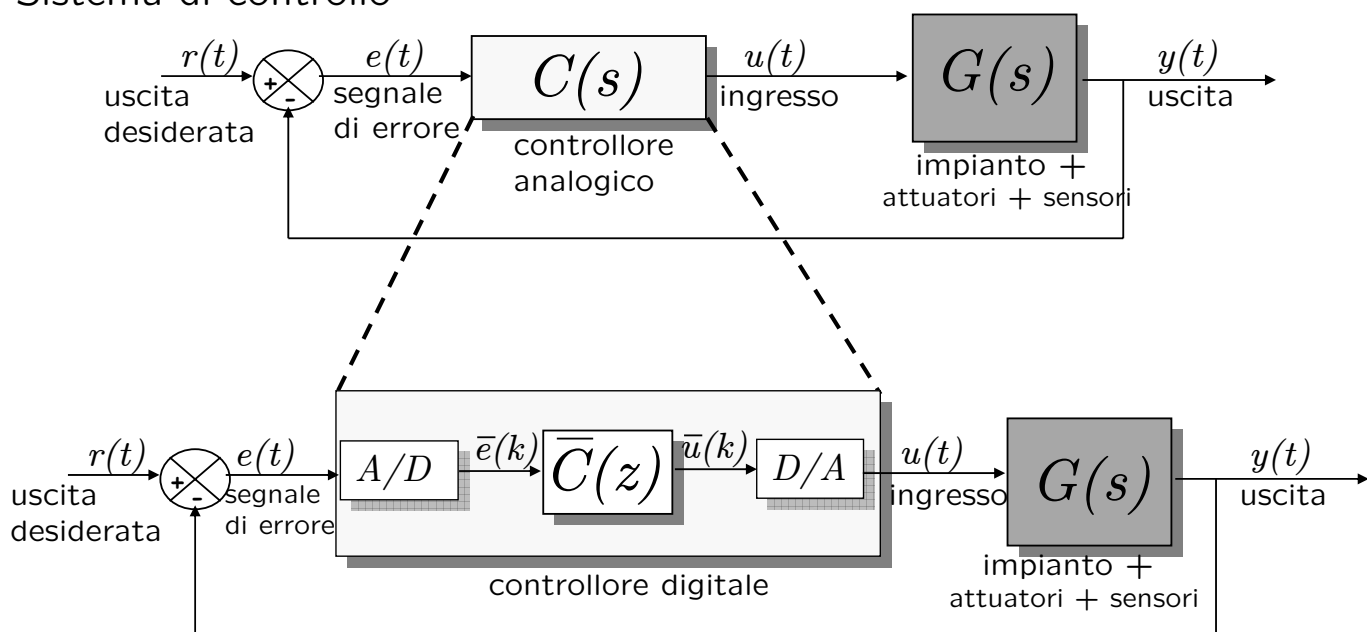


Scelta del tempo di campionamento

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Digitalizzazione di un controllore analogico

Sistema di controllo



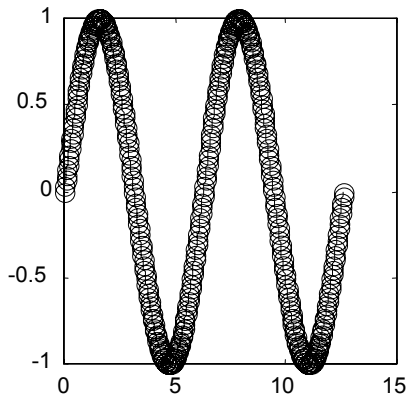
Il controllore digitale agisce con un tempo di campionamento T_s

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

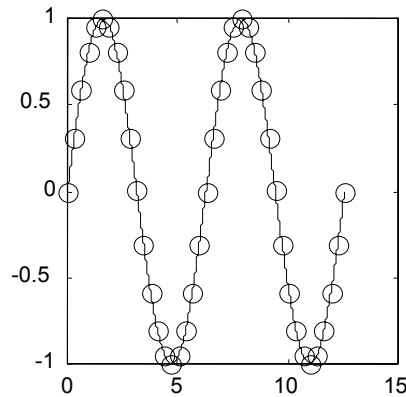
Problema della scelta del tempo di campionamento

- Quali criteri seguire per una corretta scelta di T ?

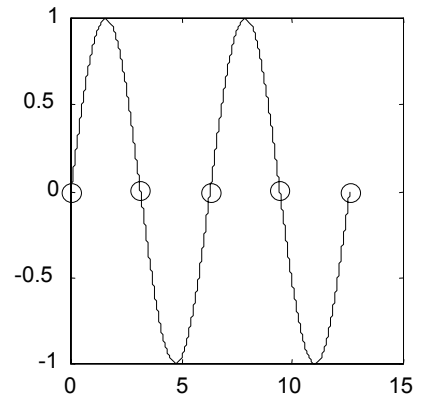
- Esempio: campionamento di $\sin(t)$



Passo di campionamento
 $T = \pi/100$



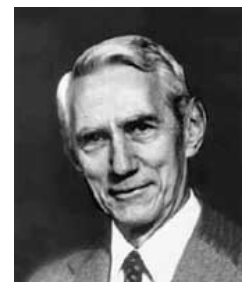
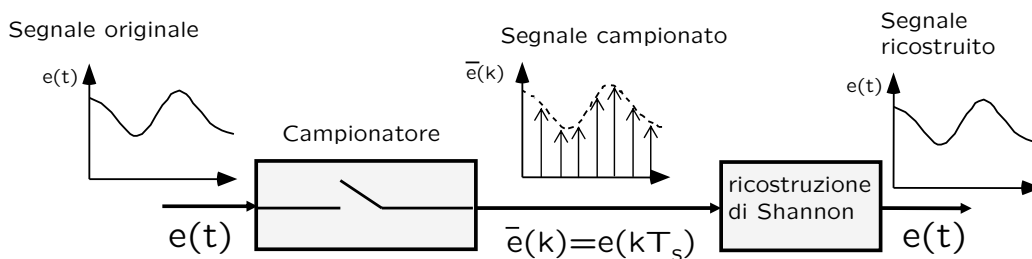
Passo di campionamento
 $T = \pi/10$



Passo di campionamento
 $T = \pi$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Richiami sul teorema di Shannon



Claude E. Shannon
(1916 - 2001)

- Teorema di Shannon:** Sia $e(t)$ un segnale con trasformata di Fourier $E(j\omega)$ tale che $E(j\omega) = 0$ per $|\omega| \geq \omega_{\max}$. Allora posto $\omega_N \triangleq \frac{\pi}{T} > \omega_{\max}$, si ha

$$e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \frac{\sin(\omega_N(t - kT))}{\omega_N(t - kT)}$$

- ω_N è detta "frequenza di Nyquist" ed equivale alla metà della frequenza di campionamento $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

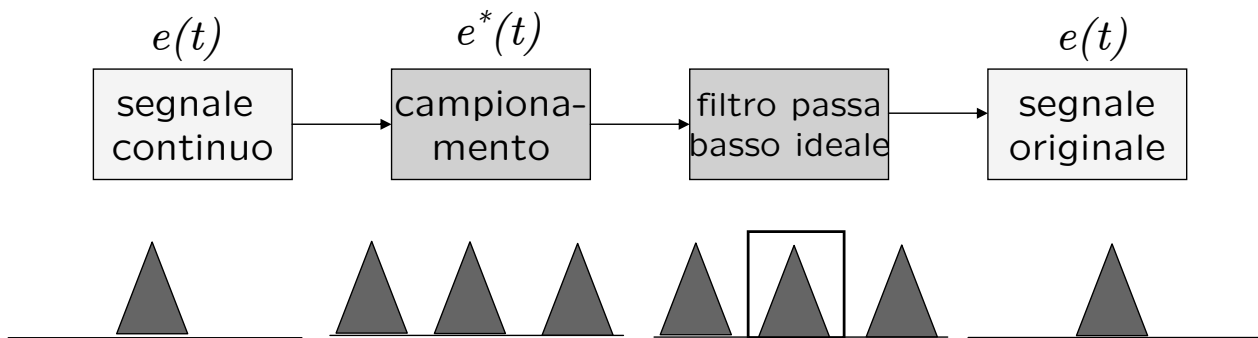
Interpretazione in frequenza

- Dalla dimostrazione del Teorema di Shannon, si ha che la ripetizione periodica (con periodo ω_s) di $E(j\omega)$

$$E_s(j\omega) \triangleq \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(j(\omega + k\omega_s)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT)e^{-jkT\omega}$$

che corrisponde alla trasformata di Fourier del segnale discreto $e(kT)$

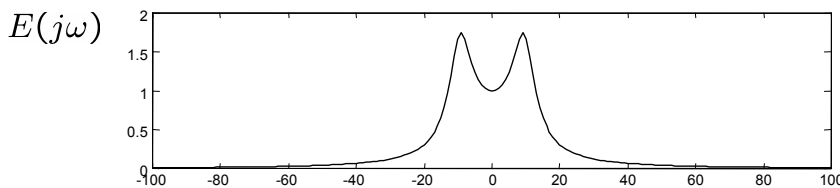
- Se $E(j\omega) = 0$ all'esterno della banda base $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$, posso riottenere $E(j\omega)$ filtrando $E^*(j\omega)$ con un filtro passa-basso ideale avente banda passante $\frac{\omega_s}{2}$



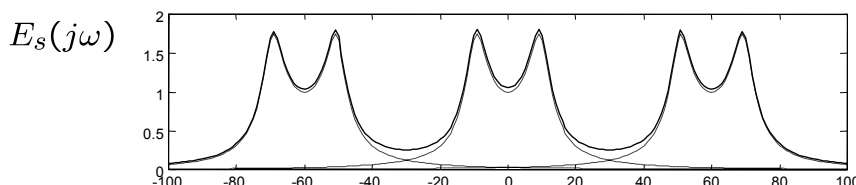
Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Difficoltà nell'uso della ricostruz. di Shannon

- Il filtro passa-basso ideale non è causale. Nelle applicazioni di signal processing si può introdurre un ritardo per renderlo causale (es: lettore CD audio)
- Viceversa, introdurre un ritardo nell'anello di controllo non è consigliabile! (cf. corso controlli automatici)
- Altro problema: i segnali presenti nell'anello di controllo possono avere contenuti in frequenza maggiori della frequenza di Nyquist



$$E(s) = \frac{100}{s^2 + 6s + 100}$$



$$\omega_s = 60 \text{ rad/s}$$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Fenomeno dell'Aliasing

- Cosa succede quando il segnale $e(t)$ ha contributo spettrale che si estende oltre $\frac{\omega_s}{2}$?

- Essendo

$$E_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(j(\omega + k\omega_s))$$

il valore $E_s(j\omega_1)$ ad una certa frequenza ω_1 dipende non solo da $E(j\omega_1)$, ma anche da tutti (gli infiniti) contributi $E(j(\omega_1 \pm \omega_s))$, $E(j(\omega_1 \pm 2\omega_s))$, ...

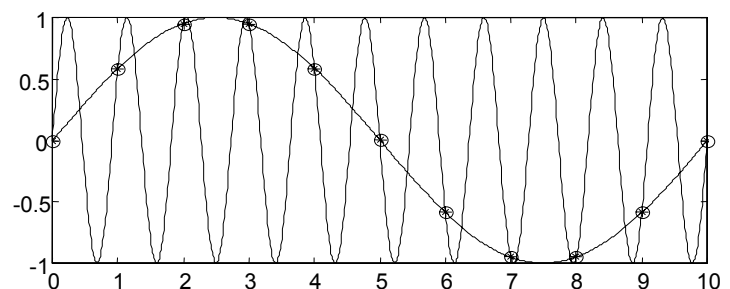
- Le frequenze $\omega_1 \pm k\omega_s$ sono dette alias di ω_1

- Esempio: segnali $\sin(\omega_1 t)$ e $\sin(\omega_2 t)$

$$T = 1 \text{ s}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{10}$$

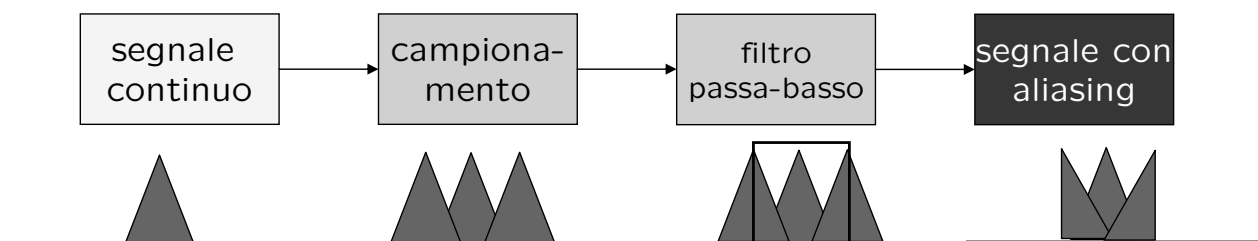
$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T} + \frac{2\pi}{10} = \frac{22\pi}{10}$$



Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Fenomeno dell'Aliasing

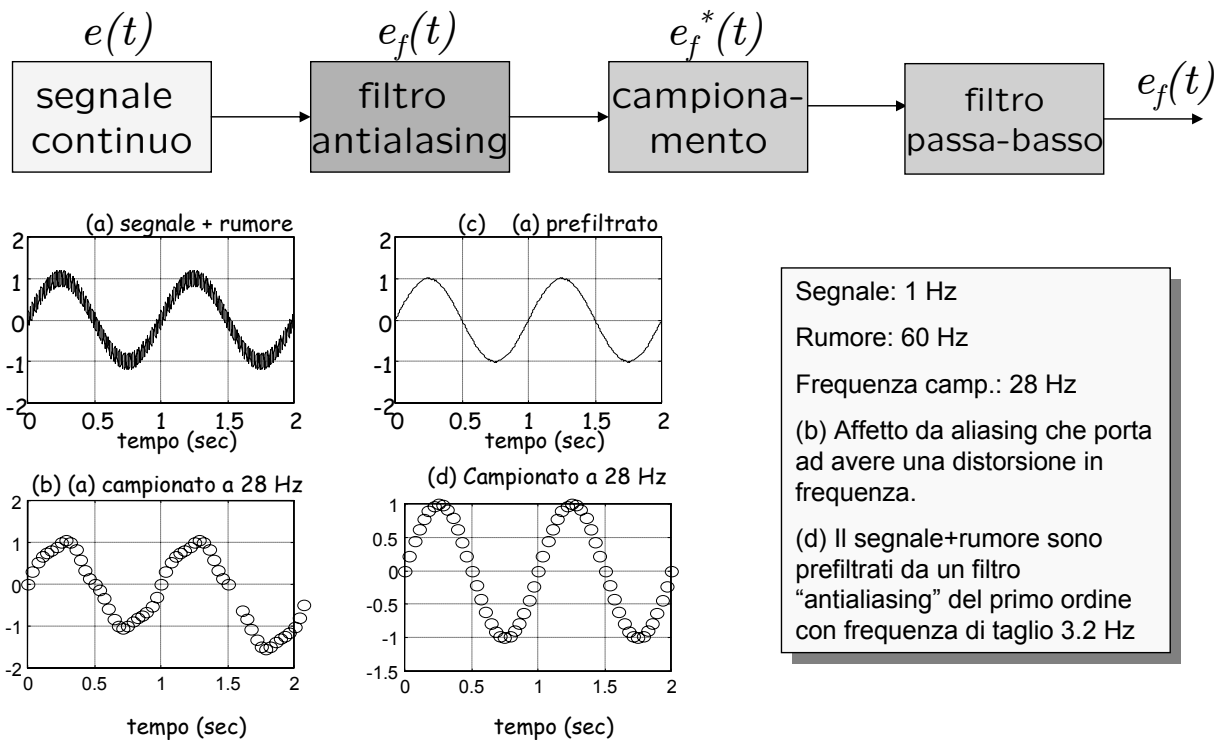
- Aliasing : fenomeno per il quale frequenze $\omega > \omega_N$ danno contributi nella banda base $[-\omega_N, \omega_N]$
- Se c'è aliasing, è impossibile ricostruire il segnale originale



Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Filtro antialiasing

- Al fine di evitare fenomeni di aliasing, si usa porre un filtro passa-basso a monte del campionatore (cioè a monte del convertitore A/D), detto filtro antialiasing



Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Scelta del tempo di campionamento

- Mentre nel signal processing interessa che la differenza fra il segnale originale e quello ricostruito sia piccola, nel controllo non interessa "approssimare" l'errore $e(t) = y(t) - r(t)$, quanto piuttosto che il sistema si comporti secondo le specifiche.
- Nel controllo si fa quindi dipendere la scelta di T_s dalle specifiche di banda e tempo di assestamento del sistema ad anello chiuso
- Questo porta a tempi di campionamento tipicamente più grandi che nei problemi di signal processing (DSP vs. μ -controllore)

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Scelta del tempo di campionamento

- Sia ω_c la banda desiderata del sistema ad anello chiuso. Per soddisfare il teorema di Shannon (ed evitare quindi aliasing) dovrà essere

$$\frac{\pi}{T} > \omega_c$$

- Tipicamente si sceglie

$$5\omega_c \leq \frac{2\pi}{T} \leq 100\omega_c$$

in maniera tale che la frequenza di taglio ω_f del filtro antialiasing (non ideale) possa essere ben equidistante sia da ω_c che da ω_N

- Ricordando la relazione approssimata $T_a\omega_c \approx \frac{5}{\zeta}$, dove T_a è il tempo di assestamento (1%) e ζ è lo smorzamento, ad esempio per $\zeta \approx 0.7$ si ottiene

$$\frac{T_a}{100} \leq T \leq \frac{T_a}{5}$$

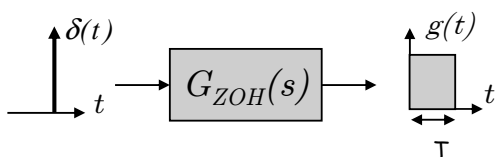
- Si sceglie quindi in genere un tempo di campionamento da avere circa $5 \div 100$ campioni sul tempo di assestamento

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Risposta in frequenza dello ZOH

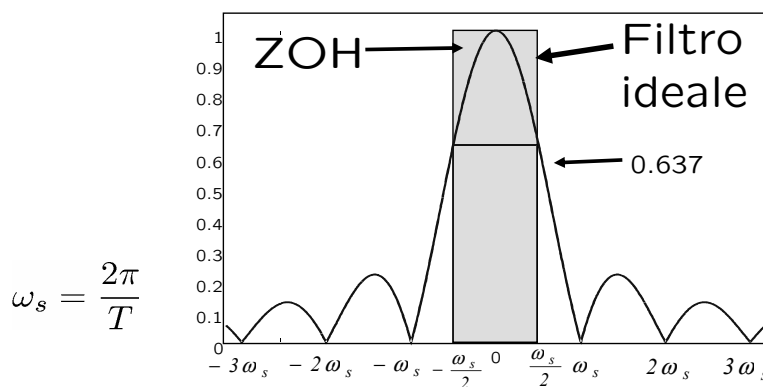
- Ricorda il modello equivalente del mantentore di ordine zero:

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}$$



$$G_{ZOH}(j\omega) = T e^{-j\omega T/2} \frac{\text{sinc}(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

$$|G_{ZOH}(j\omega)| = T \left| \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \right|, \quad \angle G_{ZOH}(j\omega) = -\frac{\omega T}{2}$$



Oltre ad attenuare anche in banda passante, lo ZOH introduce un ritardo di fase

Lo ZOH non è un filtro passa-basso ideale per eliminare eventuale aliasing, ma non possiamo farne a meno per convertire il segnale campionato in un segnale continuo nel tempo

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Scelta del tempo di campionamento

- Sia ω_c la frequenza di attraversamento della cascata $K = GC$ del sistema+compensatore ad anello aperto ($|K(j\omega_c)| = 0$ dB), e sia m_ϕ il margine di fase
- Supponiamo che sia tollerabile un peggioramento del margine di fase dovuto allo ZOH ad esempio di circa 10°
- Dobbiamo allora imporre che

$$\omega_c \frac{T_s}{2} \leq 10 \frac{\pi}{180}$$

ovvero

$$\omega_c T_s \leq 0.35$$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Effetto degli errori numerici

- Ricordiamo la relazione fra poli in s e poli in z :

$$z_i = e^{s_i T_s}$$

- Per $T_s \rightarrow 0$, si ha che $z_i \rightarrow 1$ qualsiasi siano i poli s_i !
- Questo può provocare problemi quando si lavora in precisione finita
- Esempio: Ho due poli in $s_1 = -1$ e $s_2 = -10$
 - Campionando con $T_s = 1$ ms, ottengo $z_1 = e^{-0.001} \approx 0.9990$, $z_2 = e^{-0.01} \approx 0.9900$. Se ad esempio troncassi alla seconda cifra decimale, avrei $z_1 = z_2$, e quindi $s_1 = \frac{1}{T_s} \ln z_1 = \frac{1}{T_s} \ln z_2 = s_2 \approx -10.05$
 - Campionando con $T_s = 100$ ms e troncando, ottengo $z_1 = 0.90$, $z_2 = 0.36$, e quindi $s_1 \approx -1.05$, $s_2 \approx -10.21$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

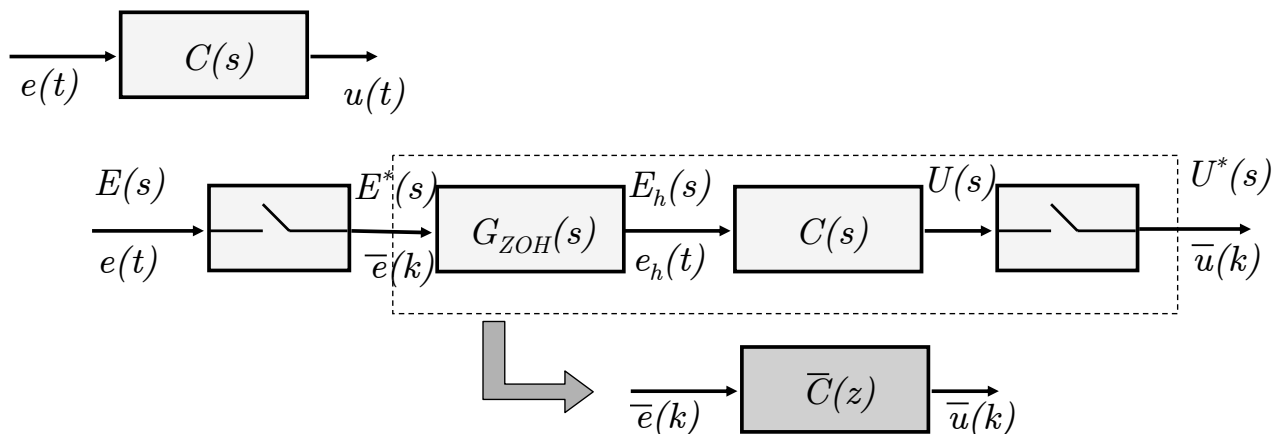
Scelta del tempo di campionamento

- Tempi di campionamento T_s troppo piccoli provocano malcondizionamenti numerici e quindi problemi dovuti al fatto che l'unità di calcolo che implementa la legge di controllo lavora in precisione finita
- Inoltre, tempi T_s troppo piccoli impongono un hardware molto veloce e quindi costi molto elevati
- La scelta del tempo di campionamento T_s influisce anche sulla prontezza del sistema a reagire a disturbi che intervengono sul sistema (vedi es. Astrom-Wittenmark)

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Discretizzazione approssimata con ZOH

- Vediamo un ultimo metodo di discretizzazione $\bar{C}(z)$ di un controllore $C(s)$ preassegnato, in cui la risposta al gradino è preservata (il metodo vale anche per discretizzare il processo $G(s)$ in un equivalente a dati campionati $\bar{G}(z)$)



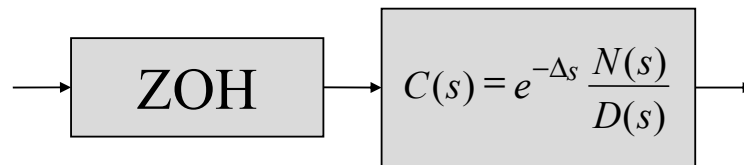
- Dovrà essere:

$$\bar{C}(z) = Z \left\{ \frac{C(s)}{s} (1 - e^{-sT}) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{C(s)}{s} \right\}$$

dove con $Z\{F(s)\}$ indichiamo la trasformata Z dei campioni $f(kT)$ della funzione $f(t) = L^{-1}[F(s)]$.

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Discretizzazione approssimata con ZOH



- Più in generale, se $C(s)$ ha ritardi

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\Delta s},$$

possiamo determinare la parte intera del ritardo $\Delta = (h-1)T + \delta$, $\delta < T$, e quindi

$$e^{-s\Delta} = e^{-s[(h-1)T + \delta]} = e^{-shT} e^{s(T-\delta)}$$

- Includiamo l'integratore $\frac{1}{s}$ proveniente dallo ZOH

- Il controllore discretizzato risulta

$$\bar{C}(z) = z^{-h} (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{e^{s(T-\delta)} N(s)}{sD(s)} \right\}$$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Discretizzazione approssimata con ZOH

- Utilizzando il teorema dei residui espandiamo la funzione di s intorno ai suoi poli (radici di $sD(s)$) e applichiamo la trasformata Z a ciascun termine.

- Ad esempio nel caso di poli semplici

$$Z \left\{ \frac{1}{s - s_i} \right\} = Z [e^{s_i t} |_{t=kT}] = Z [(e^{s_i T})^k] = \frac{1}{1 - z^{-1} e^{T s_i}}$$

- Otteniamo quindi:

$$\bar{C}(z) = z^{-h} (1 - z^{-1}) \sum_i Z \left\{ \frac{R_i}{s - s_i} \right\} = z^{-h} (1 - z^{-1}) \sum_i \frac{R_i}{1 - z^{-1} e^{T s_i}}$$

con

$$R_i = \text{residuo intorno al polo } s_i \text{ di } e^{s(T-\delta)} \frac{N(s)}{sD(s)}$$

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Discretizzazione approssimata con ZOH

- Se $C(s)$ è una funzione di trasferimento di ordine n , segue che anche $\bar{C}(z)$ è di ordine n . L'introduzione dello ZOH non aumenta l'ordine, perché il polo in $s = 0$ si trasforma in $1 - z^{-1}$ e viene poi eliminato dall'analogo termine dovuto al numeratore dallo ZOH stesso
- Se $C(s)$ è strettamente propria e di ordine n , $\bar{C}(z)$ ha in generale $n - 1$ zeri, indipendentemente dal numero di zeri di $C(s)$

$$\bar{C}(z) = z^{-h} \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

- Nota: la trasformazione $z = e^{sT}$ vale solamente per i poli: in generale non è possibile prevedere la posizione degli zeri
- La $\bar{C}(z)$ ottenuta mediante questo metodo di discretizzazione mantiene la risposta al gradino