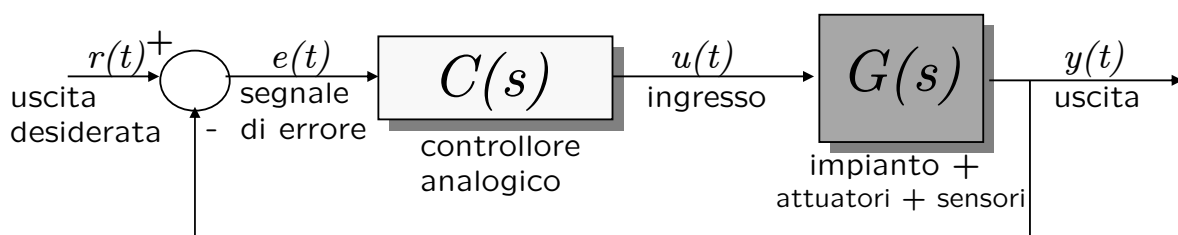


# Analisi dei sistemi di controllo a segnali campionati

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Sistemi di controllo (già analizzati)

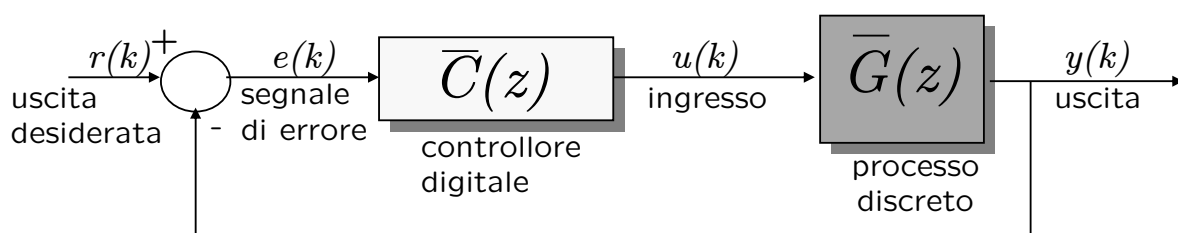
Tempo continuo (trasformata di Laplace / analisi in frequenza)



$t$ =variabile continua (=tempo)

Corso Progettazione Sistemi di Controllo

Tempo discreto (trasformata zeta)

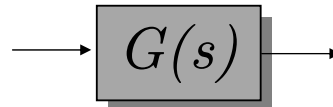


$k$ =variabile intera (=numero di intervalli di campionamento)

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

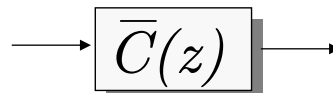
# Tempo discreto vs. tempo continuo

- Il processo da controllare è (quasi sempre) di tipo tempo-continuo:



- Descritto da un modello ad equazioni differenziali (spesso lineari)
- I segnali agli attuatori (es: tensioni elettriche ai motori) e le grandezze di uscita (es: temperature, pressioni, posizioni) variano con continuità nel tempo

- Il controllore che viene implementato è (quasi sempre) di tipo tempo-discreto:



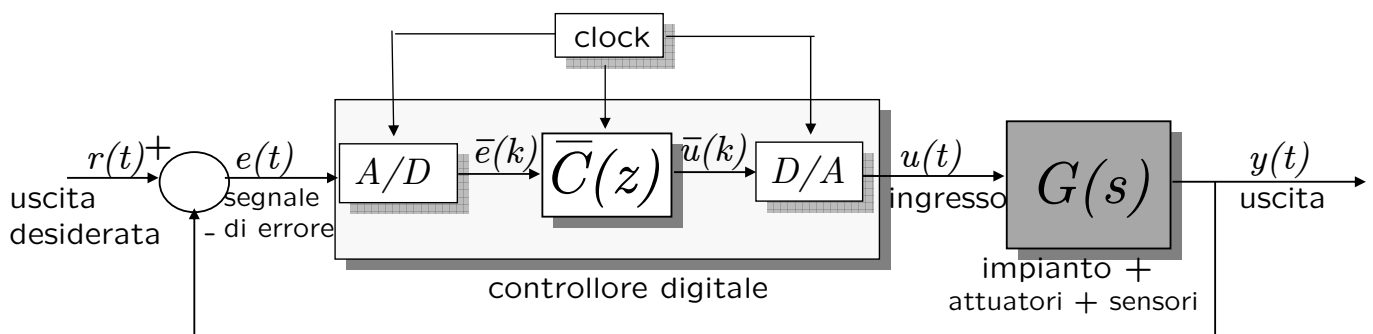
- Più economico da implementare rispetto alla forma analogica (es. meno costoso delle reti elettriche RC+Op.Amp.)
- Più economico da riprogrammare (es: firmware centralina auto)
- Possibilità di time-sharing (più controllori, stesso hardware)
- Più versatile (es: leggi di controllo non lineari, discontinue, ecc.)

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Sistemi di controllo a dati campionati

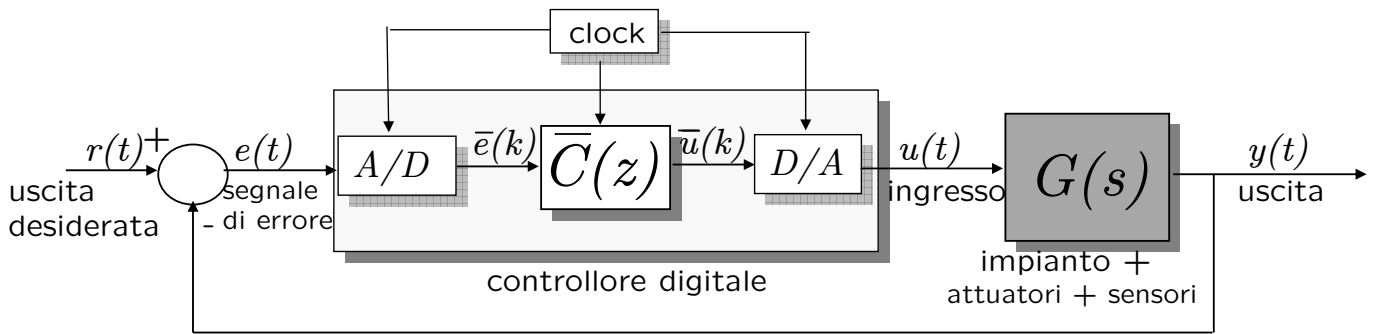
*(sampled-data control systems)*

È quindi fondamentale analizzare il comportamento di un processo continuo in anello chiuso con un controllore digitale



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Legame fra variabili TC/TD

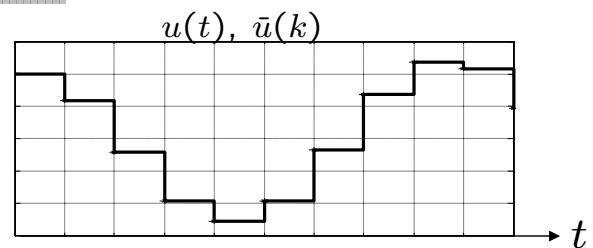
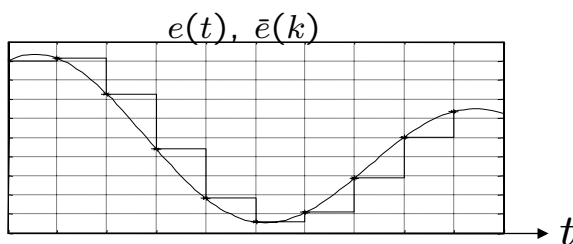


Il controllore digitale agisce con un tempo di campionamento  $T$ :

$$u(t) = \bar{u}(k) \text{ per } kT \leq t < (k+1)T$$

$$\bar{e}(k) = e(kT) \text{ per } k = 0, 1, \dots$$

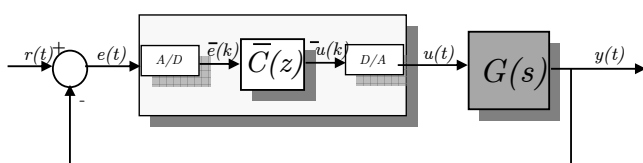
legame fra le variabili tempo-continue e le variabili tempo-discrete



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

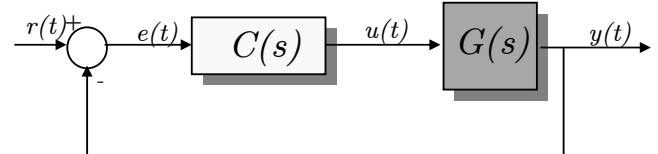
## Pro e contro del controllo digitale

### Controllo a tempo discreto



- Svantaggi
  - Segnali di controllo soltanto costanti a tratti
  - Retroazione dall'uscita soltanto agli istanti di campionamento
  - Possibile instabilità se  $T$  è troppo lungo
- Vantaggi
  - **Economicità, versatilità**

### Controllo a tempo continuo

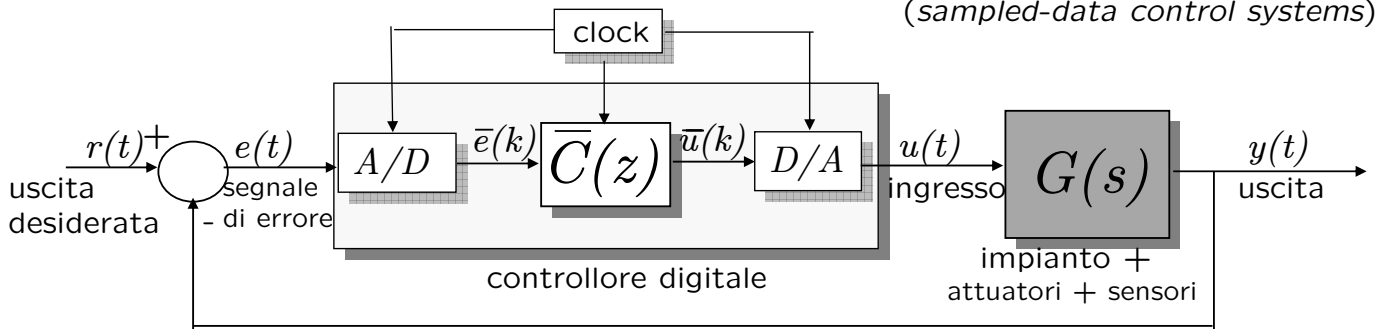


- Vantaggi
  - Retroazione continua dall'uscita ( $\Rightarrow$  reazione tempestiva nei confronti di disturbi sull'uscita)
  - Segnali di controllo non necessariamente costanti a tratti
- Svantaggi
  - Più difficili da implementare, meno versatili

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Sistemi di controllo a dati campionati

(sampled-data control systems)



Possibilità di analisi:

1. Trattare il sistema  $G(s)$  come fosse un sistema a tempo-discreto, ignorando il comportamento nell'inter-sampling  
(punto di vista del controllore)  $\longrightarrow$  Analisi nel discreto
2. Modellare il controllore digitale come controllore a tempo-continuo  
(punto di vista del processo)  $\longrightarrow$  Analisi nel continuo
3. Analisi puramente simulativa per via numerica (es: Simulink)  
(con le dovute cautele nell'interpretazione dei risultati)

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Analisi nel discreto - Campionamento esatto

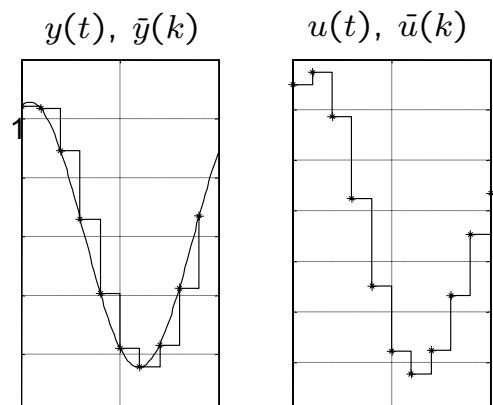
- Consideriamo una realizzazione del modello  $G(s)$  tempo continuo del processo in forma di spazio di stato:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

vogliamo esprimerne l'evoluzione agli istanti di campionamento  $t = 0, T, 2T, \dots, kT, \dots$ , ricordando che l'ingresso  $u(t)$  sia costante durante ogni intervallo di campionamento:

$$u(t) = \bar{u}(k), \quad kT \leq t < (k+1)T$$

- Siano  $\bar{x}(k) \triangleq x(kT)$  e  $\bar{y}(k) \triangleq y(kT)$  i campioni dello stato e dell'uscita, rispettivamente, all'istante di campionamento  $k$ -esimo.



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Campionamento esatto (Review)

- Applichiamo la *formula di Lagrange* per integrare nel tempo il modello lineare del processo:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

con  $t = (k + 1)T$ ,  $t_0 = kT$ ,  $x(t_0) = x(kT)$ .

- Poiché l'ingresso è costante a tratti

$$u(\tau) \equiv \bar{u}(k), \quad kT \leq \tau < (k + 1)T$$

si ottiene:

$$x((k + 1)T) = e^{AT}x(kT) + \left( \int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau \right) B\bar{u}(k)$$

e quindi

$$\bar{x}(k + 1) = e^{AT}\bar{x}(k) + \left( \int_0^T e^{A\tau}d\tau \right) B\bar{u}(k)$$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Campionamento esatto (Review)

- Il sistema tempo-discreto a segnali campionati

$$\begin{cases} \bar{x}(k + 1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\bar{u}(k) \\ \bar{y}(k) = \bar{C}\bar{x}(k) + \bar{D}\bar{u}(k) \end{cases}$$

è legato al sistema tempo continuo dalle relazioni

$$\begin{array}{ll} \bar{A} \triangleq e^{AT} & \bar{B} \triangleq \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \\ \bar{C} \triangleq C & \bar{D} \triangleq D \end{array}$$

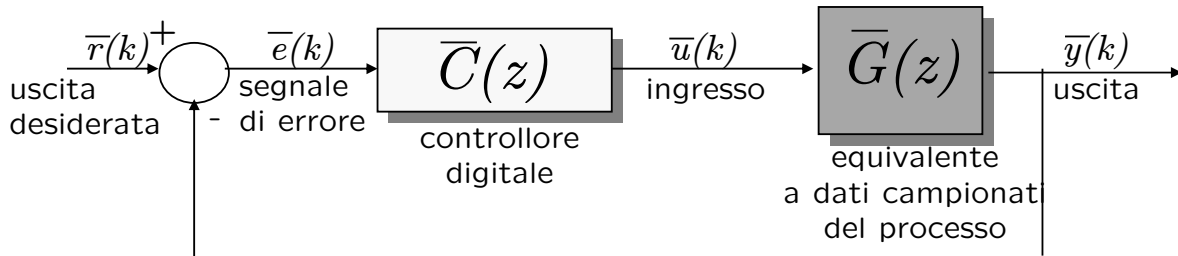
- Nota: in generale, affinché il sistema a tempo discreto  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$  e il sistema a tempo continuo  $(A, B, C, D)$  coincidano agli istanti di campionamento  $t = kT$  occorre che l'ingresso  $u(t)$  sia costante durante l'intervallo di campionamento.

```
In Matlab: sys=ss(A,B,C,D);  
sysd=c2d(sys,T);  
[Ab,Bb,Cb,Db]=ssdata(sysd);
```

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Analisi a tempo discreto

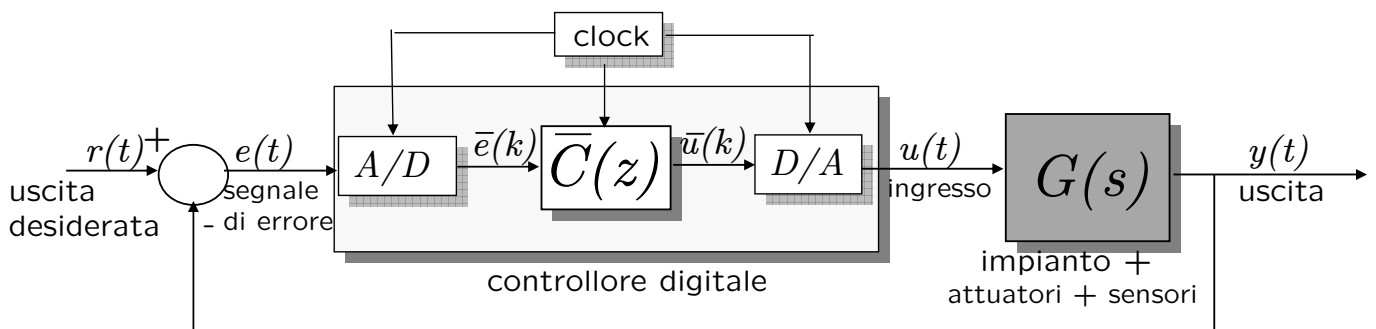
Avendo trasformato il sistema  $G(s)$  nel suo equivalente a tempo-discreto  $\bar{G}(z)$  abbiamo ricondotto l'analisi del *sistema ad anello chiuso a dati campionati* all'analisi di un *anello di retroazione a tempo discreto* ("modello stroboscopico"):



**NB:** l'analisi di stabilità/prestazione/simulazione non tiene conto di cosa accade al processo fra un tempo di campionamento e l'altro (*intersampling*)

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Analisi a tempo continuo



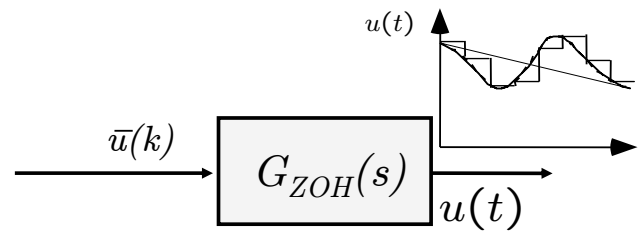
Vogliamo analizzare il comportamento dell'anello chiuso a tempo continuo:

- Capire il comportamento anche durante l'*intersampling*
- Analisi nel dominio della frequenza (es: comportamento nei confronti di rumori additivi sull'uscita)

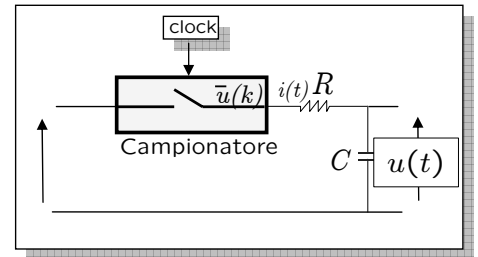
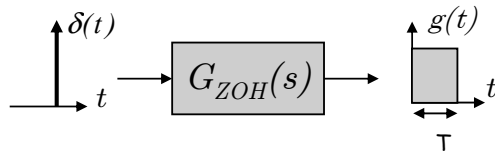
**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Modello matematico del mantenitore

Mantenitore di ordine zero  
(Zero Order Holder, ZOH)



Consideriamo il mantenimento di un segnale impulsivo unitario:



La funzione "impulso rettangolare" di ampiezza  $T$  è data da

$$g(t) = 1(t) - 1(t - T), \quad 1(t) \triangleq \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

la cui trasformata di Laplace risulta essere

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}$$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

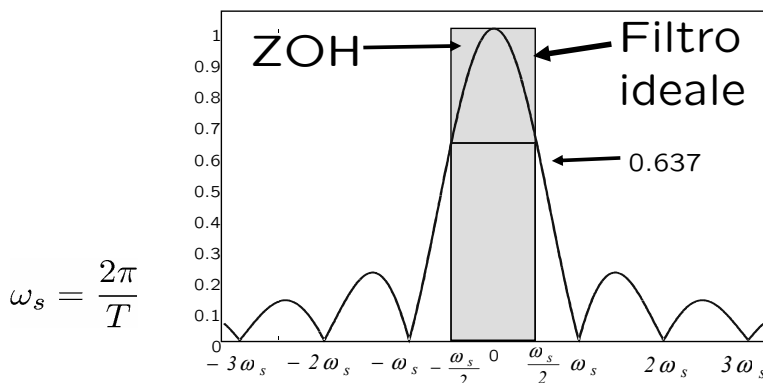
## Risposta in frequenza dello ZOH

- Valutiamo  $G_{ZOH}(j\omega)$ :

$$G_{ZOH}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = e^{-j\omega T/2} \underbrace{\left( \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} \right)}_{\sin(\omega T/2)} \frac{2j}{j\omega} = T e^{-j\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

- Pertanto:

$$|G_{ZOH}(j\omega)| = T \left| \text{sinc} \left( \frac{\omega T}{2} \right) \right|, \quad \angle G_{ZOH}(j\omega) = -\frac{\omega T}{2}$$



Oltre ad attenuare anche in banda passante, lo ZOH introduce un ritardo di fase

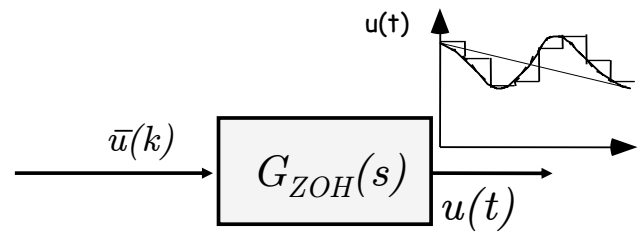
Lo ZOH è un filtro passa-basso (non ideale)

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Modello matematico del mantenitore

Calcoliamo il legame esistente fra i campioni  $u(k)$  e  $u(t)$ :

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}(k)g(t - kT)$$



passando alle trasformate di Laplace:

$$\begin{aligned} U(s) &= \mathcal{L}[u(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}(k)\mathcal{L}[g(t - kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}(k)e^{-skT}G_{ZOH}(s) \\ &= G_{ZOH}(s) \cdot \bar{U}(z)|_{z=e^{sT}} \end{aligned}$$

dove  $\bar{U}(z) = \mathcal{Z}[\bar{u}(k)]$  è la trasformata zeta dei campioni  $\bar{u}(k)$ .

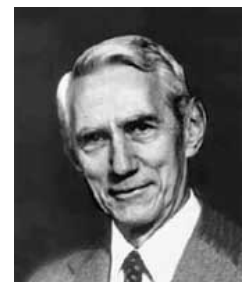
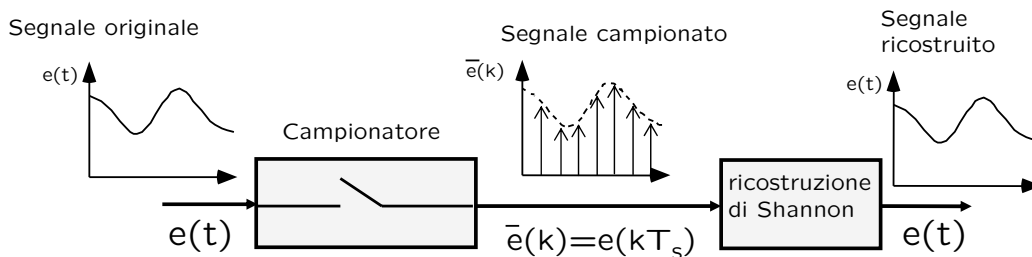
Essendo  $\bar{U}(z) = \bar{C}(z)\bar{E}(z)$ , si ottiene:

$$U(s) = G_{ZOH}(s) \cdot \bar{C}(e^{sT})\bar{E}(e^{sT})$$

dove  $\bar{E}(z) = \mathcal{Z}[\bar{e}(k)]$  è la trasformata zeta dei campioni  $\bar{e}(k)$ .

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Richiami sul teorema di Shannon



Claude E. Shannon  
(1916 - 2001)

- **Teorema di Shannon:** Sia  $e(t)$  un segnale con trasformata di Fourier  $E(j\omega)$  tale che  $E(j\omega) = 0$  per  $|\omega| \geq \omega_{\max}$ . Allora posto  $\omega_N \triangleq \frac{\pi}{T} > \omega_{\max}$ , si ha

$$e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \frac{\sin(\omega_N(t - kT))}{\omega_N(t - kT)}$$

- $\omega_N$  è detta "frequenza di Nyquist" ed equivale alla metà della frequenza di campionamento  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$

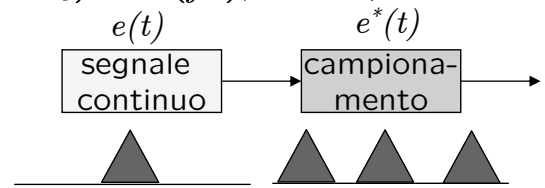
**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**



# Effetto del campionamento

- Sia  $E_s(j\omega)$  la ripetizione periodica (con periodo  $\omega_s$ ) di  $E(j\omega)$ , divisa per  $T$

$$E_s(j\omega) \triangleq \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(j(\omega + k\omega_s))$$



- Dalla dimostrazione del Teorema di Shannon si ha che

$$E_s(j\omega) \triangleq \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(j(\omega + k\omega_s)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT)e^{-jkT\omega}$$

- Se  $E(j\omega) \approx 0$  all'esterno della banda base  $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ , per  $|\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$  e per l'effetto passa-basso dello ZOH possiamo scrivere

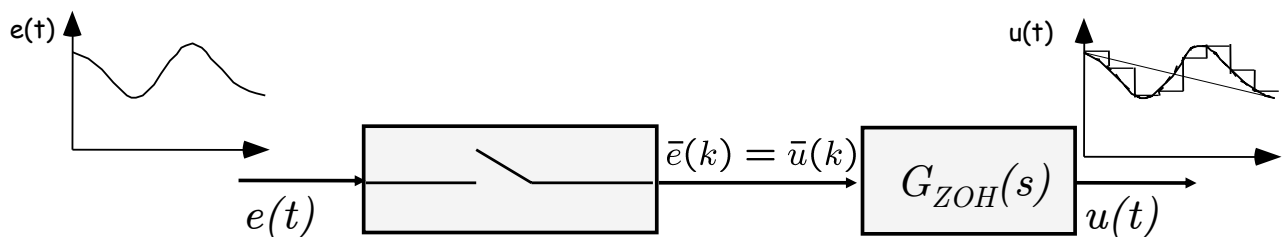
$$\frac{1}{T}E(j\omega) \approx E_s(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT)e^{-jkT\omega}$$

- Passando alle trasformate zeta e di Laplace:

$$\bar{E}(e^{sT}) \approx \frac{1}{T}E(s)$$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Modello matematico del controllore



Calcoliamo il guadagno in continua dello ZOH:

$$G_{ZOH}(s=0) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \Big|_{s=0} = \frac{1 - (1 - Ts + \dots + (-1)^n \frac{T^n s^n}{n!} + \dots)}{s} \Big|_{s=0} = T$$

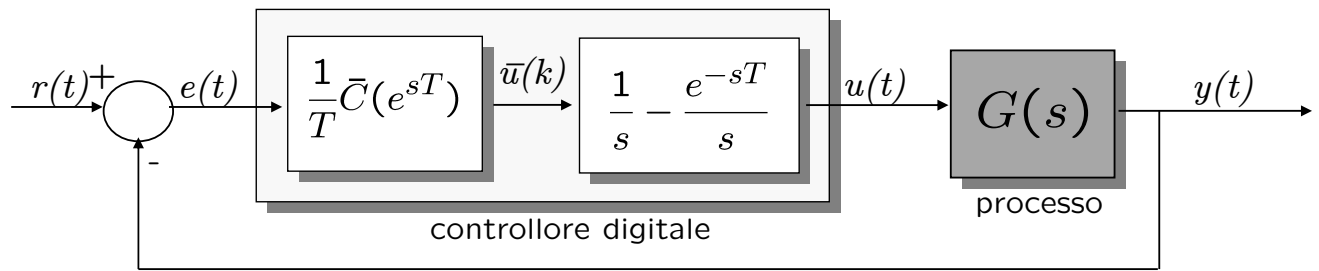
Nel caso in cui  $e(t) \equiv 1$ , dovrà essere  $u(t) \equiv 1$ , quindi il campionatore dovrà avere guadagno in continua pari a  $1/T$ .

In conclusione:

$$U(s) \approx G_{ZOH}(s) \cdot \frac{1}{T} \bar{C}(e^{sT}) E(s)$$

(Ricorda: il risultato vale per  $E(j\omega) \approx 0$  per  $\omega \geq \pi/T$ )

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

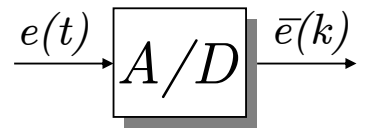


Possiamo adesso analizzare il sistema a dati campionati mediante strumenti del dominio della frequenza (per studiare ad esempio la sensitività rispetto al rumore).

Appendice: Modello matematico ZOH

## Appendice: Modello matematico ZOH

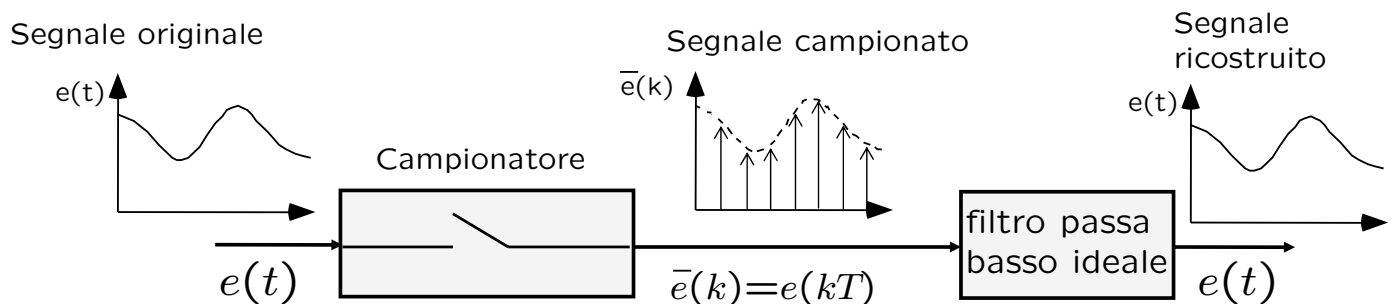
- Consideriamo l'operazione di campionamento, cioè la conversione del segnale analogico  $e(t)$  in valori digitali  $\bar{e}(k)$  ad istanti di tempo prefissati  $kT$



- Possiamo considerare l'operazione di sample & hold divisa in due parti:

1. congelamento del valore corrente  $e(kT)$  (campionamento)
2. mantenimento del valore  $e(kT)$  durante tutto l'intervallo  $[kT, (k+1)T)$

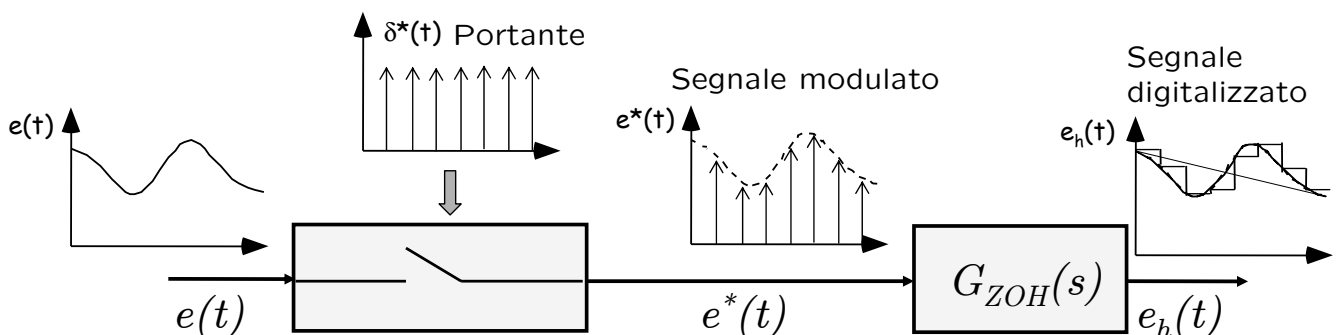
(in realtà esiste una parte intermedia di quantizzazione del valore  $e(kT)$ , che qui trascuriamo)



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Appendice: Modello matematico ZOH

- Modelliamo matematicamente la fase (1) come la modulazione impulsiva di un *pettine di Dirac*  $\delta^*(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$ , la fase (2) come il successivo filtraggio del segnale impulsivo mediante un filtro passa-basso



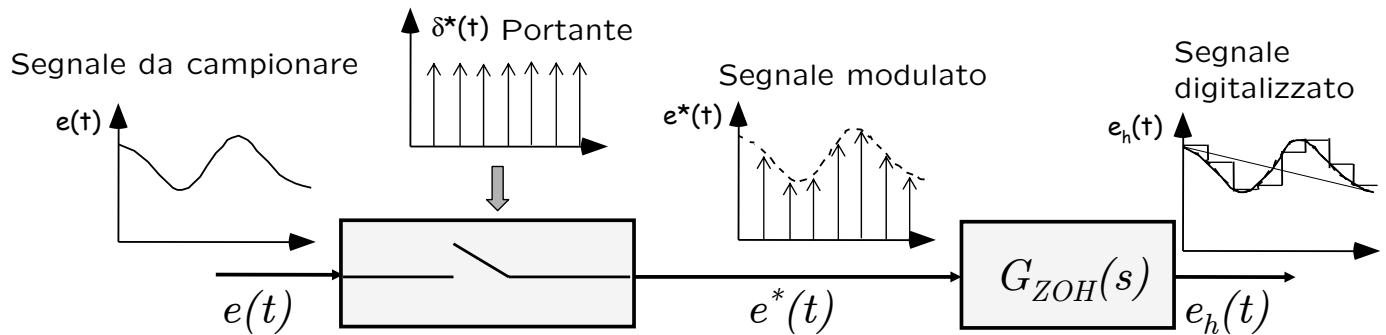
- Segnale modulato:

$$e^*(t) \triangleq \delta^*(t)e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(t)\delta(t - kT)$$

- Interpretazione:  $\delta(kT)$  rappresenta la corrente impulsiva che scorre nel circuito elettrico di sampling durante la chiusura dell'interruttore

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Appendice: Modello matematico ZOH



- Se calcoliamo la trasformata di Laplace  $E^*(s) = \mathcal{L}[e^*(t)]$ :

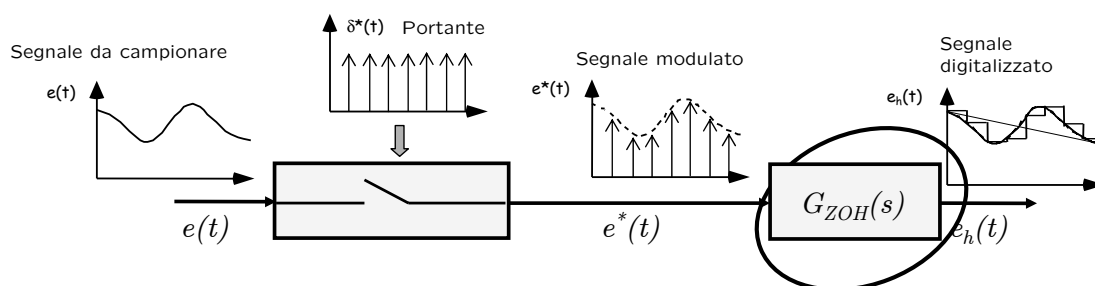
$$\begin{aligned}
 E^*(s) &\triangleq \mathcal{L}[e^*(t)] = \int_0^{+\infty} e^*(t)e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(t)\delta(t - kT)e^{-st} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e(t)\delta(t - kT)e^{-st} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT)e^{-sT} dt = Z_e(z)|_{z=e^{sT}}
 \end{aligned}$$

dove  $Z_e(z)$  è la trasformata zeta della sequenza  $\{e(kT)\}_{k=-\infty}^{\infty}$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Modello matematico del mantenitore

- Ci rimane da caratterizzare matematicamente il mantenitore di ordine zero (Zero Order Hold)



- Per il modello matematico fatto,  $G_{ZOH}(s)$  è tale che se mando in ingresso una  $\delta(t)$ , ottengo in uscita un impulso  $g(t)$  di valore 1 e ampiezza  $T$ :

$$g(t) = 1(t) - 1(t - T), \quad 1(t) \triangleq \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

The diagram shows an impulse  $\delta(t)$  entering the  $G_{ZOH}(s)$  block. The output is a rectangular pulse  $g(t)$  with a height of 1 and a width of  $T$ .

- Essendo  $G_{ZOH}(s)$  proprio la trasformata di Laplace della risposta all'impulso,  $G_{ZOH}(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ , risulta che

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}$$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**