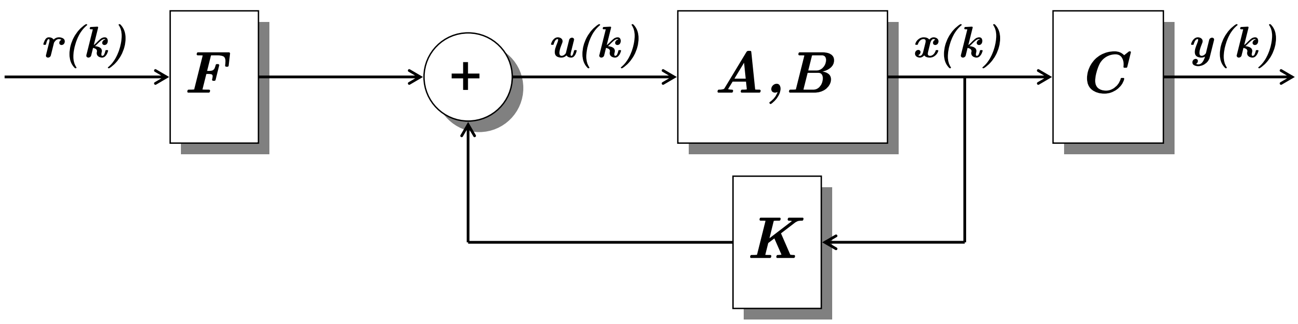
Azione integrale nella retroazione dello stato: tracking e reiezione del disturbo

Inseguimento del riferimento

- Abbiamo visto che mediante retroazione dello stato possiamo portare l'uscita y del sistema a zero
- Problema: come portare l'uscita ad un valore di riferimento costante (*set point*) $r \neq 0$?
- Soluzione: Poni $u(k) = Kx(k) + Fr(k)$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A+BK)x(k) + BFr(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$



Inseguimento del riferimento

- Per avere $y(k) \to r$, occorrerà che il guadagno in continua da r a y sia

$$C(I-(A+BK))^{-1}BF = I$$

- Nel caso in cui il numero di ingressi sia uguale al numero di uscite: $F = (C(I-(A+BK))^{-1}B)^{-1}$ (Hp: è invertibile)

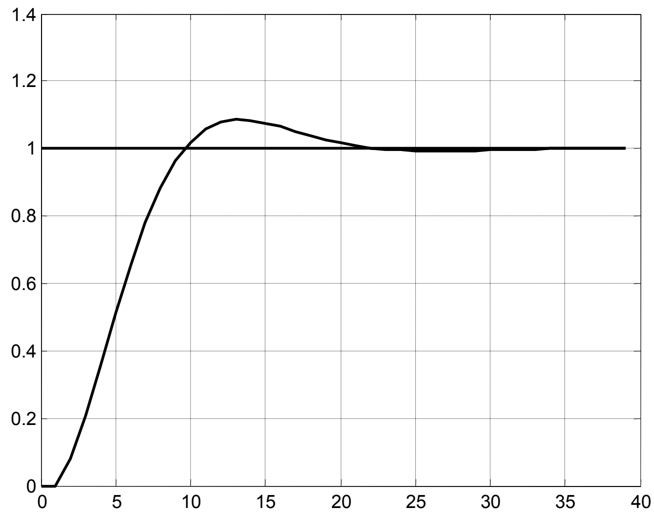
- Esempio:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\ u(k) &= \begin{bmatrix} -0.13 & -0.3 \end{bmatrix} x(k) + 0.08 r(k) \end{aligned}$$

si ha che $y(k) = G(z)r(k)$, dove $G(z) = \frac{2}{25z^2-40z+17}$, il cui guadagno in continua è $G(1) = 1$

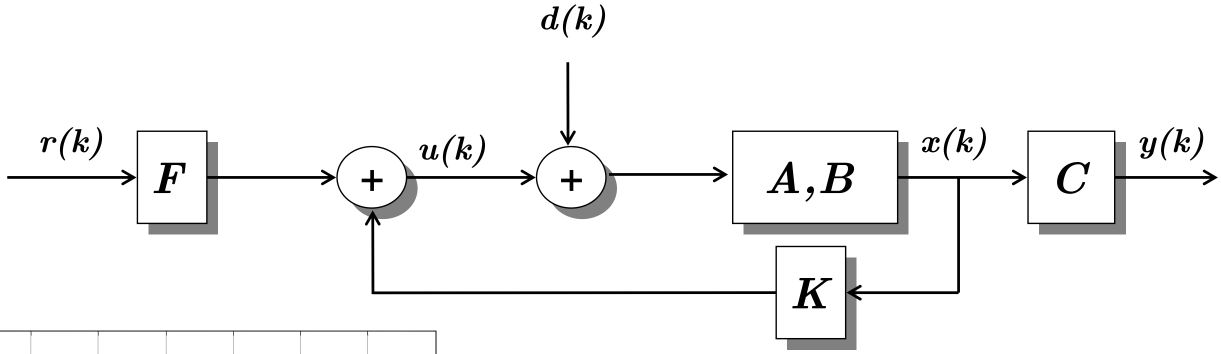
Inseguimento del riferimento

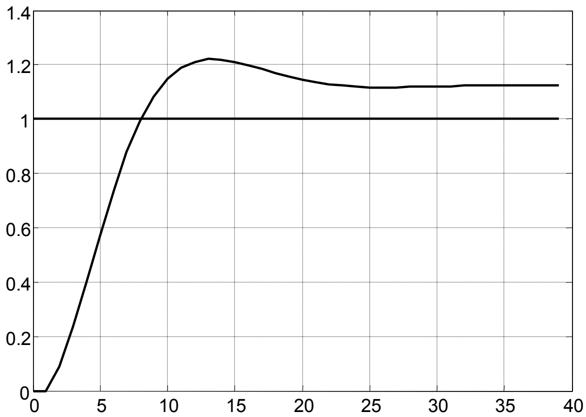
Evoluzione dell'uscita per condizione iniziale $x(0) = [0\ 0]'$
e riferimento $r(k) = 1$, $\forall k \geq 0$



Inseguimento del riferimento

Problema: non c'è feedback direttamente sull'errore di inseguimento $e(k) = y(k) - r(k)$, lo schema è poco "robusto" nei confronti di incertezze e disturbi





$$d(k) = 0.01 \ \forall k = 0, 1, \ldots$$

Il riferimento non viene inseguito perché il disturbo non misurabile $d(k)$ modifica le condizioni nominali di progetto !!!

Azione integrale

- Consideriamo il problema di regolare a zero l'uscita $y(k)$ in presenza di un disturbo di ingresso $d(k)$.

- Aumentiamo il sistema con l'integrale dell'uscita

$$q(k+1) = q(k) + y(k)$$

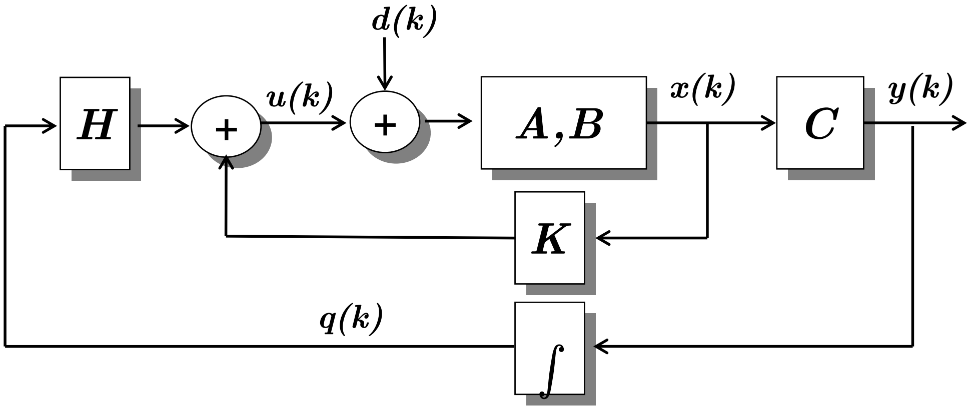
- Il sistema aumentato diventa:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ q(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Per il sistema aumentato, progettiamo un regolatore stabilizzante

$$u(k) = \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix}$$

Azione integrale - Reiezione disturbo costante



Teorema Per ogni disturbo costante $d(k) \equiv d$, $y(k) \to 0$ per $k \to \infty$

Dimostrazione: La matrice di aggiornamento dello stato ad anello chiuso

$$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & H \end{bmatrix} \right)$$

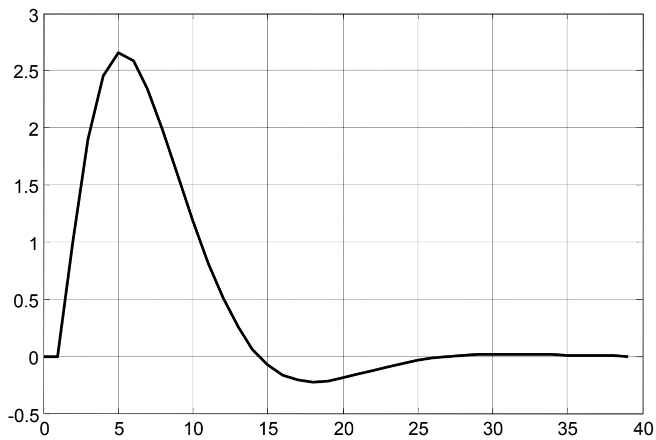
ha autovalori as. stabili per costruzione, quindi per eccitazione costante $d(k)$ lo stato esteso $x(k), q(k)$ converge ad un valore di regime costante. In particolare, converge $q(k)$, e quindi $y(k) = q(k+1) - q(k) \to 0$. $\square$

Reiezione di disturbo costante

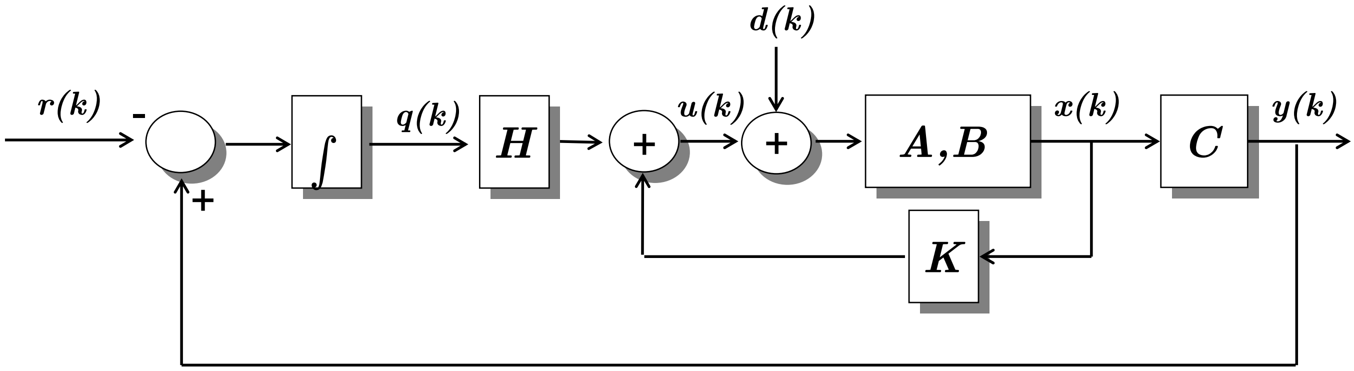
Esempio:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u(k) + d(k)) \\ q(k+1) &= q(k) + y(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\ u(k) &= \begin{bmatrix} -0.48 & -1 \end{bmatrix} x(k) - 0.056 q(k) \end{aligned}$$

con $x(0) = [0\ 0]'$, $d(k) \equiv 1$



Azione integrale - Tracking



Idea: Utilizziamo lo stesso feedback (K, H), ma anzichè calcolare $q(k)$ come integrale dell'uscita, integriamo l'errore di inseguimento:

$$q(k+1) = q(k) + (y(k) - r(k))$$

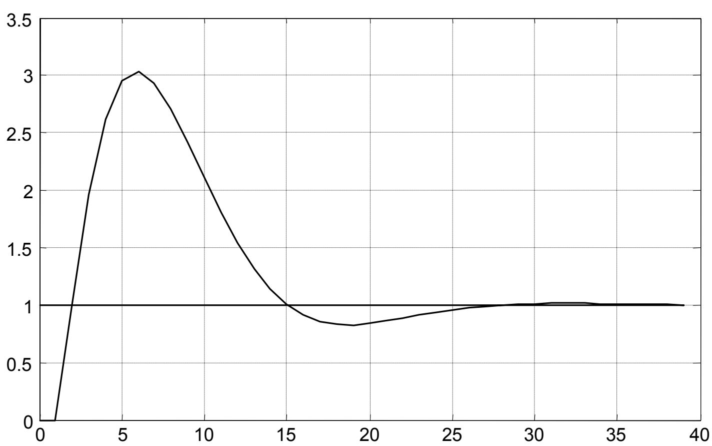
Azione integrale - Tracking

Esempio:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u(k) + d(k)) \\ q(k+1) &= q(k) + (y(k) - r(k)) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\ u(k) &= \begin{bmatrix} -0.48 & -1 \end{bmatrix} x(k) - 0.056 q(k) \end{aligned}$$

con $x(0) = [0\ 0]'$, $d(k) \equiv 1$, $r(k) \equiv 1$

Sembra funzionare ...
(perché ??)



Azione integrale - Tracking

Teorema Per ogni disturbo costante $d(k) \equiv d$ e per ogni riferimento costante $r(k) \equiv r$, la retroazione dello stato con azione integrale garantisce che $y(k) \to r$ per $k \to \infty$

Dimostrazione:

- Supponiamo che esista un v_r tale che $C(I-(A+BK))^{-1}Bv_r = r$ e poniamo $x_r = (I-(A+BK))^{-1}Bv_r$
- x_r soddisfa la relazione $x_r = (A+BK)x_r + Bv_r$
- Definiamo

$$\begin{aligned}\Delta x(k) &\triangleq x(k) - x_r\\ \Delta y(k) &\triangleq y(k) - r\\ \Delta d(k) &\triangleq d(k) - v_r\end{aligned}$$

- È facile verificare che

$$\begin{aligned}\Delta x(k+1) &= A\Delta x(k) + B(K\Delta x(k) + Hq(k) + \Delta d(k))\\ \Delta y(k) &= C\Delta x(k)\\ q(k+1) &= q(k) + \Delta y(k)\end{aligned}$$

- Per il teorema precedente, $\Delta y(k) \to 0$ per ogni disturbo costante $\Delta d(k)$, cioè $y(k) \to r$ per ogni disturbo costante $d(k)$ $\square$

LQR con azione integrale

- Per il sistema esteso

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(k+1)\\ q(k+1)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0\\ C & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k)\\ q(k)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B\\ 0\end{bmatrix}u(k)\\ y(k) &= \begin{bmatrix} C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k)\\ q(k)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

  progettiamo un regolatore LQR

$$u(k) = \begin{bmatrix} K & H\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(k)\\ q(k)\end{bmatrix}$$

  ottimo per i pesi $Q = \begin{bmatrix} C'Q_yC & 0\\ 0 & Q_I\end{bmatrix}$, R.

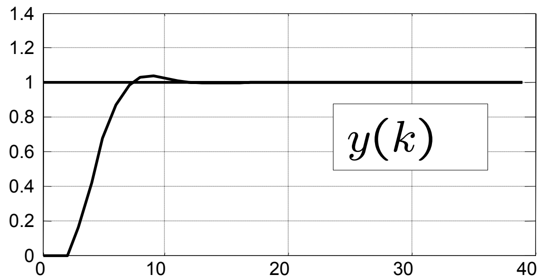
- Significato dei pesi: Q_y=peso sull'errore di tracking, Q_I=peso sull'integrale dell'errore di tracking, R=peso sull'ingresso.

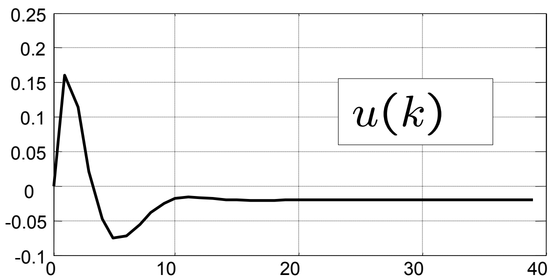
LQR con azione integrale

Esempio: $Q_y = 1$, $Q_I = 1$, $R = 10$

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\
q(k+1) &= q(k) + (y(k) - r(k)) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \\
u(k) &= \begin{bmatrix} -0.9177 & -1.2838 \end{bmatrix} x(k) - 0.1601 q(k)
\end{aligned}
$$

con $x(0) = [0\ 0]'$, $r(k) \equiv 1$





Azione integrale per sistemi a tempo continuo

- Gli stessi ragionamenti si applicano nel caso di sistemi a tempo continuo

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t)
\end{aligned}
$$

- Consideriamo l'integrale dell'uscita $q(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau$, e quindi

$$\dot{q}(t) = y(t) = Cx(t)$$

- Aumentiamo il sistema:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Per il sistema aumentato, progettiamo un regolatore stabilizzante $[K\ \ H]$
- Implementiamo

$$u(t) = Kx(t) + H\int_0^t (y(\tau) - r(\tau))d\tau$$