Controllo deadbeat

Controllo Deadbeat

- Consideriamo il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

- Analizziamo il caso speciale in cui piazziamo tutti i poli del sistema ad anello chiuso in $z = 0$:

$$\det(zI - A - BK) = z^n$$

- Per il teorema di Hamilton-Cayley, $(A + BK)^n = 0$, e quindi la risposta da stato iniziale $x(0)$ si annulla dopo al più n passi:

$$x(n) = (A + BK)^n x(0) = 0$$

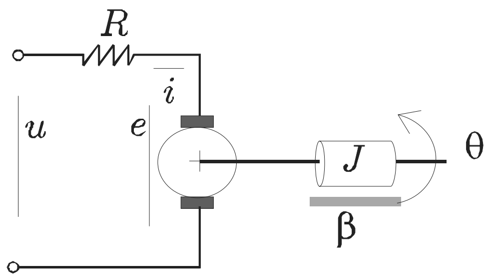
  e permane nell'origine

- Il controllore deadbeat permette di portare nell'origine lo stato del sistema in tempo finito $T = nT_s$, dove T_s=tempo di campionamento, n=ordine del sistema

Controllo Deadbeat

- Nota: a tempo continuo non esiste nessun controllore lineare che permette di portare lo stato a zero in tempo finito, essendo i modi del sistema ad anello chiuso del tipo $e^{\lambda_i t}$.
- Parametro di tuning del controllore deadbeat: tempo di campionamento T_s
  - T_s piccolo: lo stato converge velocemente all'origine, ma l'ingresso è elevato
  - T_s grande: lo stato converge più lentamente, ma l'ingresso è di intensità minore

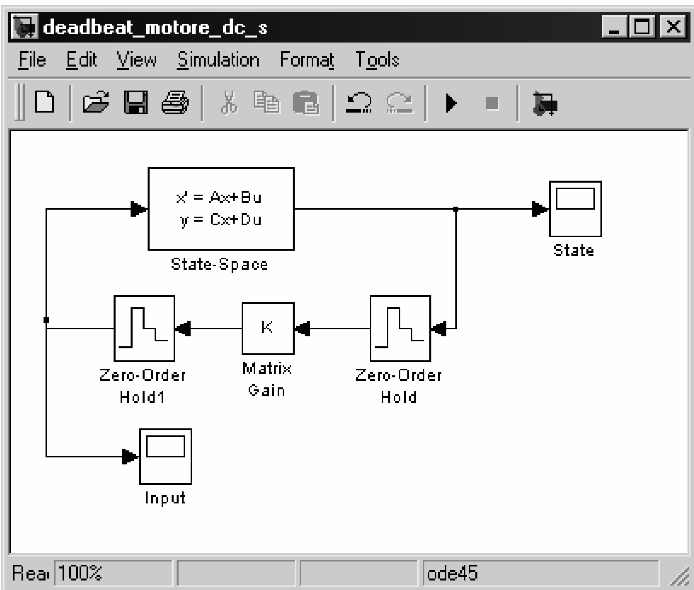
Esempio: Motore DC



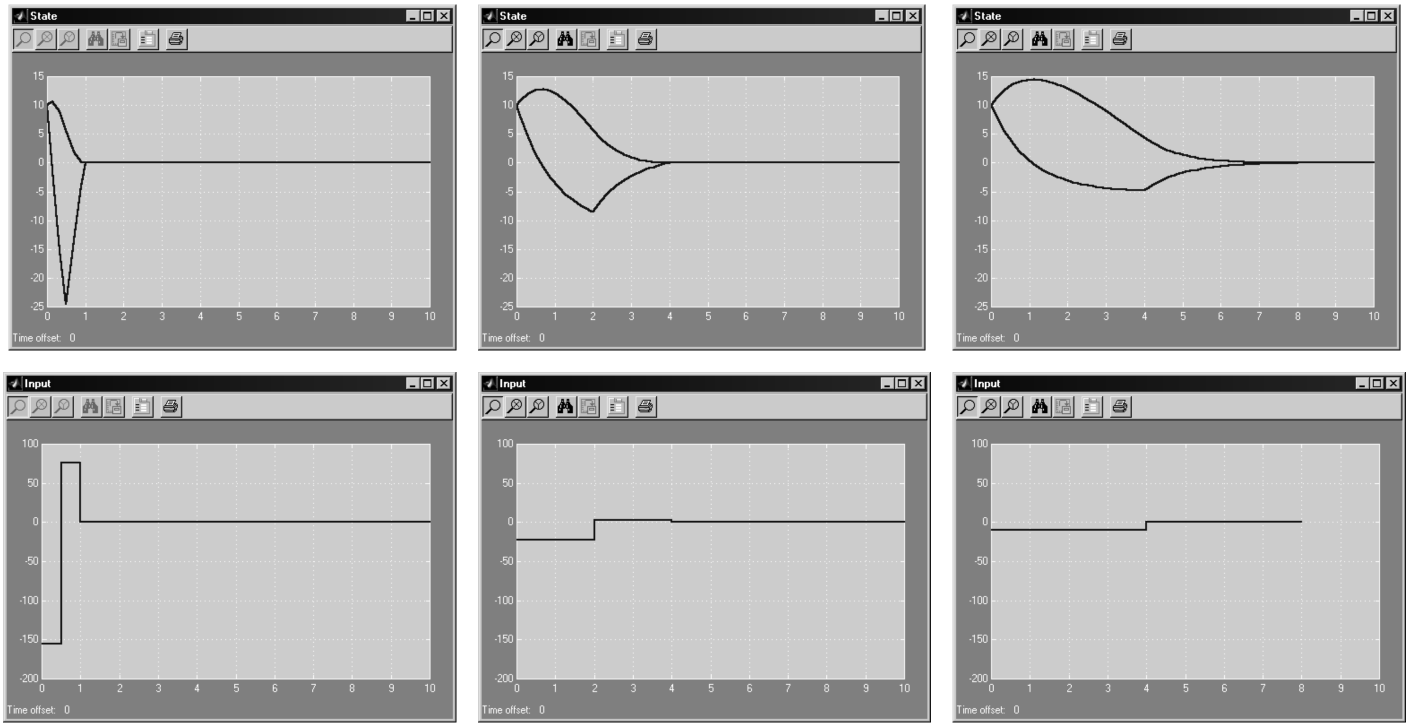

```
J=1;   R=2;
k=1;   beta=0.5;

% Stato: x=[theta,omega]
A=[0 1; 0 -(k^2/R+beta)/J];
B=[0;k/J/R];
C=[1 0];
D=0;

sys=ss(A,B,C,D);

ts=4; % Tempo di campionamento

sysd=c2d(sys,ts);
[Az,Bz,C,D]=ssdata(sysd);

% Controllore
K=-acker(Az,Bz,[0 0]);
```

Modello:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -(\frac{k^2}{R}+\beta)\frac{1}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{JR} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$



Esempio: Motore DC



T_s=0.5 s T_s=2 s T_s=4 s

Osservatore Deadbeat

- Consideriamo ancora il sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

- Piazziamo i poli dell'osservatore in $z = 0$:

$$\det(zI - A + LC) = z^n$$

- Per il teorema di Hamilton-Cayley, $(A - LC)^n = 0$, e quindi l'errore di stima $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ si annulla dopo al più n passi:

$$\tilde{x}(n) = (A - LC)^n \tilde{x}(0) = 0$$

cioè $\hat{x}(k) = x(k)$ per ogni $k \geq n$

- Valgono considerazioni analoghe al controllore deadbeat: minore il tempo di campionamento T_s, più veloce la convergenza ma peggiore l'errore di stima durante i primi $n - 1$ passi.

Compensatore dinamico

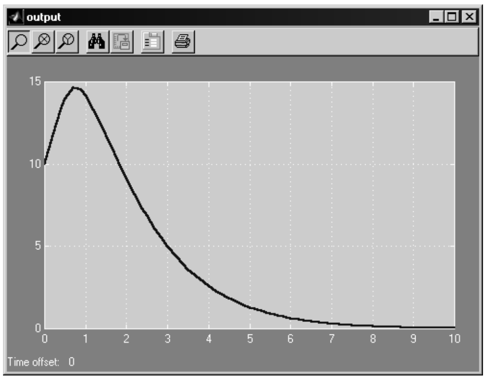
- Riconsideriamo la dinamica complessiva di un sistema con compensatore dinamico

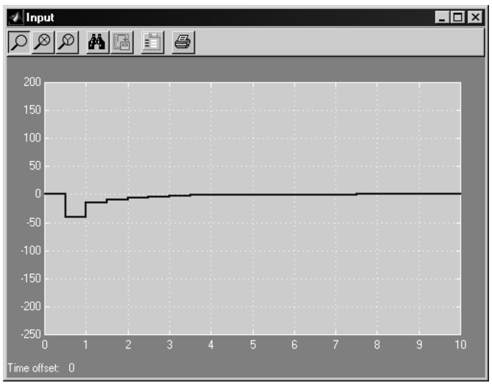
$$
\begin{cases}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \\
u(k) &= K\hat{x}(k) + v(k) \\
y(k) &= Cx(k) + Du(k)
\end{cases}
$$

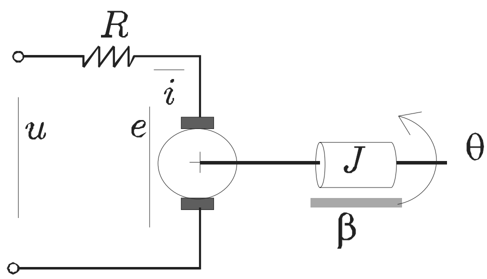
- Si è visto che i poli dell'osservatore non compaiono nella funzione di trasferimento dal riferimento all'uscita.

- Supponiamo che il guadagno di retroazione K sia tale che $(A + BK)$ è nilpotente: il compensatore dinamico sarà deadbeat indipendentemente dal guadagno dell'osservatore L ?

Esempio motore DC con compensatore dinamico







- Poli controllore: $0, 0$

- Poli osservatore: $0.5, 0.7$

L'uscita **non** converge a zero dopo 2 istanti di campionamento !

Compensatore dinamico

- Dinamica complessiva ad anello chiuso (per $D = 0$)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(k) \\ \\ y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$

- L'evoluzione dell'uscita sarà

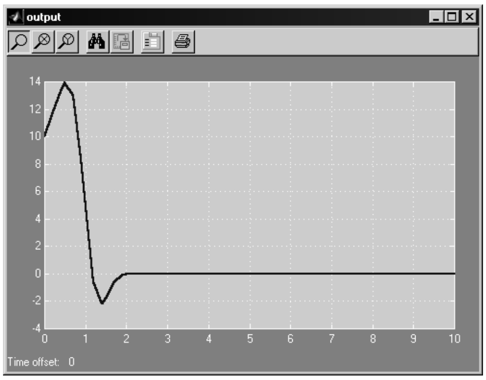
$$\begin{aligned} y(k) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x(0) \\ \tilde{x}(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A+BK)^k & H(k) \\ 0 & (A-LC)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \tilde{x}(0) \end{bmatrix} \\ &= C(A+BK)^k x(0) + CH(k)\tilde{x}(0) \end{aligned}$$

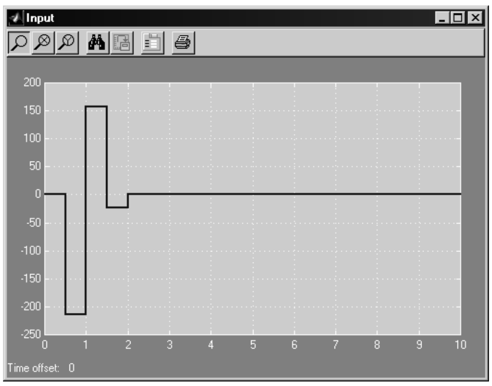
  dove $H(k)$ è una matrice (dipendente da k) in generale non nilpotente

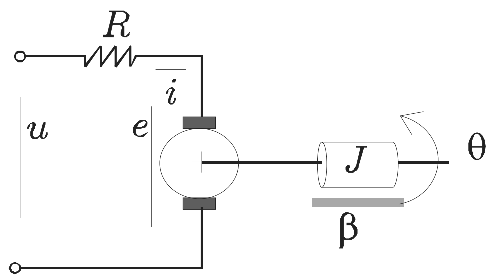
- Pertanto, l'unico modo per avere controllo deadbeat è di porre anche gli autovalori di $A - LC$ a zero

- Nota: lo stato converge a zero dopo al più $2n$ passi !

Compensatore dinamico







- Poli controllore: $0, 0$
- Poli osservatore: $0, 0$

L'uscita converge a zero dopo

4 istanti di campionamento !