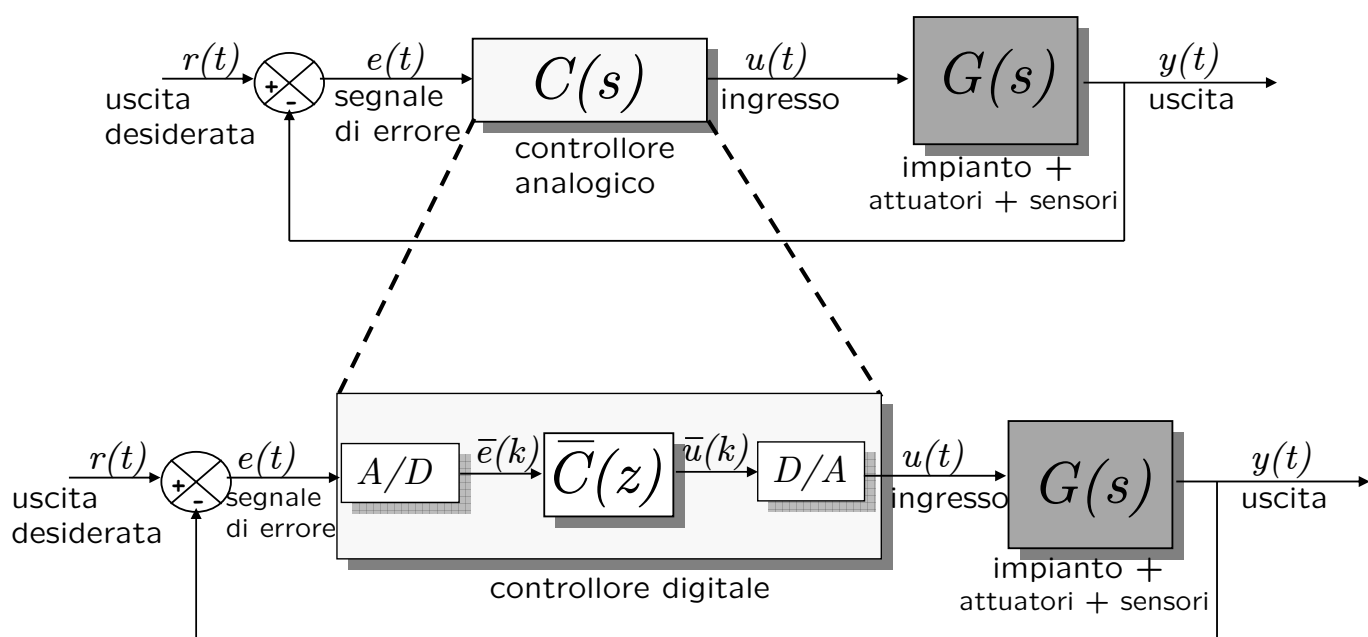


# Realizzazione digitale di controllori analogici

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

## Digitalizzazione di un controllore analogico

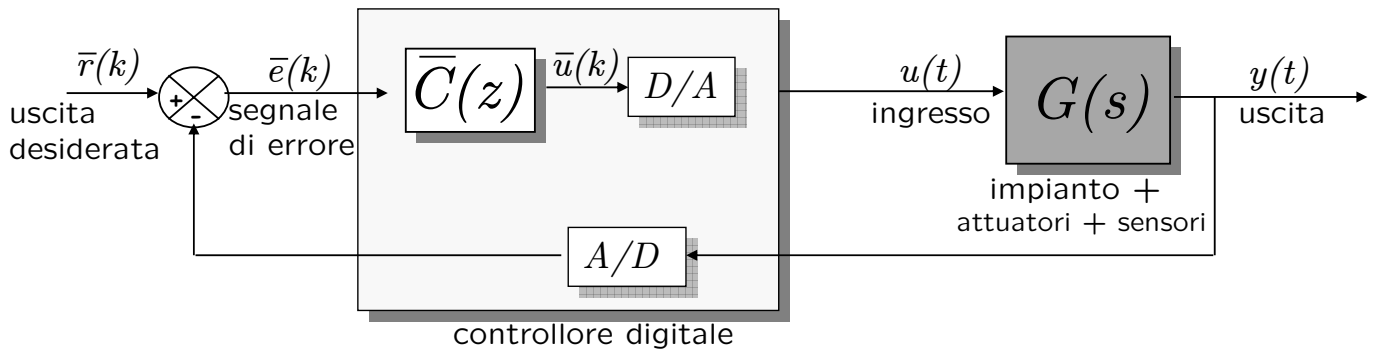
Sistema di controllo



Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

# Digitalizzazione di un controllore analogico

Alternativa:



**Problema:** Supponiamo di aver progettato un controllore analogico  $C(s)$  con metodi di sintesi nel dominio  $s$  per avere certe prestazioni ad anello chiuso. Come dobbiamo sintetizzare  $\bar{C}(z)$  in maniera che le prestazioni ad anello chiuso continuo a rimanere (il più possibile) le medesime ?

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Discretizzazione

- Consideriamo il controllore analogico

$$u(t) = C(s)e(t) = \frac{N(s)}{D(s)}e(t) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}e(t)$$

- Esso non rappresenta altro che una equazione differenziale che lega  $u(t)$  a  $e(t)$ :

$$\frac{d^n}{dt^n}u(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u(t) + \dots + a_0u(t) = b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e(t) + \dots + b_0e(t)$$

- Per *discretizzazione* del controllore  $u(t) = C(s)e(t)$  si intende una sua approssimazione numerica (con integrazione a passo costante)

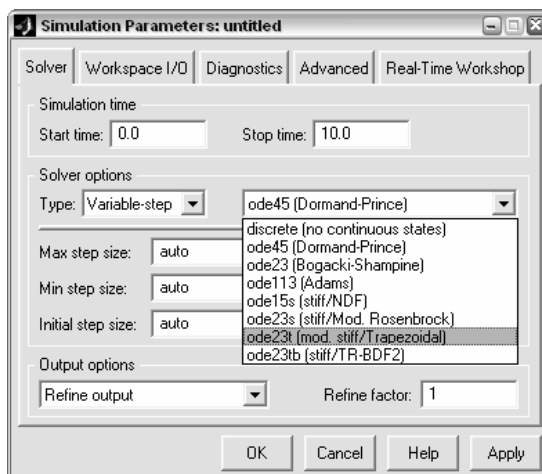
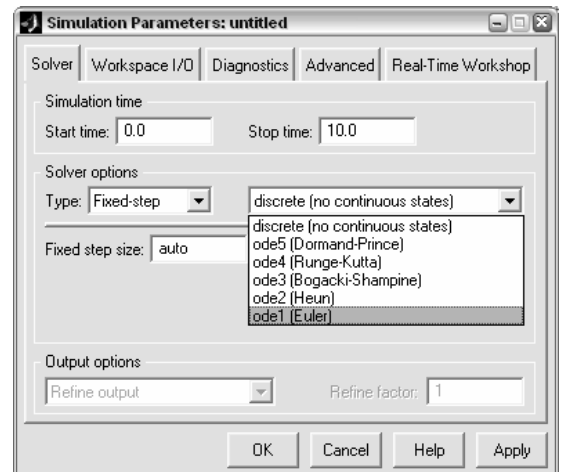
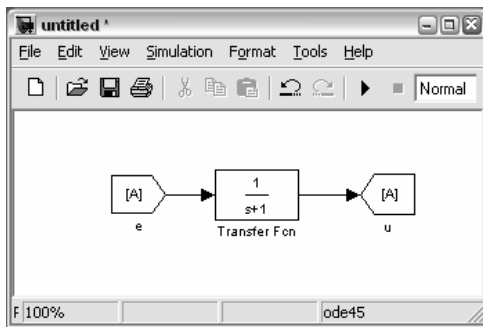
$$\bar{u}(k) = \bar{C}(z)\bar{e}(k)$$

che legghi i campioni di ingresso  $\bar{u}(k) \triangleq u(kT)$  ai campioni  $\bar{e}(k) \triangleq e(kT)$  dell'errore

- Nota: esistono molti modi per integrare un'equazione differenziale per via numerica (a passo costante, a passo variabile, approssimazioni di vario ordine, ...) [vedi metodi di integrazione di Simulink]

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Integrazione numerica (Simulink)



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Discretizzazione: Esempio

- Considera il compensatore

$$u(t) = \frac{1}{s+2}e(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}u(t) + 2u(t) = e(t)$$

- Utilizzo il *metodo di Eulero* (differenze in avanti), approssimando la derivata con il rapporto incrementale:

$$\frac{d}{dt}u(t) \approx \frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T} = \frac{1}{T}(\bar{u}(k+1) - \bar{u}(k))$$

- Ricordando che  $z$  rappresenta l'operatore di anticipo unitario ( $z\bar{u}(k) = \bar{u}(k+1)$ ), ottengo:

$$\bar{u}(k) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T}\right) + 2} \bar{e}(k) \triangleq \bar{C}(z)\bar{e}(k)$$

- Formalmente, è come se avessi ottenuto  $\bar{C}(z)$  sostituendo  $s = \left(\frac{z-1}{T}\right)$  in  $C(s)$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Metodi di discretizzazione

- Consideriamo una realizzazione in spazio di stato di  $C(s)$

$$\begin{cases} \frac{dx_c}{dt} = A_c x_c + B_c e \\ u = C_c x_c + D_c e \end{cases}$$

$$C(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c + D_c$$

- Integrando nell'intervallo  $[kT, (k+1)T]$  (e applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale):

$$x_c((k+1)T) - x_c(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{dx_c(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_{kT}^{(k+1)T} [A_c x_c(\tau) + B_c e(\tau)] d\tau$$

da cui

$$x_c((k+1)T) - x_c(kT) = A_c \int_{kT}^{(k+1)T} x_c(\tau) d\tau + B_c \int_{kT}^{(k+1)T} e(\tau) d\tau$$

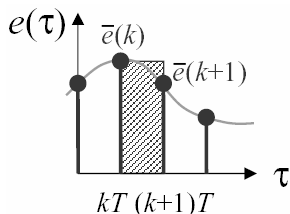
- Purtroppo in generale sia  $x(\tau)$  che  $e(\tau)$  non sono costanti tra un tempo di campionamento e l'altro, quindi occorre approssimare l'integrale. Anche il metodo di campionamento cosiddetto "esatto", nel caso di discretizzazione di controllori, è pertanto un metodo approssimato.

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Metodi di discretizzazione

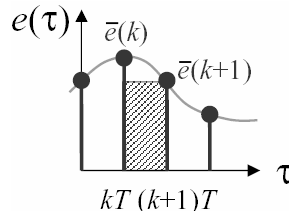
- Possiamo approssimare l'integrale in diversi modi:

Metodo di Eulero in avanti



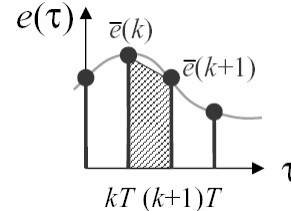
$$\int_{kT}^{(k+1)T} e(\tau) d\tau \approx T e(kT)$$

Metodo di Eulero all'indietro



$$\int_{kT}^{(k+1)T} e(\tau) d\tau \approx T e((k+1)T)$$

Metodo dei trapezi (o di Tustin)



$$\int_{kT}^{(k+1)T} e(\tau) d\tau \approx \frac{T[e((k+1)T) + e(kT)]}{2}$$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

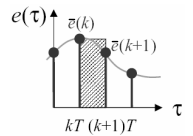
# Metodi di discretizzazione

- Metodo di Eulero in avanti:

$$(z-1)x_c = A_c T x_c + B_c T e$$

$$\left[ \left( \frac{z-1}{T} \right) I - A_c \right] x_c = B_c e$$

$$\bar{C}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = C_c \left[ \left( \frac{z-1}{T} \right) I - A_c \right]^{-1} B_c + D_c = C(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T}}$$

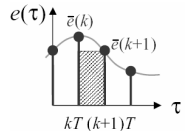


- Metodo di Eulero all'indietro:

$$(z-1)x_c = zA_c T x_c + zB_c T e$$

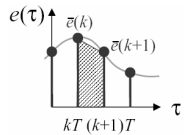
$$\left[ \left( \frac{z-1}{zT} \right) I - A_c \right] x_c = B_c e$$

$$\bar{C}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = C_c \left[ \left( \frac{z-1}{zT} \right) I - A_c \right]^{-1} B_c + D_c = C(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}$$



- Metodo dei trapezi:

$$\bar{C}(z) = C_c \left[ \left( \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right) I - A_c \right]^{-1} B_c + D_c = C(s) \Big|_{s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$$



**Nota:** in ogni metodo, il guadagno in continua è preservato, poiché per  $z=1$  si ha  $s=0$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Metodi di discretizzazione

- In generale, quindi, il controllore discretizzato  $\bar{C}(z)$  lo ottengo sostituendo  $s$  in  $C(s)$  nel seguente modo:

- Metodo di Eulero in avanti:

$$s = \frac{z-1}{T}$$

- Metodo di Eulero all'indietro:

$$s = \frac{z-1}{zT}$$

- Metodo dei trapezi (o di Tustin):

$$s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \quad (\text{trasformazione bilineare})$$

- Confronta con il metodo di discretizzazione "esatta":  $\bar{A}_c = e^{TA_c}$ ,  $\bar{B}_c = \int_0^T e^{tA_c} dt B_c$ ,  $\bar{C}_c = C_c$ ,  $\bar{D}_c = D_c$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Mappatura dei poli

- Qual'è il legame fra i poli  $s = s_i$  di  $C(s)$  e i poli  $z_i$  di  $\bar{C}(z)$  ?

– Differenze in avanti:

$$\frac{z_i - 1}{T} = s_i \quad \Rightarrow \quad z_i = 1 + Ts_i$$

– Differenze all'indietro:

$$\frac{z_i - 1}{Tz_i} = s_i \quad \Rightarrow \quad z_i = \frac{1}{1 - s_i T}$$

– Regola di Tustin (o dei trapezi):

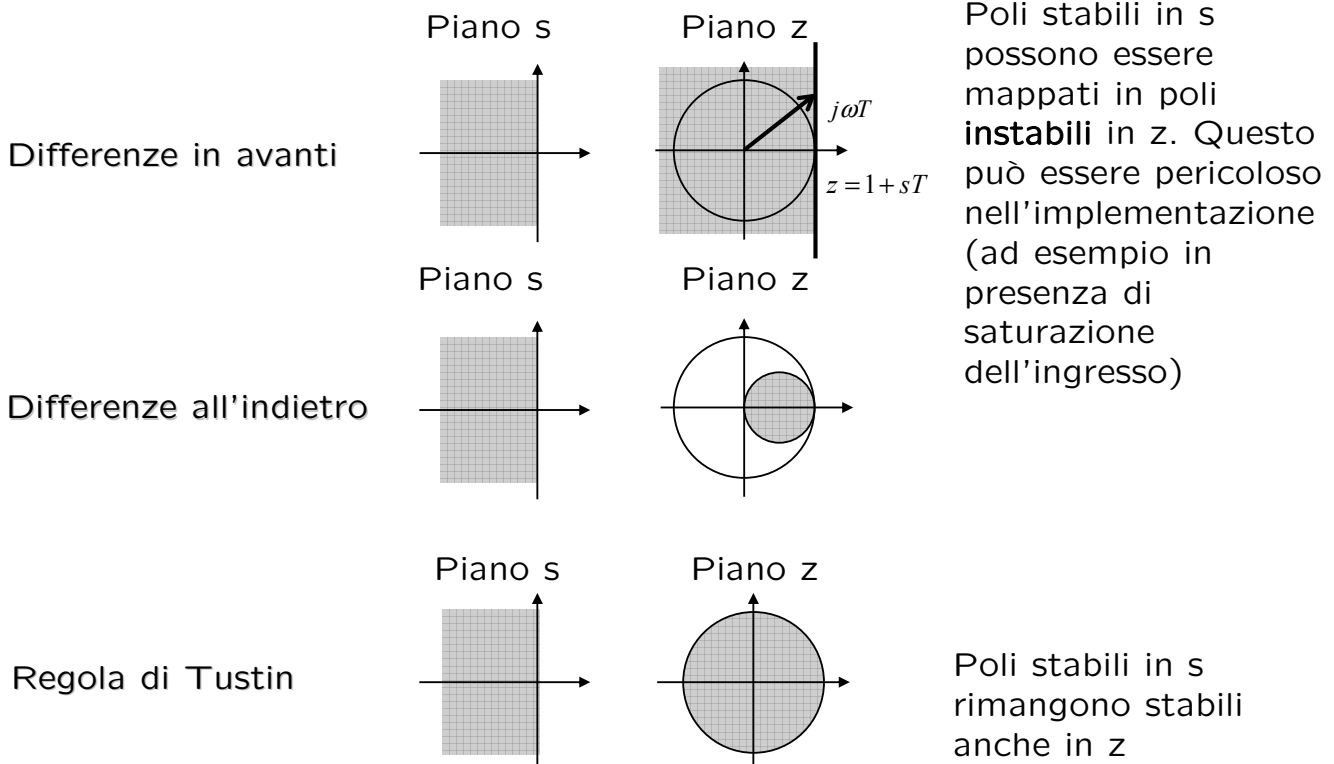
$$\frac{2(z_i - 1)}{T(z_i + 1)} = s_i \quad \Rightarrow \quad z_i = \frac{1 + s_i T/2}{1 - s_i T/2}$$

– Metodo esatto:  $z_i = e^{s_i T}$

- Nota: i primi tre metodi (approssimati) approssimano la funzione  $z = e^{sT}$  con funzioni razionali

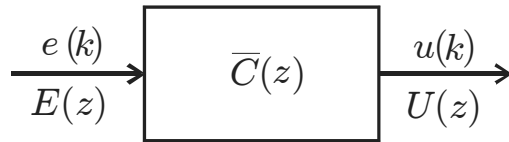
**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Mappatura dei poli



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Risposta in frequenza (tempo discreto)



- Ricorda: la *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo discreto  $\bar{C}(z)$  è il rapporto fra la trasf. zeta  $U(z)$  dell' uscita  $u(k)$  del sistema e la trasf. zeta  $E(z)$  dell' ingresso  $e(k)$  per condizione iniziale nulla  $x_c(0) = 0$ .
- **Definizione:** La *risposta in frequenza* di un sistema  $\bar{C}(z)$  è la funzione complessa di variabile reale  $\bar{C}(e^{j\omega T})$ ,  $\omega \in [0, \frac{\pi}{T}]$  ( $T$ =tempo di campionamento)
- **Teorema:** Consideriamo un ingresso sinusoidale  $e(k) = \bar{E} \sin(k\omega T)$ ,  $\omega \in [0, \frac{\pi}{T}]$ . Se  $\bar{C}(z)$  è asintoticamente stabile (poli in modulo  $< 1$ ), allora in **condizioni di regime permanente** (o **asintoticamente per  $k \rightarrow \infty$** )

$$u(k) \rightarrow u_{rp}(k) \triangleq \bar{E} |\bar{C}(e^{j\omega T})| \sin(\omega k T + \angle \bar{C}(e^{j\omega T}))$$

La risposta in frequenza permette quindi di analizzare la risposta del sistema ad eccitazioni sinusoidali a diverse frequenze.

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Risposta in frequenza: esempio

$$e(k) = \bar{E} \sin(k\omega T) \xrightarrow{\quad} \boxed{\bar{C}(z) = \frac{1.5 - z}{z(z - 0.8)}} u(k) \quad T = 0.1 \text{ s}$$

Calcoliamo la risposta in condizioni di regime permanente per ingresso  $e(k) = 10 \sin \frac{\pi}{6} k$  ( $\omega T = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6T} \approx 5.23 \text{ rad/s}$ )

- Il sistema è asintoticamente stabile, avendo  $\bar{C}(z)$  poli in modulo minore di 1

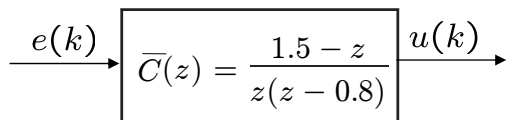
$$\bar{C}(z) = \frac{1.5 - z}{z(z - 0.8)}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 0.8$$

- Possiamo quindi definire la risposta di regime permanente:

$$\begin{aligned} u_{rp}(k) &= 10 |\bar{C}(e^{j\frac{\pi}{6}})| \sin\left(\frac{\pi}{6} k + \angle \bar{C}(e^{j\frac{\pi}{6}})\right) \\ &= 10 \left| \frac{1.5 - e^{j\frac{\pi}{6}}}{e^{j\frac{\pi}{6}}(e^{j\frac{\pi}{6}} - 0.8)} \right| \cdot \\ &\quad \sin\left(\frac{\pi}{6} k + \angle(1.5 - e^{j\frac{\pi}{6}}) - \angle(e^{j\frac{\pi}{6}}(e^{j\frac{\pi}{6}} - 0.8))\right) \\ &\approx 10 \cdot 1.6009 \sin\left(\frac{\pi}{6} k - 0.6678 - 1.9631\right) \\ &= 16.009 \sin\left(\frac{\pi}{6} k - 2.6309\right) \end{aligned}$$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

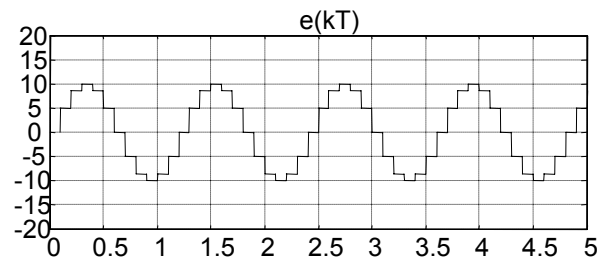
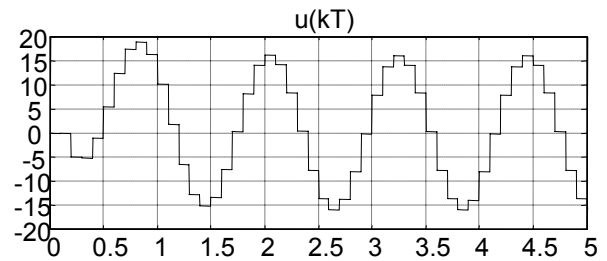
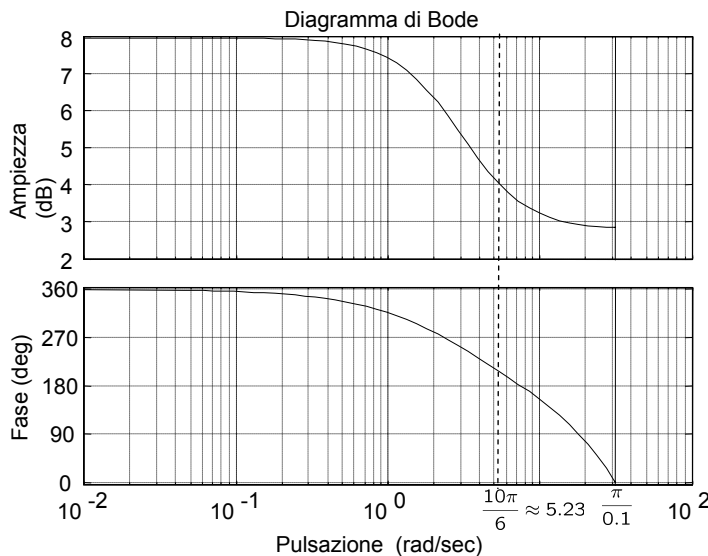
# Risposta in frequenza: esempio



$$e(k) = 10 \sin\left(\frac{10\pi}{6}kT\right)$$

$$u_{rrp}(k) = 16.009 \sin\left(\frac{10\pi}{6}kT - 2.6309\right)$$

$$4.0873_{\text{db}} \approx 1.6009, \quad 150.74 \text{ deg} \approx 2.6309 \text{ rad}$$



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Distorsione (*warping*) in freq. della bilineare

- Esaminiamo la risposta in frequenza della  $C(s)|_{s=j\omega}$  originale e della  $\bar{C}(z)|_{z=e^{j\omega T}}$  trasformata secondo la regola di Tustin per  $\omega \in (-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$ :

$$\begin{aligned} \bar{C}(e^{j\omega T}) &= C\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1}\right) = C\left(\frac{2}{T} \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{e^{j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}}}\right) = C\left(\frac{2}{T} \frac{2j \sin(\frac{\omega T}{2})}{2 \cos(\frac{\omega T}{2})}\right) \\ &= C\left(j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right) \neq C(j\omega) \end{aligned}$$

- La risposta in frequenza viene quindi distorta secondo la trasformazione  $\omega \rightarrow \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$
- Come preservare la risposta in frequenza, almeno ad una certa frequenza prefissata  $\omega^*$  ?
- Nota: per  $\omega \rightarrow \frac{\pi}{T}$  si ha che  $\frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \rightarrow \infty$ , cioè il comportamento ad alta frequenza (nel continuo) viene compresso verso  $\frac{\pi}{T}$  (nel discreto)

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**



# Prewarping

- Predistorsione in frequenza al fine di imporre la coincidenza in modulo e fase

$$\bar{C}(e^{j\omega^*T}) = C(j\omega^*)$$

a una data frequenza  $\omega^*$

- È sufficiente porre

$$\bar{C}(z) = C\left(\frac{\omega^*}{\omega_{pw}^*} \frac{2z-1}{Tz+1}\right)$$

dove  $\omega_{pw}^* \triangleq \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega^*T}{2}\right)$

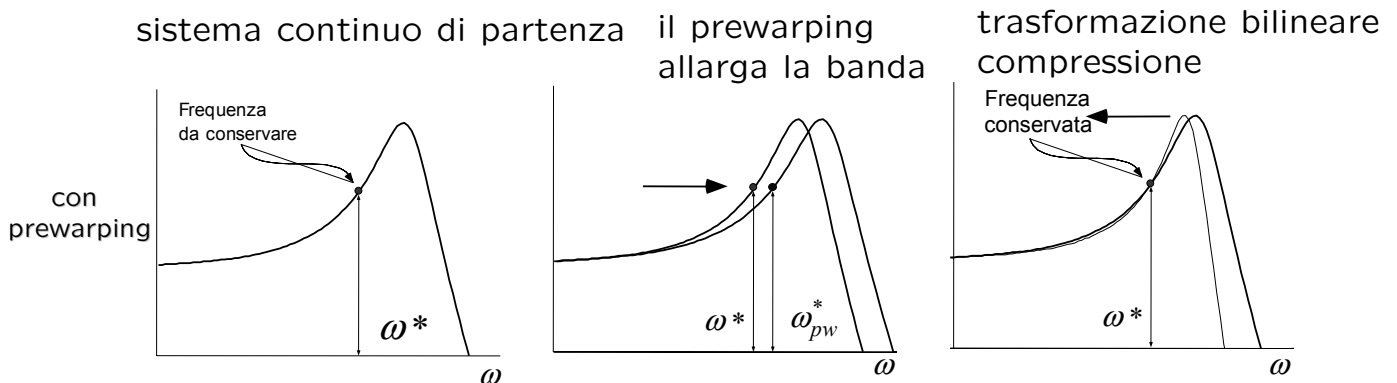
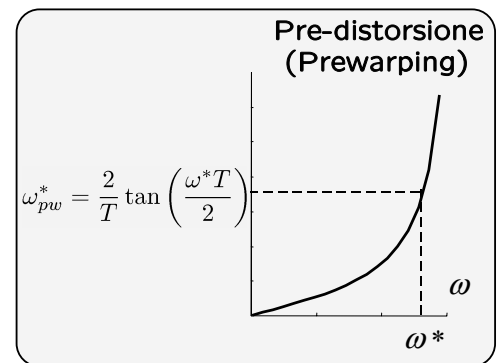
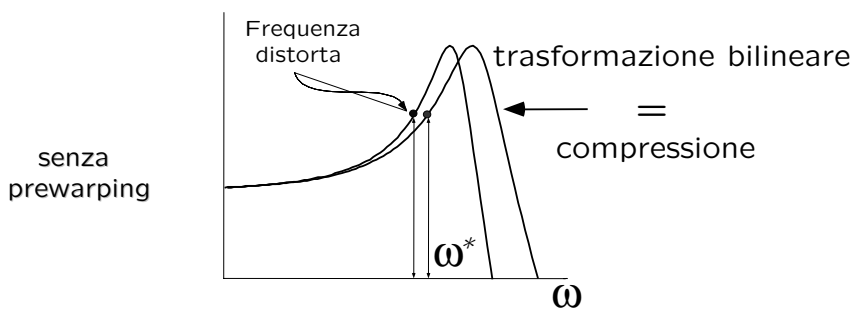
- Infatti:

$$\bar{C}(e^{j\omega^*T}) = C\left(\frac{\omega^*}{\frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega^*T}{2}\right)} j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega^*T}{2}\right)\right) = C(j\omega^*)$$

- Nota: Il metodo esatto preserva invece la risposta al gradino (e in generale ogni risposta in cui l'ingresso è costante durante ciascun intervallo di campionamento)

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Prewarping



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

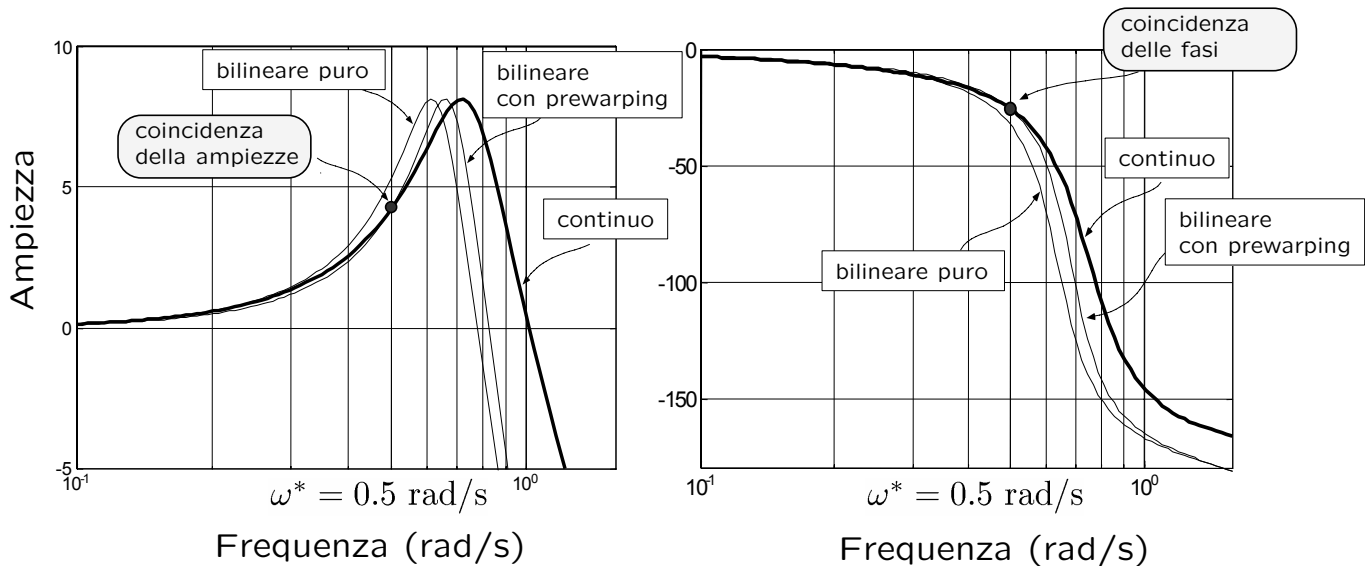
# Esempio: con/senza prewarping

$$C(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\begin{cases} \xi = 0.3 \\ \omega_0 = 0.75 \end{cases}$$

$$\bar{C}_{\text{Tustin}}(z^{-1}) = \frac{0.3194 + 0.6389z^{-1} + 0.3194z^{-2}}{1 - 0.3968z^{-1} + 0.6746z^{-2}}$$

$$\bar{C}_{pw}(z^{-1}) = \frac{0.3578 + 0.7155z^{-1} + 0.3578z^{-2}}{1 - 0.2385z^{-1} + 0.6695z^{-2}}$$



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Metodo approssimato: matching poli-zeri

- Un altro metodo è il cosiddetto matching poli/zeri, in cui l'equivalente discreto  $\bar{C}(z)$  si ottiene da  $C(s) = N(s)/D(s)$  nel seguente modo:
  1. Si fattorizzano  $N(s) = K_N \prod_{i=1}^n (s - \alpha_i)$  e  $D(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i)$
  2. Si pone  $\bar{N}(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{\alpha_i T})$ ,  $\bar{D}(z) = \prod_{i=1}^n (z - e^{s_i T})$
  3. Tutti gli zeri all'infinito di  $C(s)$  meno uno vengono mappati in  $z = -1$  (es:  $C(s) = 1/(s^2 + 1)$  ha due zeri per  $s = \infty$ )
  4. Si aggiusta il guadagno in continua in modo che  $\bar{C}(1) = C(0)$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Esempio di matching poli/zeri

- Funzione di trasferimento continua:

$$C(s) = \frac{a}{s + a}$$

- Il polo in  $s = -a$  viene mappato in  $z = e^{-aT}$ . Non ci sono zeri al finito. C'è solo uno zero all'infinito, quindi non si ha nessun termine  $(z + 1)$  al numeratore

$$\bar{C}(z) = K \frac{a}{z - e^{-aT}}$$

- Si aggiusta il guadagno in continua valutando:

$$\bar{C}(1) = C(0) \Rightarrow K = \frac{1 - e^{-aT}}{a}$$

- Si ottiene quindi:

$$C(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}$$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Discretizzazione: comando Matlab C2D

**C2D** Conversion of continuous-time models to discrete time.

`SYSD = C2D(SYSC,TS,METHOD)` converts the continuous-time LTI model SYSC to a discrete-time model SYSD with sample time TS. The string METHOD selects the discretization method among the following:

- 'zoh' Zero-order hold on the inputs.
- 'foh' Linear interpolation of inputs (triangle appx.)
- 'tustin' Bilinear (Tustin) approximation.
- 'prewarp' Tustin approximation with frequency prewarping. The critical frequency  $W_c$  is specified as fourth input by `C2D(SYSC,TS,'prewarp',Wc)`.
- 'matched' Matched pole-zero method (for SISO systems only).

The default is 'zoh' when METHOD is omitted.

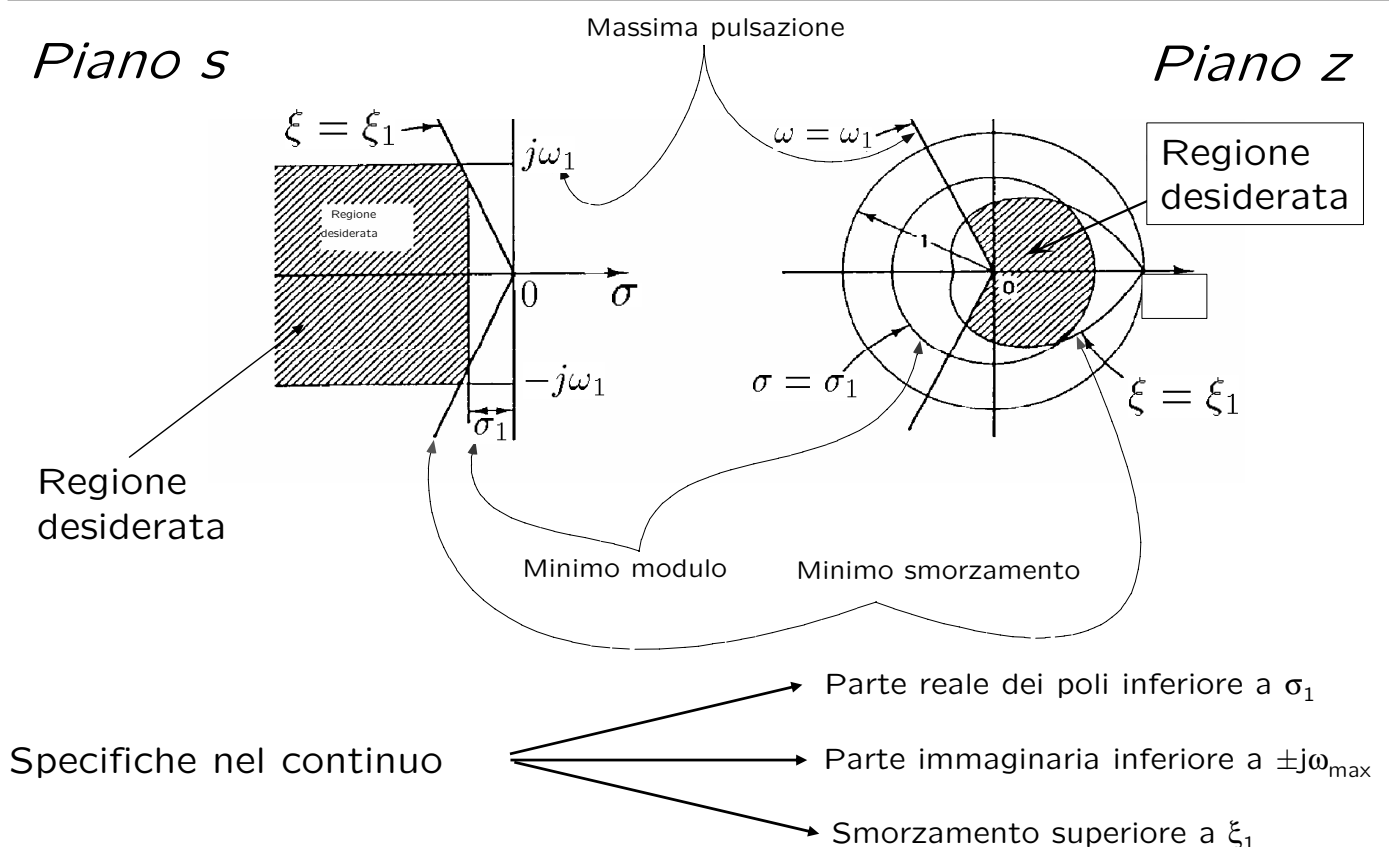
**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Trasferimento delle specifiche di progetto

- Nel progetto di controllori analogici  $C(s)$  spesso si trasformano specifiche nel tempo (tempo di salita, sovraelongazione massima, ecc.) e in frequenza (banda passante, margine di fase, ecc.) in specifiche sui poli ad anello chiuso.
- Come tradurre le specifiche sulla posizione dei poli ad anello chiuso utilizzate per il progetto di controllori analogici  $C(s)$  in specifiche sulla posizione dei poli ad anello chiuso per il sistema digitalizzato ?
- Questa informazione può essere utile ad esempio quando assegniamo i poli ad anello chiuso mediante retroazione dello stato

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Trasferimento delle specifiche di progetto



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

# Corrispondenza tra piano s e piano z

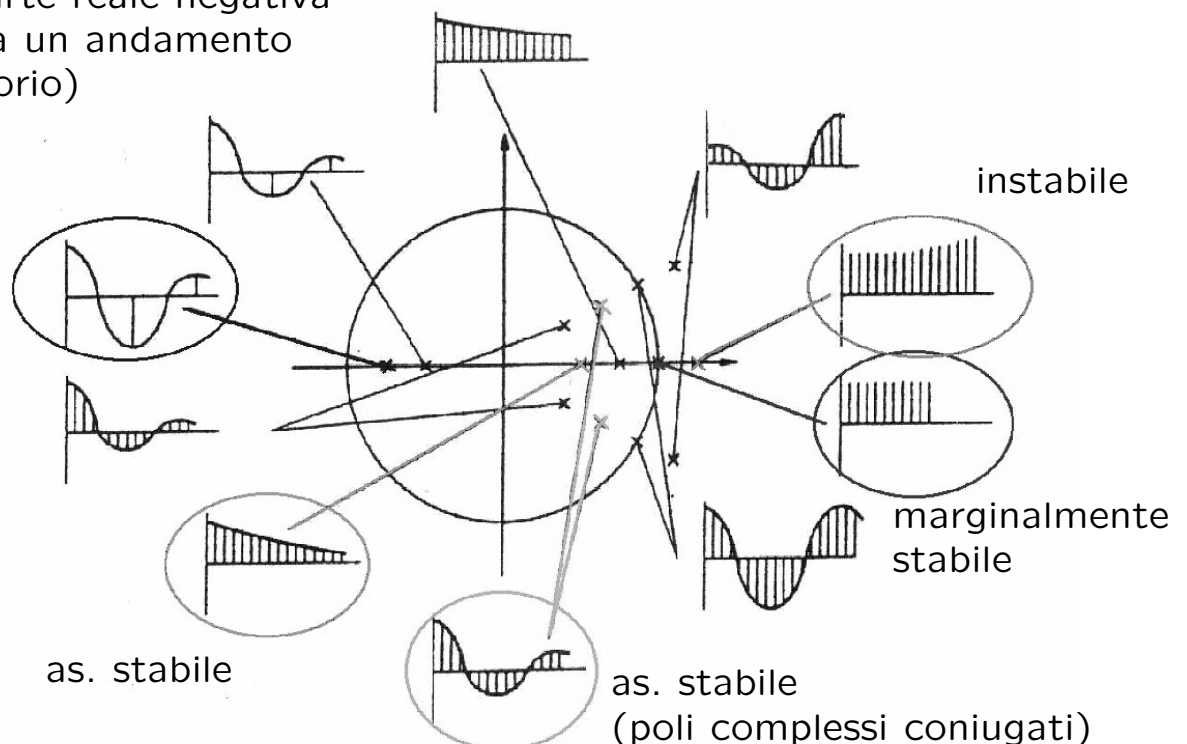
$$z = e^{sT}$$

PIANO s	s	PIANO z	z
I poli reali negativi	$s = -\sigma$	Porzione positiva dell'asse reale compresa tra 0 e 1	$z = e^{-\sigma T}$
Poli reali positivi	$s = \sigma$	Porzione positiva dell'asse maggiore di 1	$z = e^{\sigma T}$
I poli immaginari coniugati con $ \omega  <  \pi/T $	$s = \pm j\omega$	Circonferenza di raggio 1	$\begin{cases}  z  = 1, \angle z = \omega T \\ 0 \leq \omega T \leq \pi \end{cases}$
Poli complessi con $ \omega  =  \pi/T $	$s = \sigma \pm j\frac{\pi}{T}$	Porzione negativa dell'asse reale compresa tra 0 e 1	$z = -e^{\sigma T}$
Poli complessi a smorzamento costante	$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	Spirale logaritmica	$ z  = e^{-\zeta\omega_n T}$ $\angle z = \omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}$

**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**

## Posizione dei poli e risposta nel tempo

as. stabile (un solo polo ma sulla parte reale negativa provoca un andamento oscillatorio)



**Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08**