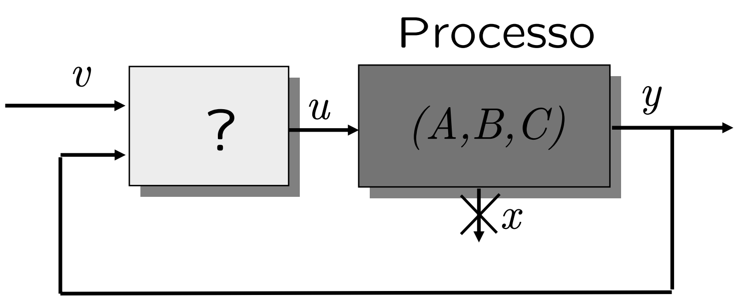
Assegnazione dei poli mediante retroazione dell'uscita

(compensatore dinamico)

Formulazione del problema

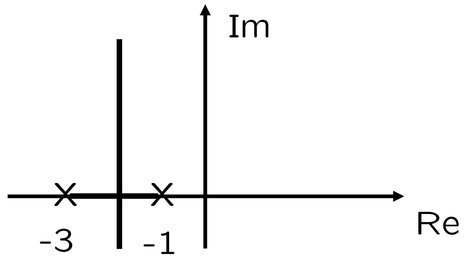
- Retroazione dello stato: permette di assegnare arbitrariamente i poli del sistema ad anello chiuso
- Problema: non sempre tutto il vettore di stato è misurabile !
- È possibile assegnare i poli anche quando soltanto l'uscita y è misurabile ?



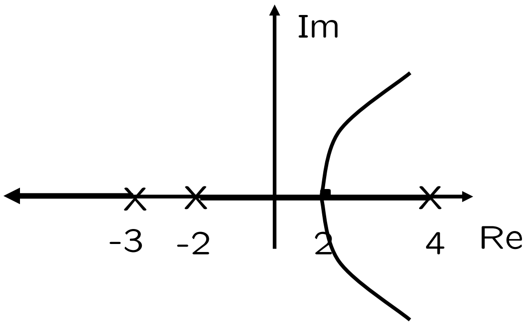
Sistema: $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$ $\qquad y = \dfrac{N(z)}{D(z)}u$

Retroazione statica dell'uscita

Utilizzando una retroazione statica del tipo u=-Ky si hanno forti vincoli sulla assegnazione dei poli !



Luogo delle radici per un sistema con due poli a parte reale negativa



Luogo delle radici per un sistema con due poli a parte reale negativa e un polo a parte reale positiva:

il sistema è instabile ∀K !

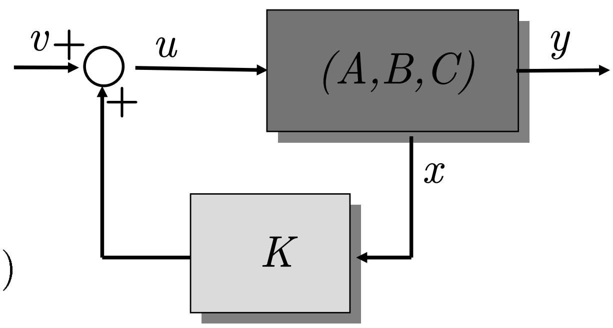
Retroazione dello stato

Ipotesi: sistema compl. raggiungibile

Legge di controllo: u=Kx+v

Sistema ad anello chiuso:

$$\begin{cases} x(k+1) &= (A+BK)x(k)+Bv(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$



Si è visto che, scegliendo opportunamente K, i poli ad anello chiuso possono essere piazzati arbitrariamente (a condizione che i complessi abbiano i loro coniugati)

$$y = C(zI - A - BK)^{-1}Bv = \frac{N_K(z)}{D_K(z)}v$$

dove

$$N_K(z) = C\,\mathrm{Adj}(zI - A - BK)B, \quad D_K(z) \triangleq \det(zI - A - BK)$$

Retroazione dello stato

Infatti, se (A, B) è in forma canonica di raggiungibilità

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e $K = [k_n \cdots k_1]$, si ottiene

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_n + k_n & -a_{n-1} + k_{n-1} & \dots & -a_1 + k_1 \end{bmatrix}$$

e quindi, scegliendo opportunamente K, posso piazzare i poli ad anello chiuso dove desidero.

In MATLAB: comando `PLACE` o `ACKER`:

```
K=-PLACE(A,B,P)        K=-ACKER(A,B,P)
```

dove `P`= vettore dei poli ad anello chiuso $[p_1, p_2 \cdots p_n]$

Retroazione dello stato

FATTO. La retroazione dello stato non modifica gli zeri del sistema: $N_K(z) = N(z)$

Verifichiamo che gli zeri non vengono modificati dalla retroazione dello stato (caso $x \in \mathbb{R}^3$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad K = [\, k_3 \quad k_2 \quad k_1 \,]$$

Si ottiene:

$$\text{Adj}(zI - A)B = \begin{bmatrix} z^2 + a_1 z + a_2 & z + a_1 & 1 \\ -a_3 & z(z + a_1) & z \\ -a_3 z & -a_2 z - a_3 & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{bmatrix}$$

non dipende dai coefficienti a_1, a_2, a_3 !!!

Pertanto, poiché $A + BK$ rimane in forma compagna, si ha:

$$\text{Adj}(zI - A)B = \text{Adj}(zI - A - BK)B$$
$$\Rightarrow N(z) = C\,\text{Adj}(zI - A)B = C\,\text{Adj}(zI - A - BK)B = N_K(z)$$

per ogni K.

Problemi della retroazione dello stato

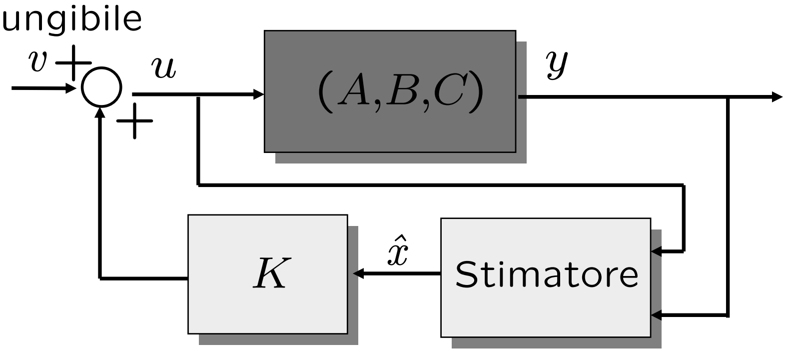
- Misurare tutto lo stato può essere costoso (molti sensori)
- Misurare tutto lo stato può essere impossibile (es: alte temperature, pressioni, ambienti inaccessibili)

IDEA: è possibile usare un ricostruttore dello stato e retroazionare la stima $\hat{x}(k)$ anziché lo stato $x(k)$?

Stimatore dello stato

Ipotesi: sistema compl. raggiungibile e compl. osservabile

$$\boxed{u(k) = K\hat{x}(k) + v(k)}$$



- Stimatore dello stato:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k))$$

- Dinamica dell'errore $\tilde{x} = x - \hat{x}$:

$$\tilde{x}(k+1) = Ax(k) + \cancel{Bu(k)} - A\hat{x}(k) - \cancel{Bu(k)} + L(Cx(k) - C\hat{x}(k)) = (A-LC)\tilde{x}(k)$$

$$\boxed{\tilde{x}(k) = (A-LC)^k\tilde{x}(0)}$$

N.B.: non dipende da $u(k)$, e quindi da K !

Sistema complessivo ad anello chiuso

Dinamica del sistema complessivo:

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ \widehat{x}(k+1) &= A\widehat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\widehat{x}(k)) \\ u(k) &= K\widehat{x}(k) + v(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

Effettuiamo un cambio di coordinate:

$$\begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \widehat{x}(k) \end{bmatrix}$$

La dinamica ad anello chiuso è descritta equivalentemente come

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(k) \\ \\ y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Sistema complessivo ad anello chiuso

Funzione di trasferimento da v a y:

$$G(z) \triangleq \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} zI - A - BK & BK \\ 0 & zI - A + LC \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - A - BK)^{-1} & \star \\ 0 & (zI - A + LC)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= C(zI - A - BK)^{-1}B = \frac{N(z)}{D_K(z)}$$

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO AD ANELLO CHIUSO
È RIMASTA IDENTICA AL CASO STATE-FEEDBACK !!!

Pertanto, il comportamento ingresso uscita del sistema ad anello chiuso non dipende dal guadagno L dell'osservatore

Principio di separazione

PRINCIPIO DI SEPARAZIONE:

> Poiché solo K influisce sul comportamento I/O dell'anello chiuso, e solo L influisce sull'evoluzione dell'errore di stima, posso progettare K e L indipendentemente l'uno dall'altro.

Attenzione: $G(z) = C(zI - A - BK)^{-1}B$ rappresenta solo il comportamento ingresso/uscita del sistema (condizioni iniziali nulle e/o transitorio esaurito) !

Poli del sistema ad anello chiuso:

$$\det(zI - \left[\begin{smallmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{smallmatrix}\right]) = \det(zI - A - BK)\det(zI - A + LC) = D_K(z)D_L(z)$$

Si ha quindi una cancellazione dei poli dell'osservatore:

$$G(z) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}(zI - \left[\begin{smallmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{smallmatrix}\right])^{-1}\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{N(z)\cancel{D_L(z)}}{D_K(z)\cancel{D_L(z)}}$$

I poli del sistema complessivo sono rappresentati dall'unione dei poli dati dal regolatore K più quelli dati dallo stimatore L.

Scelta dello stimatore

La scelta di L sembra ininfluente.
Guardiamo però all' effetto delle condizioni iniziali $\left[\begin{smallmatrix} x(0) \\ \tilde{x}(0) \end{smallmatrix}\right]$ per $v(k) \equiv 0$:

$$\begin{aligned}
y(0) &= Cx(0) \\
y(1) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\left[\begin{smallmatrix} A-BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} x(0) \\ \tilde{x}(0) \end{smallmatrix}\right] \\
&= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\left[\begin{smallmatrix} (A+BK)x(0)-BK\tilde{x}(0) \\ (A-LC)\tilde{x}(0) \end{smallmatrix}\right] = C(A+BK)x(0) - CBK\tilde{x}(0) \\
y(2) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}\left[\begin{smallmatrix} A-BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} x(1) \\ \tilde{x}(1) \end{smallmatrix}\right] \\
&= C(A+BK)x(1) - CBK\tilde{x}(1) \\
&= C(A+BK)^2x(0) - C(A+BK)BK\tilde{x}(0) - CBK(A-LC)\tilde{x}(0)
\end{aligned}$$

La scelta di L influisce durante il transitorio !

Scelta dello stimatore

Intuitivamente: $u = K\hat{x}(t) + v$, dove $\hat{x}(t)$ dipende da L. Se $\hat{x}$ è una cattiva stima, anche il controllo ne deve risentire.

Regola pratica: scegliere i poli dell'osservatore $\simeq$ 10 volte più veloci di quelli del controllore

(oppure: usare uno stimatore ottimo = filtro di Kalman – Vedi corso di Identificazione e Analisi dei Dati).

La scelta di L è quindi molto importante, soprattutto nei confronti di rumori additivi sull'ingresso e sull'uscita (vedi più avanti ...)

Cancellazioni

Osservazione: abbiamo cancellazioni poli/zeri $\Rightarrow$ il sistema ha modi incontrollabili e/o inosservabili.

Intuitivamente:

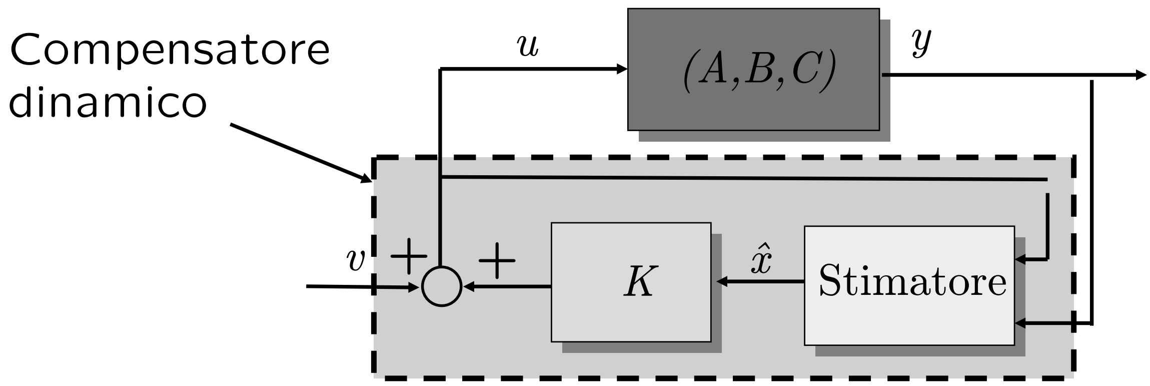
- $\tilde{x}$ non dipende da $u \Rightarrow \tilde{x}$ incontrollabile
- y dipende da $\tilde{x}$ nel transitorio $\Rightarrow \tilde{x}$ osservabile

La matrice R del sistema è

$$\begin{aligned} R &= \left[\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} A-BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \cdots \middle| \begin{bmatrix} A-BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}^{2n-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} B & (A+BK)B & \cdots & (A+BK)^{2n-1}B \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che ha rango $n < 2n$ (nell'ipotesi in cui (A, B) sia compl. raggiungibile).

Compensatore Dinamico



Equazioni del compensatore dinamico:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = (A+BK-LC)\hat{x}(k) + Bv(k) + Ly(k) \\ u(k) = K\hat{x}(k) + v(k) \end{cases}$$

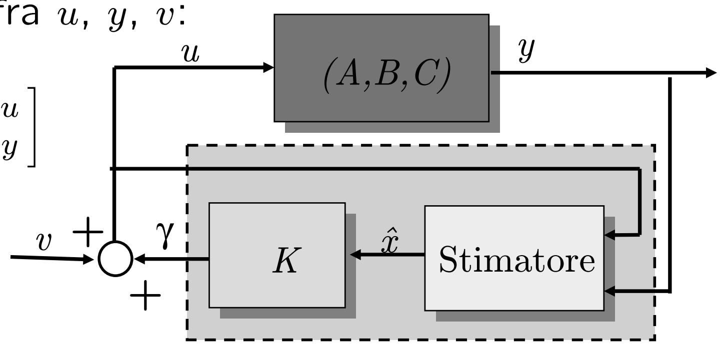
In termini di funzione di trasferimento:

$$u = (K(zI-A-BK+LC)^{-1}B + I)v + K(zI-A-BK+LC)^{-1}Ly$$

Compensatore Dinamico

Caratterizziamo meglio il legame fra u, y, v:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = (A-LC)\hat{x}(k) + \begin{bmatrix} B & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\ \gamma(k) = K\hat{x}(k) \end{cases}$$

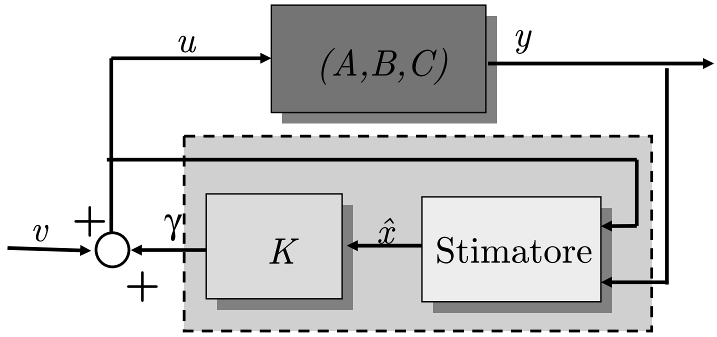


Calcoliamo la funzione di trasferimento da $[u\ y]$ a γ:

$$\begin{aligned} \gamma &= K(zI-A+LC)^{-1} \begin{bmatrix} B & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \\ &= K(zI-A+LC)^{-1}Bu + K(zI-A+LC)^{-1}Ly \\ &= \frac{K Adj(zI-A+LC)B}{D_L(z)}u + \frac{K Adj(zI-A+LC)L}{D_L(z)}y \\ &\triangleq \frac{\tilde{R}(z)}{D_L(z)}u - \frac{S(z)}{D_L(z)}y \end{aligned}$$

Compensatore Dinamico

$$\gamma = \frac{\tilde{R}(z)}{D_L(z)}u - \frac{S(z)}{D_L(z)}y$$



Essendo $u = \gamma + v$, si ottiene:

$$\frac{\overbrace{D_L(z) - \tilde{R}(z)}^{R(z)}}{D_L(z)}u = v - \frac{S(z)}{D_L(z)}y$$

e quindi la legge di controllo in forma polinomiale

$$\boxed{R(z)u = D_L(z)v - S(z)y}$$

Compensatore Dinamico

Si è visto che la funzione di trasferimento da v a y è $G(z) = \frac{N(z)D_L(z)}{D_K(z)D_L(z)}$.
D'altra parte risulta anche che:

$$\begin{cases} R(z)u &= -S(z)y + D_L(z)v \\ N(z)u &= D(z)y \end{cases}$$

e quindi

$$R(z)N(z)u = -S(z)N(z)y + D_L(z)N(z)v = R(z)D(z)y$$

da cui

$$y = \frac{D_L(z)N(z)}{R(z)D(z) + S(z)N(z)}v = \frac{N(z)D_L(z)}{D_K(z)D_L(z)}v$$

Pertanto:

$$\boxed{R(z)D(z) + S(z)N(z) = D_K(z)D_L(z)}$$

Assegnati i poli ad anello chiuso $D_K(z)$ e i poli dell'osservatore $D_L(z)$, posso ricavare direttamente il compensatore $R(z)$, $S(z)$ risolvendo una equazione polinomiale (equazione diofantina).

Equazioni Diofantine

EQUAZIONI DIOFANTINE

Diofanto d'Alessandria (200-284 d.C.)

$$N(z)R(z) + D(z)S(z) = D_K(z)D_L(z)$$

- $D_K(z)D_L(z)$ deve contenere il MCD(z) (massimo comune divisore) di $N(z)$ e $D(z)$

- Se $R_0(z)$, $S_0(z)$ è una soluzione, allora

$$\begin{cases} R(z) &= R_0(z) + \beta(z)P(z) \\ S(z) &= S_0(z) - \alpha(z)P(z) \end{cases}$$

  è ancora soluzione per ogni $P(z)$, dove

$$\begin{cases} N(z) &= \alpha(z) \cdot \text{MCD}(z) \\ D(z) &= \beta(z) \cdot \text{MCD}(z) \end{cases}$$

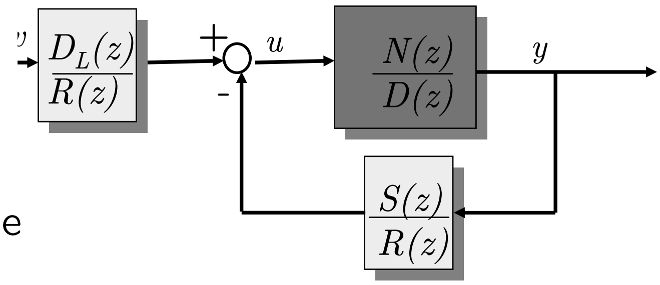
- Se $N(z)$, $D(z)$ sono coprimi, allora esiste ed è unica la soluzione con $\partial S(z) < \partial D(z)$ (oppure $\partial R(z) < \partial N(z)$), dove ∂ indica il grado del polinomio.

Implementazione

Legge di controllo: $R(z)u = -S(z)y + D_L(z)v$

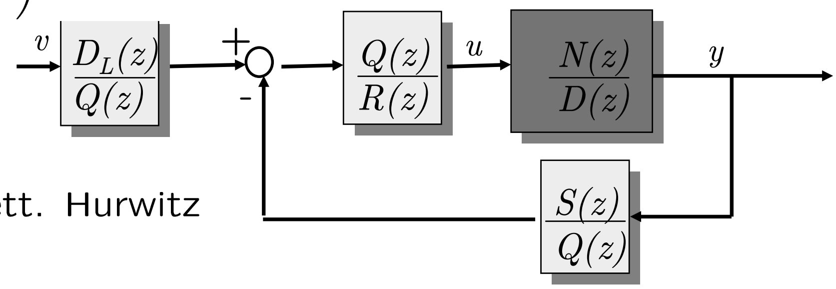
- Caso #1: $R(z)$ ha radici nel cerchio unitario

$$u = -\frac{S}{R}y + \frac{D_L}{R}v$$



- Caso #2: $R(z)$ ha qualche radice instabile

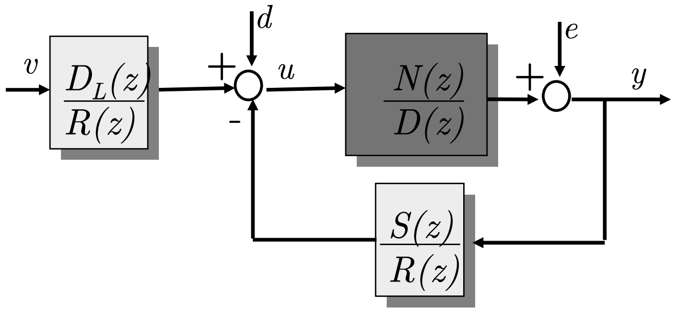
$$u = \frac{Q}{R}\left(-\frac{S}{Q}y + \frac{D_L}{Q}v\right)$$



dove $Q(z)$ è un polinomio strett. Hurwitz (es: $Q(z) = z^n$)

Stimatore dello stato e disturbi

- $d(k)$ = disturbi di ingresso (es: attuatori)
- $e(k)$ = disturbi di misura (es: sensori)



$$y = e + \frac{N}{D}\left(d + \frac{D_L}{R}v - \frac{S}{R}y\right)$$

Si ha:

$$\left(1 + \frac{NS}{DR}\right)y = e + \frac{N}{D}d + \frac{ND_L}{DR}v$$

e quindi

$$y = \frac{DR}{D_L D_K}e + \frac{RN}{D_L D_K}d + \frac{N}{D_K}v$$

$D_L(z)$ influenza la dinamica nei confronti dei disturbi !

Esempio MATLAB

MOTORE DC

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + \beta s^2 + \alpha s}$$

```
K=1;
beta=.3;
alpha=1;

G=tf(K,[1 beta alpha 0]);

ts=0.5;

Gd=c2d(G,ts);
sysd=ss(Gd);
[A,B,C,D]=ssdata(sysd);

% Controllore
policontinuo=[-1, -0.5+0.6*j, -0.5-0.6*j];
polidiscreto=exp(ts*policontinuo);
K=-place(A,B,polidiscreto);

% Osservatore
policontinuo=[-10, -9, -8];
polidiscreto=exp(ts*policontinuo);
L=place(A',C',polidiscreto)';
```

```
%u=K*xhat+v
bigA=[A,B*K;L*C,A+B*K-L*C];
bigB=[B;B];
bigC=[C,zeros(1,3)];
bigD=0;

T=20;

clsys=ss(bigA,bigB,bigC,bigD,ts);
x0=[1 1 1]';
xhat0=[0 0 0]';
initial(clsys, [x0;xhat0],T);
pause

t=(0:ts:T)';
v=ones(size(t));
lsim(clsys,v);
```

Esempio MATLAB