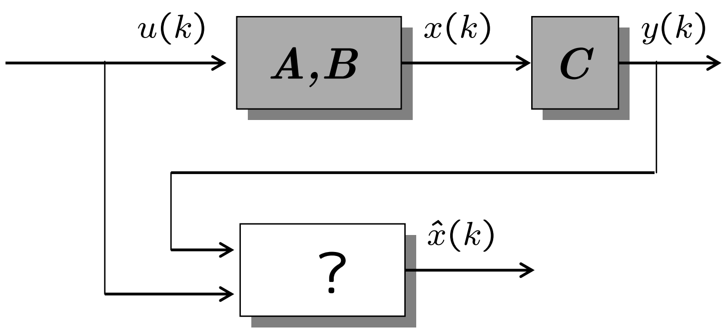
Osservabilità e stima dello stato

Motivazione



- Osservazione: per implementare il controllo con retroazione dello stato $u = Kx$ si ha bisogno di tutto il vettore di stato x
- Problema: Spesso solo l'uscita y è disponibile dai sensori
- IDEA: è possibile ricostruire lo stato x del sistema a partire dalle misure di uscita y e degli ingressi u ?
- La OSSERVABILITÀ affronta questo tipo di problema, dicendoci *quando* e *come* il problema può essere risolto

Osservabilità

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)+Du(k) \end{cases}, \quad x(0)=x_0 \qquad (x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^m, y\in\mathbb{R}^p)$$

Soluzione: $y(k;x_0,u(\cdot)) = CA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^j Bu(k-1-j) + Du(k)$

Definizione

Gli stati x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ si dicono *indistinguibili* dall'uscita se per ogni sequenza di ingresso $u(\cdot)$ si verifica $y(k;x_1,u(\cdot)) = y(k;x_2,u(\cdot))$ per ogni k.

Definizione

Il sistema si dice *(completamente) osservabile* se non esistono coppie di stati indistinguibili dall'uscita.

Osservabilità

Si consideri il problema di ricostruire la condizione iniziale x_0 a partire da n misure dell'uscita, noti gli ingressi applicati.

$$\begin{cases} y(0) = Cx_0 + Du(0) \\ y(1) = CAx_0 + CBu(0) + Du(1) \\ \vdots \\ y(n-1) = CA^{n-1}x_0 + \sum_{j=1}^{n-2} CA^j Bu(n-2-j) + Du(n-1) \end{cases}$$

Posto:

$$Y = \begin{bmatrix} y(0)-Du(0) \\ y(1)-CBu(0)-Du(1) \\ \vdots \\ y(n-1) - \sum_{j=1}^{n-2} CA^j Bu(n-2-j) - Du(n-1) \end{bmatrix} \qquad \Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

... si deve risolvere (rispetto a x_0) il sistema:

$$Y = \Theta x_0 \ ,$$

dove la matrice $\Theta \in \mathbb{R}^{np \times n}$ è la matrice di osservabilità del sistema.

In assenza di rumore sulla misura dell'uscita, il sistema ha sempre soluzione. In particolare:

- la soluzione è unica se rank$(\Theta) = n$;
- esistono infinite soluzioni se rank$(\Theta) < n$. In questo caso, tutte le soluzioni sono date da $x_0 + ker(\Theta)$, essendo x_0 una soluzione particolare del sistema.

Una volta nota la condizione iniziale, e noti gli ingressi, si può prevedere l'evoluzione dello stato in tutti gli istanti futuri.

OSSERVAZIONE: Nel caso di sistemi lineari, l'osservabilità non dipende dall'ingresso:

- Affinché il sistema $\Theta x_0 = Y$ abbia soluzione, occorre che

  rank$(\Theta) =$ rank$([\Theta\ Y])$ (Teorema di Rouché-Capelli)

- Affinché la soluzione sia *unica* occorre che rank$(\Theta) = n$
- Essendo $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se rank$(\Theta) = n$ allora rank$([\Theta\ Y]) = n$ qualsiasi sia Y
- Poiché l'ingresso $u(k)$ perturba soltanto il termine noto Y, la risolubilità del sistema $\Theta x_0 = Y$ non dipende da $u(k)$

Possiamo pertanto studiare l'osservabilità del sistema per $u(k) \equiv 0$

TEOREMA

Il sistema è osservabile se e solo se rank(Θ) $= n$.

Dimostrazione. (necessità) Se il sistema è osservabile, si supponga per assurdo che rank(Θ)$<n$. Dunque esiste $x\neq 0$ tale che $\Theta x = 0$, e quindi $Cx = 0$, $CAx = 0$, ..., $CA^{n-1}x = 0$. Per il teorema di Hamilton-Cayley segue che $CA^k x = 0$ per ogni k. Ma allora x è indistinguibile dall'origine $\Rightarrow$ contraddizione.

(sufficienza) Se rank(Θ) $= n$, si supponga per assurdo che esistano $x_1 \neq x_2$ indistinguibili dall'uscita, e quindi tali che $CA^k x_1 = CA^k x_2$ per ogni k. Posto $x = x_1 - x_2$, segue che $Cx = 0$, $CAx = 0$, ..., $CA^{n-1}x = 0$, ossia $\Theta x = 0$, con $x \neq 0 \Rightarrow$ contraddizione.

Osservazioni

- La proprietà di osservabilità di un sistema dipende solo dalle sue matrici A e C. Dunque, per estensione, la coppia (A, C) si dice *osservabile* se
$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n.$$

- In generale, si dimostra che $ker(\Theta)$ è l'*insieme degli stati indistinguibili dall'origine*, cioè l'insieme degli stati $x\in\mathbb{R}^n$ tali che, per ogni sequenza di ingresso $u(\cdot)$, $y(k; x, u(\cdot)) = y(k; 0, u(\cdot))$ per ogni k.

- Dato che $ker(\Theta) = \{0\}$ se e solo se rank(Θ) $= n$, risulta che il sistema è osservabile se e solo se non esistono stati indistinguibili dall'origine.

Decomposizione canonica di osservabilità

Obiettivo: effettuare un cambio di coordinate nello spazio di stato in modo da separare gli stati osservabili da quelli non osservabili

- Sia dim(ker(Θ)) $= n - n_o \geq 1$ e considera la matrice di cambiamento di base

$$T = \begin{bmatrix} w_1 & \ldots & w_{n_o} & v_{n_o+1} & \ldots & v_n \end{bmatrix},$$

dove $\left\{v_{n_o+1}, \ldots, v_n\right\}$ è una base di ker(Θ), e $\{w_1, \ldots, w_{n_o}\}$ è un suo completamento per ottenere una base di $\mathbb{R}^n$.

- Osserva che ker(Θ) è A-invariante (cioè $Ax \in$ ker(Θ) $\forall x \in \Theta$, segue dal teorema di Hamilton-Cayley), e quindi Av_i non ha componenti su w_1, ..., w_{n_o}, $\forall i$

- Osserva anche che $Cv_i = 0$, essendo $\Theta v_i = 0$, $\forall i$

- Quindi il sistema nelle nuove coordinate ha le matrici $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$ e $\tilde{C} = CT$ nella forma:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix}$$

Decomposizione canonica di osservabilità

La coppia (A_o, C_o) è *completamente osservabile*
(con $A_o \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ e $C_o \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$)

- Infatti, considera la matrice di osservabilità

$$\tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_o & 0 \\ C_oA_o & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_oA_o^{n-1} & 0 \end{bmatrix} \text{ ed anche } \tilde{\Theta} = \begin{bmatrix} CT \\ CTT^{-1}AT \\ \vdots \\ CTT^{-1}\ldots A^{n-1}T \end{bmatrix} = \Theta T$$

- Poiché T è non singolare, $\dim\ker(\tilde{\Theta}) = \dim\ker(\Theta) = n - n_o$, e quindi

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C_o \\ C_oA_o \\ \vdots \\ C_oA_o^{n_o-1} \end{bmatrix} = n_o$$

cioè (A_o, C_o) è una coppia completamente osservabile

Osservabilità e funzione di trasferimento

Gli autovalori della parte non osservabile del sistema non compaiono come poli della sua funzione di trasferimento.

Si consideri infatti una matrice di cambiamento di base T che opera una decomposizione canonica di osservabilità della coppia (A, C). Si ha (per $D = 0$):

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zI - A)^{-1}B = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \\ & \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix} \left(zI - \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI - A_o)^{-1} & 0 \\ \star & (zI - A_{\bar{o}})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} \\ &= C_o(zI - A_o)^{-1}B_o \end{aligned}$$

$G(z)$ non dipende dagli autovalori di $A_{\bar{o}}$!
(si ha quindi una cancellazione poli/zeri)

Ricostruibilità

- Sotto l'ipotesi di osservabilità, si è visto che è possibile risolvere univocamente il problema di ricostruire la condizione iniziale x_0 a partire da n misure dell'uscita, noti gli ingressi applicati: $x(0) = \Theta^{-1}Y$.

- Nell'anello di controllo è però richiesta la conoscenza dello stato all'istante corrente, $x(k)$, non tanto la condizione iniziale $x(0)$.

- In linea di principio, nota la condizione iniziale $x(0)$ è possibile calcolare l'evoluzione dello stato in ogni istante

$$x(k) = A^k\Theta^{-1}Y + \sum_{i=0}^{k-1} A^iBu(k-1-i)$$

- Problema: è possibile ricostruire univocamente lo stato attuale $x(k)$ del sistema anche se il sistema non è completamente osservabile ?

Ricostruibilità

Definizione

> Il sistema si dice *ricostruibile in k passi* se, per ogni condizione iniziale x_0, $x(k)$ è univocamente determinabile noti $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ nell'intervallo $[0, k-1]$.

La totalità delle soluzioni del sistema:

$$Y_k \triangleq \begin{bmatrix} y(0) - Du(0) \\ y(1) - CBu(0) - Du(1) \\ \vdots \\ y(k-1) - \sum_{j=1}^{k-2} CA^j Bu(k-2-j) + Du(k-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}}_{\Theta_k} x$$

è data da $x = x_0 + \ker(\Theta_k)$, dove x_0 è la vera condizione iniziale.

Ricostruibilità

- Posto x_0 lo stato iniziale "vero" (non noto), sia $x = x_0 + \bar{x}$ un generico possibile stato iniziale, dove $\bar{x} \in \ker(\Theta_k)$. Allora la stima dello stato corrente $x(k)$ risulta:

$$\hat{x}(k) = A^k x_0 + A^k \bar{x} + \sum_{j=1}^{k-1} A^j Bu(k-1-j)\ .$$

- $\hat{x}(k)$ coincide allora con $x(k)$ se e solo se $\bar{x} \in ker(A^k)$. Dovendo questo valere per ogni $\bar{x} \in \ker(\Theta_k)$, si conclude che:

  Il sistema è *ricostruibile in k passi* se e solo se

$$\boxed{\ker(\Theta_k) \subseteq \ker(A^k)\ .}$$

- Dato che $\ker(A^k) = \ker(A^n)$ per ogni $k > n$, un sistema determinabile in n passi è determinabile in k passi per ogni $k > n$

- D'altra parte, se un sistema è determinabile in k passi con $k < n$, allora è determinabile in n passi.

Ricostruibilità

Definizione

Un sistema ricostruibile in n passi si dice *(completamente) ricostruibile*

Operando una decomposizione di canonica di osservabilità, si dimostra che

un sistema è ricostruibile se e solo se tutti gli autovalori della sua parte non osservabile sono nulli.

Ricostruibilità

- Infatti, sia ancora $x = x_0 + \bar{x}$, dove x_0 è la condizione iniziale vera (non nota), $\bar{x} \in \ker(\Theta)$ (x rappresenta una generica condizione iniziale possibile, cioè tale che $\Theta x = Y$)

- Operando una decomposizione canonica di osservabilità $\tilde{A} = TAT^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{smallmatrix}\right]$ segue che $\bar{z} = T^{-1}\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_{\bar{o}} \end{bmatrix}$, avendo $\bar{x}$ soltanto componenti lungo $v_{n_o+1}, \ldots, v_n$.

- Si ha:

$$A^k\bar{x} = T \begin{bmatrix} A_o^k & 0 \\ \star & A_{\bar{o}}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z_{\bar{o}} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 \\ A_{\bar{o}}^k z_{\bar{o}} \end{bmatrix}, \quad CA^k\bar{x} = \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix} A^k\bar{x} = 0\,.$$

- $x(k) = A^k x_0 + A^k\bar{x} + \sum_{j=1}^{k-1} A^j Bu(k-1-j)$ è univocamente definito *per ogni* $\bar{x} \in \ker(\Theta)$ se e solo se $A_{\bar{o}}$ è nilpotente

- Nota: nonostante $x(0)$ non sia determinabile univocamente, lo stato $x(k)$ è invece ricostruibile univocamente.

Rivelabilità

Definizione

Un sistema si dice *rivelabile* se la parte non osservabile è asintoticamente stabile.

- È una condizione più debole della ricostruibilità
- Se $A_{\bar{o}}^k \to 0$ per $k \to \infty$, allora $A^k \bar{x} \to 0$ per $k \to \infty$
- Quindi $x(k) = A^k x_0 + A^k \bar{x} + \sum_{j=1}^{k-1} A^j Bu(k-1-j)$ *tende* ad essere univocamente definito per ogni $\bar{x} \in \ker(\Theta)$

Dualità

- Dato il sistema

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$$

si definisce

$$\text{sistema duale} \begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= A'\tilde{x}(k) + C'\tilde{u}(k) \\ \tilde{y}(k) &= B'\tilde{x}(k) + D'\tilde{u}(k) \end{cases} \qquad \tilde{u} \in \mathbb{R}^p, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$$

- La matrice di raggiungibilità del sistema duale è uguale alla trasposta della matrice di osservabilità del sistema originale
- Quindi: il sistema (A, B, C, D) è raggiungibile se e solo se il sistema duale (A', C', B', D') è osservabile, e viceversa.

Appendice: Decomposizione di Gilbert-Kalman

Decomposizione di Gilbert-Kalman

- Siano:
  - $\{v_1, \ldots, v_{n_i}\}$ una base di Im$(R) \cap$ ker(Θ) $(n_i \geq 0)$
  - $\left\{v_1, \ldots, v_{n_i}, z_1, \ldots, z_{n_r - n_i}\right\}$ una base di Im(R) $(n_r \geq n_i)$
  - $\left\{v_1, \ldots, v_{n_i}, w_1, \ldots, w_{n-n_o-n_i}\right\}$ una base di ker(Θ) $(n - n_o \geq n_i)$
  - $\{\mu_1, \ldots, \mu_{n-n_s}\}$ un completamento a base di $\mathbb{R}^n$ di $\left\{v_1, \ldots, v_{n_i}, z_1, \ldots, z_{n_r-n_i}, w_1 \ldots w_{n-n_o-n_i}\right\}$ (dove $n_s =$ dim(Im$(R) \oplus$ ker(Θ)))

- Definisci la matrice di cambiamento di base:

$$T = \left[z_1 \ \ldots \ z_{n_r-n_i} \ v_1 \ \ldots \ v_{n_i} \ \mu_1 \ \ldots \ \mu_{n-n_s} \ w_1 \ \ldots \ w_{n-n_o-n_i}\right]$$

- Nota: $\left\{z_1, \ldots, z_{n_r-n_i}, v_1, \ldots, v_{n_i}, w_1 \ldots w_{n-n_o-n_i}\right\}$ è una base di Im$(R) \oplus$ ker(Θ).

Decomposizione di Gilbert-Kalman

Essendo Im(R), ker(Θ) e Im(R) $\cap$ ker(Θ) A-invarianti, il cambiamento di base così definito è tale che le matrici $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ risultano nella forma:

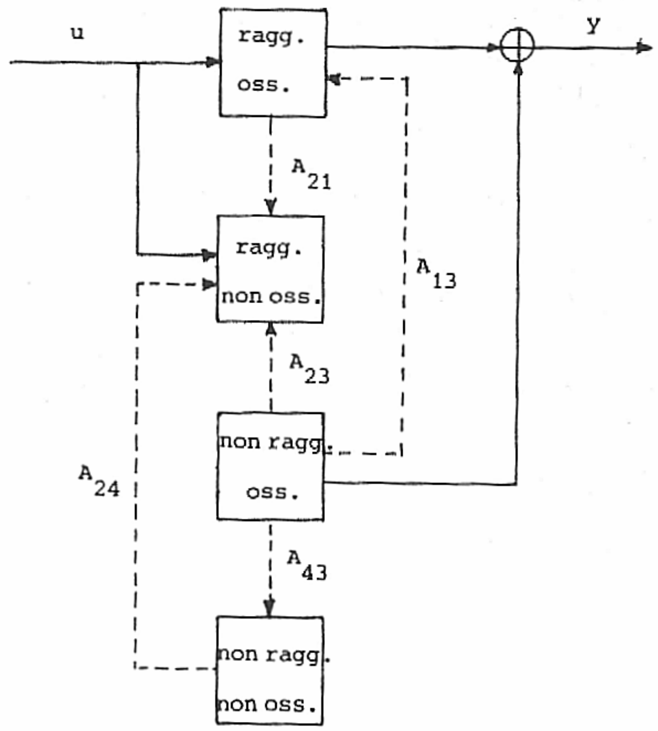
$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & C_3 & 0 \end{bmatrix}$$

dove:

- la terna (A_{11}, B_1, C_1) è *raggiungibile* e *osservabile*;
- la terna $(A_{22}, B_2, 0)$ è *raggiungibile* e *non osservabile*;
- la terna $(A_{33}, 0, C_3)$ è *non raggiungibile* e *osservabile*;
- la terna $(A_{44}, 0, 0)$ è *non raggiungibile* e *non osservabile*;

Decomposizione di Gilbert-Kalman



Decomposizione di Gilbert-Kalman

> I poli della funzione di trasferimento del sistema coincidono con gli autovalori della sua parte raggiungibile e osservabile.

Operando una decomposizione di Gilbert-Kalman della terna (A, B, C), è immediato verificare che:

$$C(zI - A)^{-1}B = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = C_1(zI - A_{11})^{-1}B_1 \,.$$

Dunque i poli di $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$coincidono con gli autovalori di A_{11}! Gli autovalori di A_{22}, A_{33} e A_{44} scompaiono in cancellazioni polo-zero.

Esempio. $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

det$(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{2})$, mentre $G(z) = \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$. Si noti che $\lambda = 1$ è autovalore della parte non raggiungibile e non osservabile del sistema.