Compensazione dei ritardi

Il problema del ritardo (*delay*)

- Spesso nella catena di controllo sono presenti ritardi non trascurabili, dovuti ad esempio a fenomeni di trasporto.

- Dal punto di vista del dominio della frequenza, i ritardi temporali portano ad un aumento del ritardo di fase, che rende più difficile la stabilizzazione del sistema mediante le tecniche di controllo classiche (es: PID).

- Con le tecniche di controllo digitale, la compensazione del ritardo risulta molto semplice ed efficace

Sistemi con ritardo – Metodo #1

- Modello con ritardo di τ passi sull'ingresso:
  (Hp: (A,B) compl. ragg.)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-\tau) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

- Si aumenta la dimensione dello stato trasformando il ritardo in τ poli in z=0 (in generale: mτ poli):

$w_j(k) \triangleq u(k-j)$, $j = 1, \ldots, \tau$

$\Rightarrow w_1(k+1) = u(k)$ e $w_j(k+1) = w_{j-1}(k)$, $\forall j = 2, \ldots, \tau$

$$\begin{bmatrix} x \\ w_\tau \\ \vdots \\ w_2 \\ w_1 \end{bmatrix}(k+1) = \begin{bmatrix} A & B & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I_m \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_\tau \\ \vdots \\ w_2 \\ w_1 \end{bmatrix}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} u(k)$$

Sistemi con ritardo – Metodo #1

- Il sistema esteso è compl. raggiungibile:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & B & AB & \ldots & A^{n-1}B \\ 0 & 0 & \ldots & I_m & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & I_m & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ I_m & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

- Si può quindi progettare un regolatore K per Il sistema esteso:

$$\boxed{u(k) = K[x'(k)\ u'(k-\tau)\ \ldots u'(k-1)]' + Hv(k)}$$

$$= K_x x(k) + K_\tau u(k-\tau) + \ldots + K_1 u(k-1) + Hv(k)$$

Sistemi con ritardo – Metodo #2

- Modello con ritardo τ di ingresso:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-\tau) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

- Modello senza ritardo:

$\bar{x}(k) \triangleq x(k+\tau)$

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A\bar{x}(k) + Bu(k) \\ \bar{y}(k) &= C\bar{x}(k) \end{aligned}$$

- Si progetta il regolatore per il sistema senza ritardo: $u(k) = K\bar{x}(k)$
- Si calcola lo stato predetto a τ passi:

$$\boxed{\hat{x}(k+\tau) = A^\tau x(k) + \sum_{j=0}^{\tau-1} A^j B u(k-1-j)}$$

- Il regolatore complessivo diventa: $\boxed{u(k) = K\hat{x}(k+\tau)}$

Sistemi con ritardo – Metodo #2

Il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso è

$$p_{ac}(\lambda) = \det(zI - A - BK)z^\tau$$

- Infatti, il sistema ad anello chiuso può essere riscritto come

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= (A+BK)\bar{x}(k) + Bv(k) \\ \bar{y}(k) &= C\bar{x}(k) \end{aligned}$$

e quindi la funzione di trasferimento da $v(k)$ a $\bar{y}(k)$ è

$$\frac{\bar{Y}(z)}{V(z)} = C(zI - A - BK)^{-1}B$$

- Essendo $\bar{y}(k) = y(k+\tau)$, si ha $\bar{Y}(z) = z^\tau Y(z)$ e quindi

$$Y(z)/V(z) = C(zI - A - BK)^{-1}Bz^{-\tau}$$

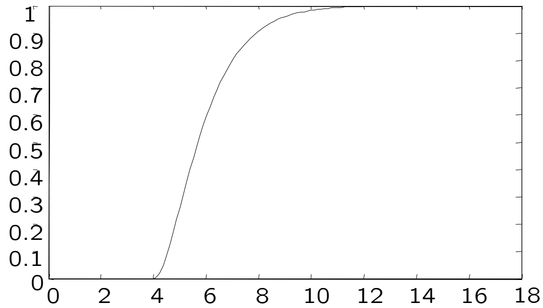
Esempio

- Sistema ad anello aperto: $y(t) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-4s} u(t)$

- Realizzazione: posto $x(t) \triangleq \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-4) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

- Risposta al gradino:

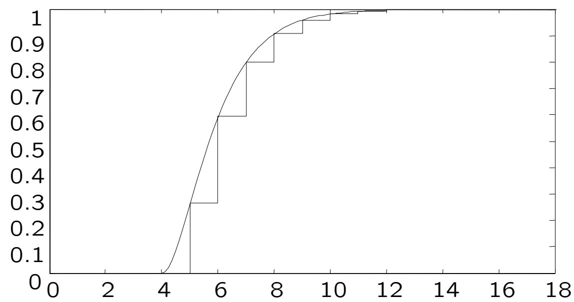


Esempio

- Scelta del tempo di campionamento: $T_s = 1$ s
- Sistema discretizzato

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.7358 & 0.3679 \\ -0.3679 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.2642 \\ 0.3679 \end{bmatrix} u(k-4) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

- Confronto risposte al gradino:



- Sintesi del regolatore:

poli ad anello chiuso: 0.4±j0.4

$$\Longrightarrow K = [-0.3014 \;\; 0.3911]$$

Esempio

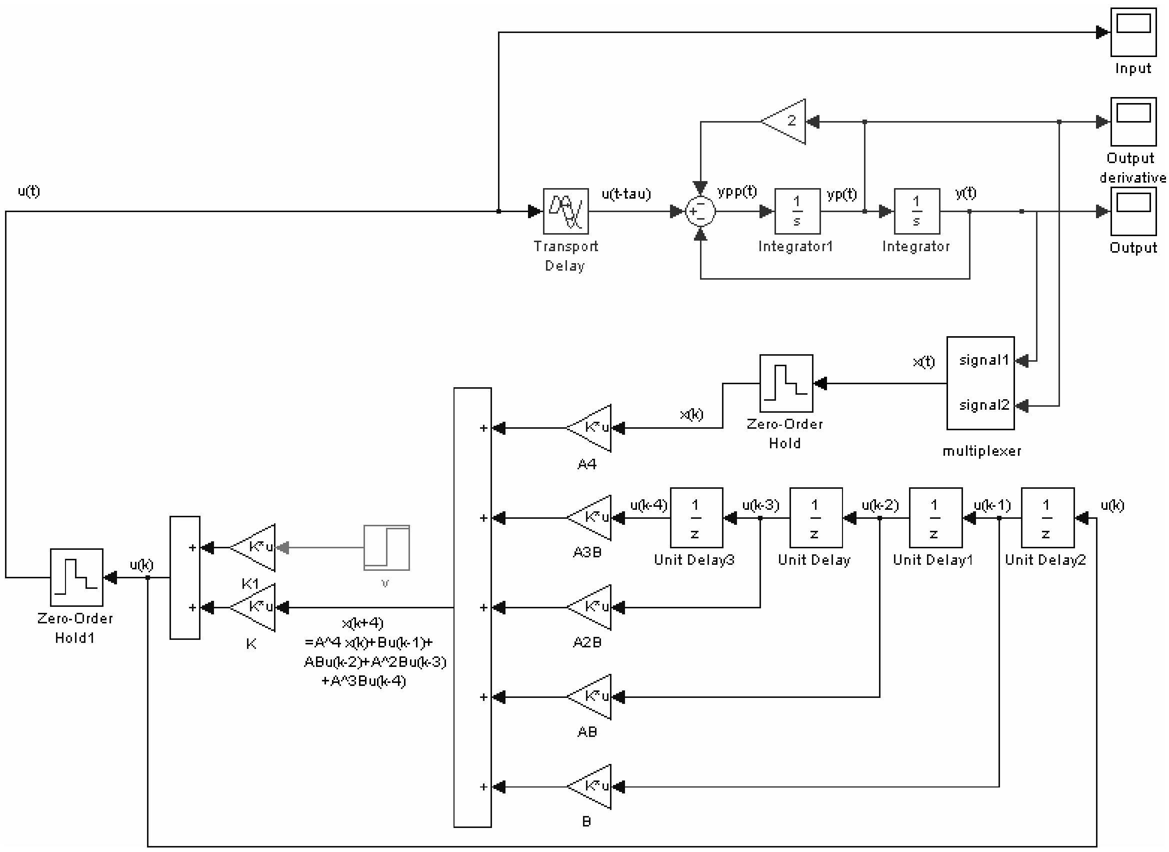
- Legge di controllo: $u(k) = K\bar{x}(k) + Hv(k)$

- Calcolo di H: $$H = \frac{1}{C(I - A - BK)^{-1}B} = 1.3014$$

- Legge di controllo con compensazione del ritardo:

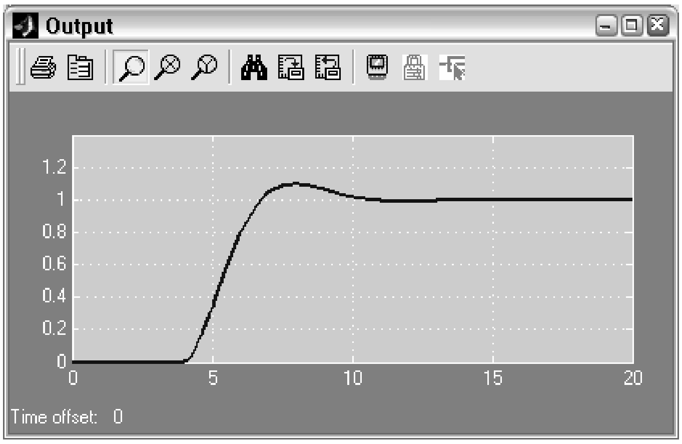
$$\begin{cases} \hat{x}(k+4) = A^4x(k) + A^3Bu(k-4) + A^2Bu(k-3) + \\ \quad + ABu(k-2) + Bu(k-1) \\ u(k) = K\hat{x}(k+4) + Hv(k) \end{cases}$$

Esempio

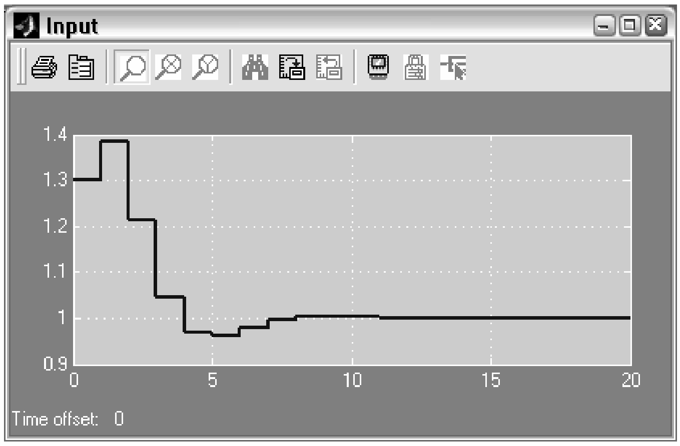


Esempio

Traiettoria di uscita



Traiettoria di ingresso



Osservazioni

- Metodo #1: lo stato esteso ha dimensione n+τ, quindi il calcolo di K può risultare complesso se τ è elevato
- Metodo #2: il guadagno K invece ha n componenti indipendentemente da τ
- Il Metodo #2 è un caso particolare del Metodo #1, essendo:

$$K\hat{x}(k+\tau) = K[A^\tau \; A^{\tau-1}B \; \ldots AB \; B] \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-\tau) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

- Infatti con il Metodo #2 possiamo decidere solo n poli, i rimanenti τ sono per costruzione in z=0:

$$p_{ac}(\lambda) = \det(zI - A - BK)z^\tau$$

Ritardo sull'uscita e stimatore – Metodo#1

- Modello con ritardo di σ passi sull'uscita: (Hp: (A,C) compl. osserv.)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k-\sigma) \end{aligned}$$

- Si aumenta la dimensione dello stato trasformando il ritardo in σ poli in z=0 (in generale: $p\sigma$ poli):

$w_j(k) \triangleq Cx(k-j)$, $j=1,\ldots,\sigma$

$\Rightarrow w_1(k+1) = Cx(k)$ e $w_j(k+1) = w_{j-1}(k)$, $\forall j = 2,\ldots,\sigma$

$$\begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_\sigma \end{bmatrix}(k+1) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ C & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I_p & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_\sigma \end{bmatrix}(k) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & w_1' & w_2' & \ldots & w_\sigma' \end{bmatrix}'(k)$$

- Si effettua la sintesi dell'osservatore L sul sistema esteso (è facile vedere che il sistema esteso è compl. osservabile)

Ritardo sull'uscita e stimatore – Metodo#2

- Modello con ritardo di σ passi sull'uscita:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k-\sigma) \end{aligned}$$

- Modello senza ritardo: $\bar{x}(k) \triangleq x(k-\sigma)$

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= A\bar{x}(k)+Bu(k-\sigma) \\ \bar{y}(k) &= C\bar{x}(k) \end{aligned}$$

- Si progetta l'osservatore per il sistema senza ritardo, che fornisce una stima $\underline{x}(k)$ di $\bar{x}(k) = x(k-\sigma)$:

$$\underline{x}(k+1) = (A-LC)\underline{x}(k) + Bu(k-\sigma) + Ly(k)$$

- Si calcola la stima $\hat{x}(k) = \underline{x}(k+\sigma)$:

$$\hat{x}(k) = A^\sigma \underline{x}(k) + \sum_{j=0}^{\sigma-1} A^j Bu(k-1-j)$$

Sistemi con ritardo – Compensatore

- Modello con ritardo di τ passi sull'ingresso e di σ passi sull'uscita:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-\tau) \\ y(k) &= Cx(k-\sigma) \end{aligned}$$

Metodo #1: occorre aggiungere $m\tau+p\sigma$ stati e progettare un compensatore dinamico per il sistema esteso

Metodo #2:

- Progetto l'osservatore per il sistema senza ritardo di uscita:

$$\hat{x}(k-\sigma+1) = (A-LC)\hat{x}(k-\sigma)+Bu(k-\sigma-\tau)+Ly(k)$$

- Progetto il regolatore per il sistema senza ritardo di ingresso:

$$u(k) = K\hat{x}(k+\tau) + Hv(k)$$

- Compensatore dinamico complessivo:

$$u(k) = K\left(A^{\tau+\sigma}\hat{x}(k-\sigma) + \sum_{j=0}^{\tau+\sigma-1} A^j Bu(k-1-j)\right) + Hv(k)$$

Sistemi con ritardo – Compensatore

Nota: il ritardo complessivo ad anello chiuso da $v(k)$ a $y(k)$ è $\tau+\sigma$. Infatti, essendo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k-\tau) \\ y(k) &= Cx(k-\sigma) \end{aligned}$$

l'effetto dell'ingresso viene recepito sull'uscita non prima di $\tau+\sigma$ passi

Nota: in tutti gli schemi visti, nel caso in cui il riferimento $v(k)$ sia noto con un certo anticipo, è possibile compensare il ritardo tra uscita e riferimento inviando al compensatore la versione anticipata $v(k+\tau+\sigma)$ del riferimento (azione anticipativa o di *feedforward* o di *preview*)