Osservatore

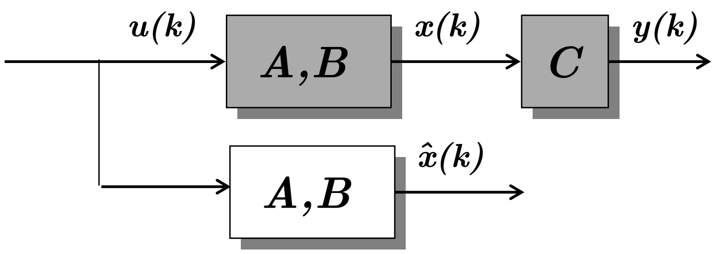
(stimatore asintotico dello stato)

Stimatore asintotico dello stato

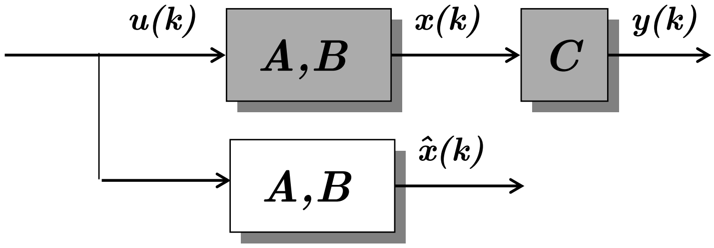
Problema: progettare un dispositivo che permetta di ricostruire una stima $\hat{x}(k)$ dello stato $x(k)$ del sistema quando questo non è direttamente misurabile

Soluzione #1:

Affianchiamo al sistema (reale) che genera i dati una copia (artificiale) comandata dagli stessi ingressi. In pratica, aggiungiamo un "simulatore" $\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k)$ che riproduca il comportamento del sistema reale.



Stimatore asintotico dello stato



- Modello:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ \widehat{x}(k+1) &= A\widehat{x}(k) + Bu(k) \end{aligned}$$

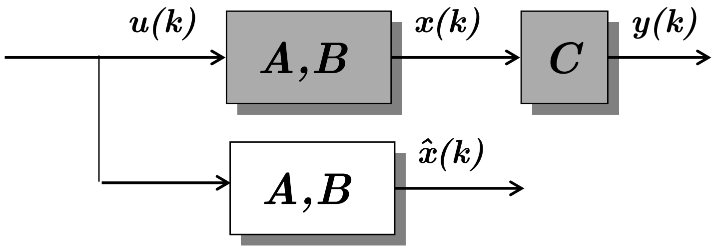
- Errore di stima: $\tilde{x}(k) \triangleq x(k) - \widehat{x}(k)$

- Dinamica dell'errore di stima:

$$\tilde{x}(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - A\widehat{x}(k) - Bu(k) = A\tilde{x}(k)$$

  e quindi $\tilde{x}(k) = A^k(x(0) - \widehat{x}(0))$

Stimatore asintotico dello stato



Il fatto che la dinamica sia $\tilde{x}(k) = A^k(x(0) - \widehat{x}(0))$ può comportare dei problemi:

- La dinamica dell'errore di stima non è modificabile, è dettata direttamente da A

- L'errore di stima si annulla asintoticamente se e solo se A è asintoticamente stabile !

- Nello stimare lo stato $\widehat{x}(k)$ non si sta sfruttando minimamente la conoscenza dell'uscita misurata $y(k)$!!!

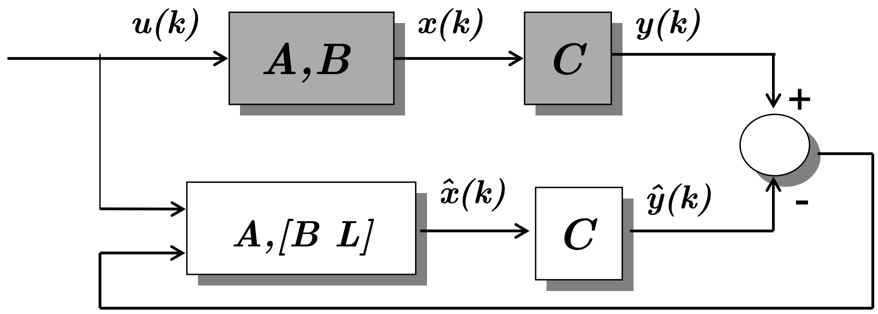
Stimatore asintotico dello stato

Soluzione #2:

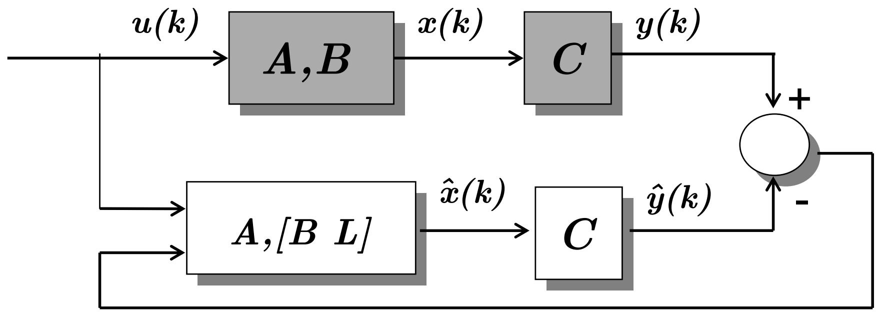
Aggiungiamo nell'equazione dello stimatore un termine che dipende dall'errore di stima

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k))$$

dove $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ è il guadagno dello stimatore.



Stimatore asintotico dello stato



La dinamica dell'errore di stima è

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) - A\hat{x}(k) - Bu(k) - L[y(k) - C\hat{x}(k)] \\ &= (A - LC)\tilde{x}(k)\end{aligned}$$

e quindi $\tilde{x}(k) = (A - LC)^k (x(0) - \hat{x}(0))$

> TEOREMA
>
> Se (A, C) è osservabile gli autovalori di $(A - LC)$ possono essere decisi arbitrariamente

Dimostrazione:

- Se (A, C) è osservabile, il sistema duale (A', C', B', D') è completamente raggiungibile
- Posso pertanto progettare un compensatore K per il sistema duale tale che $(A' + C'K)$ ha i poli nelle locazioni desiderate
- Essendo gli autovalori di una matrice uguali a quelli della matrice trasposta, anche $(A + K'C)$ ha i poli nelle locazioni desiderate
- Ponendo $L = -K'$, il teorema è dimostrato $\square$

A tempo continuo vale un risultato del tutto analogo definendo lo stimatore come

$$\frac{d\widehat{x}(t)}{dt} = A\widehat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\widehat{x}(t))$$

In MATLAB: `L=place(A',C',P)';`

Esempio di sintesi dell'osservatore:

Si consideri il sistema in forma di spazio di stato (tempo continuo)

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

e si vogliano piazzare i poli dell'osservatore in $-4, -4$. È facile verificare che il sistema è completamente osservabile. Posto il guadagno $L = \left[\begin{smallmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{smallmatrix}\right]$, si ha

$$A - LC = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2}\ell_1 \\ 1 & -1 - \frac{1}{2}\ell_2 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico ad anello chiuso risulta pertanto

$$\det(\lambda I - A + LC) = \lambda^2 + (2 + \frac{1}{2}\ell_2)\lambda + \frac{1}{2}\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1 + 1$$

che eguagliato al polinomio desiderato $(\lambda+4)^2 = \lambda^2 + 8\lambda + 16$ fornisce $\ell_1 = 18$, $\ell_2 = 12$. L'osservatore risultante è quindi il seguente:

$$\frac{d\widehat{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & -9 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \widehat{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix} y(t)$$

Stimatore asintotico dello stato

Esempio MATLAB:

```
» sys=tf([1 0],[1 2 1]);
```

$$G(s) = \frac{s}{s^2+2s+1}$$

```
» sysd=c2d(sys,.1);
```

$$G(z) = 0.09048\frac{z-1}{z^2-1.81z+0.8187}$$

```
» [A,B,C,D]=ssdata(ss(sysd));
```

$$A = \begin{bmatrix} 1.8097 & -0.8187 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.1810 & -0.1810 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

```
» L=place(A',C',[.5 .7])';
```

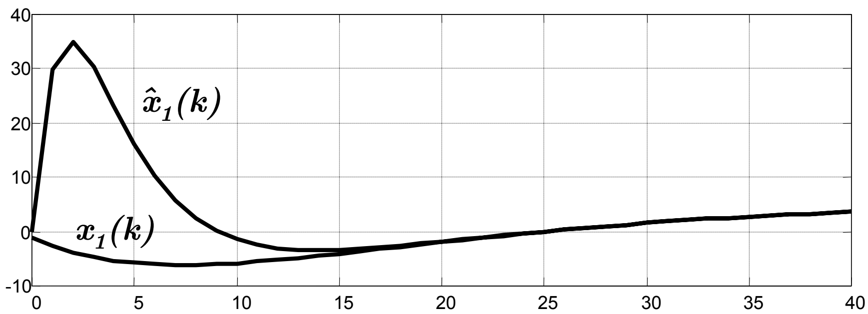
$$L = \begin{bmatrix} -82.6341 \\ -86.0031 \end{bmatrix}$$

```
» eig(A-L*C)

ans =
    0.7000
    0.5000
```


Stimatore asintotico dello stato

Segue esempio MATLAB:



Condizione iniziale: $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

```
x=[-1;1];
xhat=[0;0];

XX=x;
XXhat=xhat;
T=40;

UU=.1*ones(1,T);

for k=0:T-1,
   u=UU(k+1);
   y=C*x+D*u;
   yhat=C*xhat+D*u;

   x=A*x+B*u;
   xhat=A*xhat+B*u+L*(y-yhat);

   XX=[XX,x];
   XXhat=[XXhat,xhat];
end

subplot(211)
plot(0:T,[XX(1,:);XXhat(1,:)]);
grid
title('x_1')
```