (I):

$$u(t) = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

- Applicandolo a un processo del primo ordine $G(s) = \frac{K_G}{1+\tau_G s}$, si ottiene la funzione di trasferimento ad anello chiuso

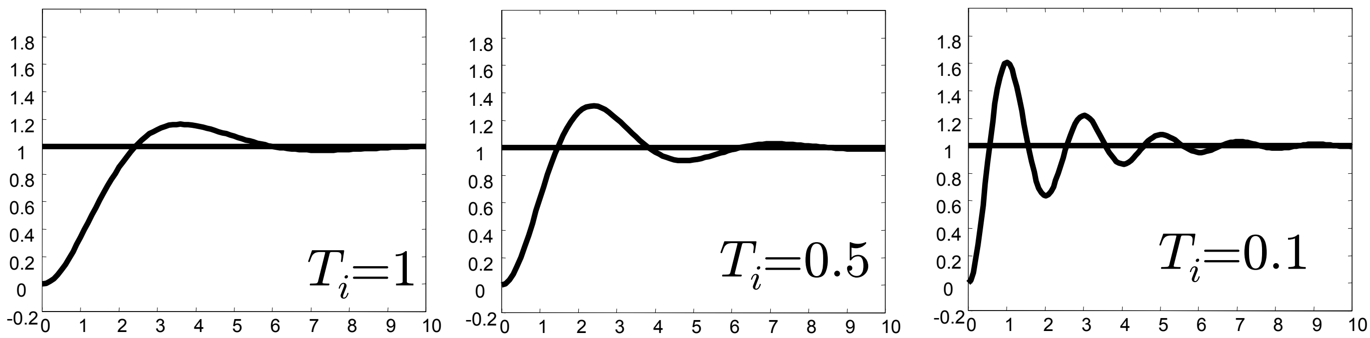
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\frac{T_i \tau_G}{K_p K_G} s^2 + \frac{T_i}{K_p K_G} s + 1}$$

- Il numero di poli ad anello chiuso è aumentato di uno

- Maggiore è l'azione integrale più il processo diventa veloce, ma allo stesso tempo aumentano le oscillazioni

- L'offset nell'inseguimento del riferimento costante è eliminato

Proprietà dell'azione integrale



$$u(t) = \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

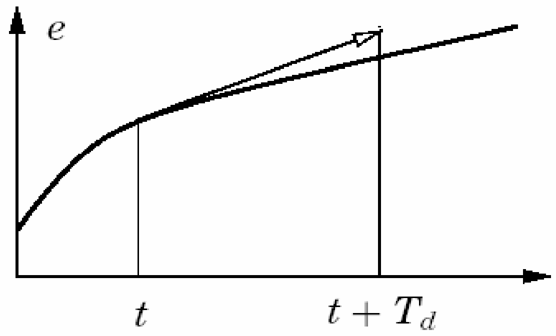
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_G}{1 + \tau_G s}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\frac{T_i \tau_G}{K_p K_G} s^2 + \frac{T_i}{K_p K_G} s + 1}$$

Proprietà dell'azione derivativa

- L'azione derivativa introduce una sorta di effetto "predittivo":

$$\hat{e}(t) = e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt}$$



- La predizione non è altro che una estrapolazione lineare a partire dal valore corrente $e(t)$ e della derivata $\frac{de(t)}{dt}$

- Esistono controllori più sofisticati che utilizzano una predizione più sofisticata, basata sul modello matematico del processo

Altre considerazioni

- Oltre il 90% dei PID sono di tipo PI

- Il controllo proporzionale è usato solo quando l'offset sl'inseguimento è tollerabile, oppure quando il modello del processo contiene già integratori.

- Il controllore PI viene applicato dove l'annullamento dell'offset è importante.

- Per processi lenti o dove le oscillazioni danno particolarmente fastidio viene utilizzato il PID completo (proporzionale + integrale + derivatrice)

PID industriale

Regolazione	Algoritmo	PID, PI, PD, P oppure On - Off
	Banda proporzionale (P)	0,5..1000%
	Tempo azione integrale (I)	0,1..100min., escludibile
	Tempo azione derivativa (D)	0,01..10min., escludibile
	Tempo del ciclo	1..200sec.
	Isteresi	0,1..10% (per regolazione on - off)
	Zona neutra	0..10% per regolazione a doppia azione (caldo-freddo)

PID digitale

L'operazione di discretizzazione può essere effettuata utilizzando le diverse metodologie viste (Eulero, Tustin, ecc.). Solitamente si usa la seguente tecnica:

- Parte proporzionale :

$$P(t) = K(br(t) - y(t))$$

  Essendo una relazione di tipo statico, non richiede nessuna approssimazione.

- Parte integrale :

$$I(t) = \frac{K}{T_i}\int^t e(\tau)\ d\tau$$

  viene approssimata mediante metodo di Eulero (approssimazione rettangolare)

$$I((k+1)T) = I(kT) + \frac{KT}{T_i}e(kT)$$

PID digitale

- Parte derivatrice :

$$\frac{T_d}{N}\frac{dD(t)}{dt} + D(t) = -KT_d\frac{dy(t)}{dt}$$

viene approssimata mediante la tecnica delle differenze all'indietro

$$D(kT) = \frac{T_d}{T_d + NT}D((k-1)T) - \frac{KT_dN}{T_d + NT}(y(kT) - y((k-1)T))$$

Nota: con questa approssimazione il polo discreto $z = \frac{T_d}{T_d+NT}$ è sempre all'interno del cerchio unitario.

Il segnale di controllo risulta quindi

$$u(kT) = P(kT) + I(kT) + D(kT)$$

Nota che questo tipo di approssimazione permette di calcolare separatamente le azioni proporzionale, derivatrice e integrale.

PID digitale in forma incrementale

- La formulazione del PID digitale precedentemente vista è nota come forma a segnali pieni

- Un'altra forma è quella incrementale , in cui il regolatore fornisce l'incremento del segnale di controllo:

$$\Delta u(kT) = u(kT) - u((k-1)T)$$

- Aspetti positivi: gli ingressi prodotti sono di ampiezza minore e quindi sono molto meno frequenti i fenomeni di saturazione numerica.

- Aspetti negativi: questa forma non può essere utilizzata per regolatori P e PD, per i quali l'unica opzione è la forma a segnale pieno.

PID digitale in forma incrementale

Per ricostruire il segnale di ingresso dal segnale incrementale, occorre porre in cascata un integratore:

$$u(kT) = u((k-1)T) + \Delta u(kT) \quad \Longrightarrow \quad u(kT) = \frac{1}{1-z^{-1}}\Delta u(kT)$$