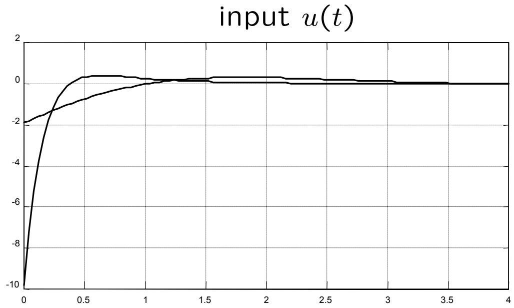
Controllo Ottimo
Lineare Quadratico (LQR)

Problema LQR: Introduzione

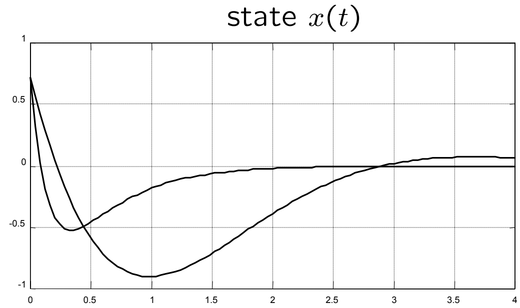
- Problema della scelta dei poli ad anello chiuso: dove posizionarli ?
- Obiettivi:
  - Rendere lo stato $x(k)$ "piccolo" (per regolarlo verso l'origine)
  - Utilizzare un ingresso $u(k)$ "piccolo" (per economizzare l'uso degli attuatori)

In generale sono obiettivi contrastanti !

input $u(t)$



state $x(t)$



- LQR: Tecnica che permette di piazzare i poli ad a.c. in maniera "ottima"

Controllo Digitale - A. Bemporad - A.a. 2007/08

Controllo Ottimo LQ

- Controllo ottimo (su orizzonte temporale finito T):

  Dato il sistema dinamico

  $$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

  con condizione iniziale $x(0)$, si cerca la sequenza ottima di ingressi

  $$U = \{u(0),\ u(1),\ \dots,\ u(T-1)\}$$

  che porta lo stato da $x(0)$ a verso l'origine e minimizza l'indice di prestazione

  $$\boxed{J(x(0), U) = \sum_{k=0}^{T-1} x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k) + x'(T)Q_T x(T)}$$

  dove $Q = Q' \geq 0,\ R = R' > 0,\ Q_T = Q_T' \geq 0$.

Controllo Ottimo LQ

$$J(x(0), U) = \sum_{k=0}^{T-1} x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k) + x'(T)Q_T x(T)$$

- T=orizzonte temporale (*time horizon*)
- Il primo termine misura la deviazione dello stato rispetto al valore desiderato $x = 0$
- Il secondo termine misura l'intensità dell' ingresso di controllo (*actuator authority*)
- Il terzo termine misura la deviazione dello stato finale rispetto allo 0
- Q, R, Q_T sono i parametri a disposizione del progettista (cfr. i parametri K_I, K_P, K_D del controllore PID), ed hanno un chiaro significato economico/fisico

Controllo Ottimo LQ

- Riconsidera il problema di controllabilità a zero dello stato con ingresso a energia minima

$$x(T) = 0, \qquad \min \left\| \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(T-1) \end{bmatrix} \right\|$$

- è un caso particolare di controllo ottimo LQ se poniamo:

$R = I$, $Q = 0$, $Q_T = \infty I$ (in pratica: $Q_T = 10^8 I$, ad esempio)

Controllo ottimo: soluzione

$$J(x(0), U) = \sum_{k=0}^{T-1} x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k) + x'(T)Q_T x(T)$$

- Sostituendo $x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(k-1-i)$ si ottiene

$$J(x(0), U) = \frac{1}{2}U'HU + x(0)'FU + \frac{1}{2}x(0)'Yx(0)$$

dove $H = H' > 0$ è una matrice definita positiva

- Il minimo lo si ottiene azzerando il gradiente: $\nabla_U J(x(0), U) = HU + F'x(0) = 0$ da cui ricaviamo

$$U^* = \begin{bmatrix} u^*(0) \\ u^*(1) \\ \vdots \\ u^*(T-1) \end{bmatrix} = -H^{-1}F'x(0)$$

Controllo ottimo: soluzione

Come ottenere H, F, Y:

$$J(x(0),U) = x'(0)Qx(0) + \begin{bmatrix} x'(1) & x'(2) & \dots & x'(T-1) & x'(T) \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Q_T \end{bmatrix}}^{\bar{Q}} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(T-1) \\ x(T) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} u'(0) & u'(1) & \dots & u'(T-1) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & R \end{bmatrix}}_{\bar{R}} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(T-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(T) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ AB & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{T-1}B & A^{T-2}B & \dots & B \end{bmatrix}}^{\bar{S}} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \dots \\ u(T-1) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^T \end{bmatrix}}_{\bar{T}} x(0)$$

Da cui:
$$\begin{aligned} J(x(0),U) &= x'(0)Qx(0) + (\bar{S}U + \bar{T}x(0))'\bar{Q}(\bar{S}U + \bar{T}x(0)) + U'\bar{R}U \\ &= \frac{1}{2}U' \underbrace{2(\bar{R} + \bar{S}'\bar{Q}\bar{S})}_{H} U + x'(0) \underbrace{2\bar{T}'\bar{Q}\bar{S}}_{F} U + \frac{1}{2}x'(0) \underbrace{2(Q + \bar{T}'\bar{Q}\bar{T})}_{Y} x(0) \end{aligned}$$

Controllo ottimo: soluzione

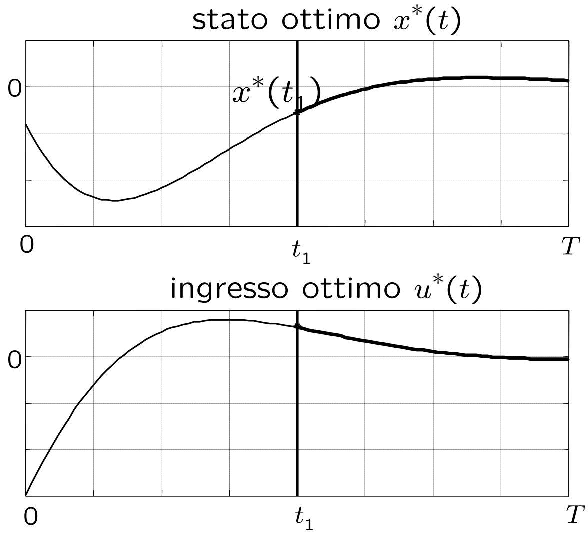
$$U^* = \begin{bmatrix} u^*(0) \\ u^*(1) \\ \vdots \\ u^*(T-1) \end{bmatrix} = -H^{-1}F'x(0)$$

- Problema: è una soluzione ad anello aperto
- Problema: la dimensione delle matrici H, F è proporzionale all'orizzonte temporale T
- Cerchiamo una soluzione migliore computazionalmente, più robusta (e più elegante) ...

Principio di Bellman

1. Principio di Bellman: data la sequenza ottima $U^* = [u^*(0), \ldots, u^*(T-1)]$ (e la corrispondente traiettoria ottima $x^*(k)$), la sottosequenza $[u^*(t_1), \ldots, u^*(T-1)]$ è ancora ottima per il problema su orizzonte $[t_1, T]$ a partire dallo stato ottimo $x^*(t_1)$

Richard Bellman (1920 - 1984)



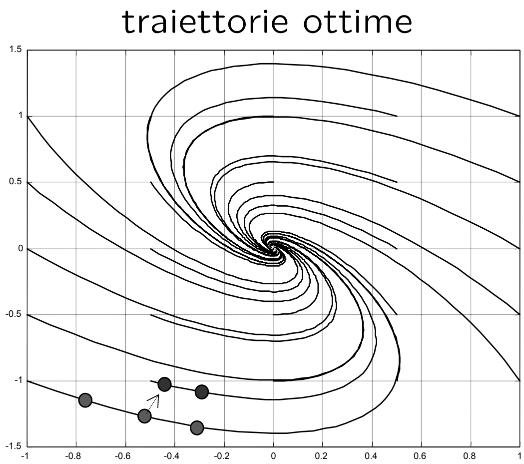
2. Inoltre la traiettoria ottima d'ingresso su un certo intervallo dipende unicamente dallo stato iniziale, in particolare la traiettoria ottima da t_1 a T dipende da $x^*(t_1)$

3. (1)+(2) implicano che ogni valore $u^*(t_1)$ della traiettoria ottima da 0 a T può essere espresso come funzione di $x^*(t_1)$, cioè in forma di retroazione dello stato (ottimo)

Principio di Bellman

- Vale anche per sistemi non lineari e/o funzionali di costo non quadratici: **ogni legge di controllo ottimo può essere messa in forma di retroazione dello stato:**

$$u^*(t_1) = f_{t_1}(x^*(t_1)), \quad \forall t_1 = 0, \ldots, T-1$$



- Rispetto alla forma "ad anello aperto" $\{u^*(0), \ldots, u^*(T-1)\} = f(x(0))$ la forma di retroazione dello stato ha il vantaggio di essere più **robusta** rispetto alle perturbazioni (ad ogni istante si applica sempre la mossa ottima sul restante intervallo di tempo per la situazione in cui si trova il sistema)

Programmazione dinamica

- Per un generico istante t_1 e stato $x(t_1) = z$ consideriamo

$$V_{t_1}(z) = \min_{u(t_1),\ldots,u(T-1)} \left\{ \sum_{k=t_1}^{T-1} x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k) + x'(T)Q_T x(T) \right\}$$

  dove la funzione minimizzanda è detta *cost-to-go*, cioè il costo residuo sull'intervallo $[t_1, T]$ partendo dallo stato $x(t_1) = z$.

- $V_0(z)$ = costo minimo LQ partendo da condizione iniziale $x(0) = z$

- Principio della programmazione dinamica (DP, *dynamic programming*)

$$\begin{aligned} V_0(z) &= \min_{U \triangleq \{u(0),\ldots,u(T-1)\}} J(x(0), U) \\ &= \min_{u(0),\ldots,u(t_1-1)} \left\{ \sum_{k=0}^{t_1} x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k) + V_{t_1}(x(t_1)) \right\} \end{aligned}$$

- In parole povere: il minimo del costo tra 0 e T a partire dallo stato $x(0)$ è uguale al minimo del (costo speso fino al passo t_1 + minimo del cost-to-go tra t_1 e T a partire dallo stato $x(t_1)$)

Soluzione LQ mediante progr. dinamica

- Partiamo dall'istante finale T: per un generico $x(T)$

$$V_T(x(T)) = x'(T) \underbrace{Q_T}_{P(T)} x(T) \quad \text{(non dipende da nessun ingresso!)}$$

- All'istante $T-1$: per un generico $x(T-1)$

$$\begin{aligned} V_{T-1}(x(T-1)) &= \min_{u(T-1)} \left\{ x'(T-1)Qx(T-1) + u'(T-1)Ru(T-1) + x(T)'Q_T x(T) \right\} \\ &= x'(T-1)Qx(T-1) + \min_{u(T-1)} \left\{ u'(T-1)Ru(T-1) + \right. \\ &\quad \left. (Ax(T-1) + Bu(T-1))'Q_T(Ax(T-1) + Bu(T-1)) \right\} \\ &= x'(T-1)(A'Q_TA + Q)x(T-1) + \min_{u(T-1)} \left\{ u'(T-1)(R + \right. \\ &\quad \left. B'Q_TB)u(T-1) + 2x'(T-1)A'Q_TBu(T-1)) \right\} \end{aligned}$$

  da cui ricaviamo l'ingresso ottimo:

$$u^*(T-1) = -(R + B'Q_TB)^{-1}B'Q_TAx(T-1)$$

  e quindi, sostituendo,

$$V_{T-1}(x(T-1)) = \ldots = x'(T-1) \underbrace{\left[Q - A'Q_TB(R + B'Q_TB)^{-1}B'Q_TA + A'Q_TA \right]}_{P(T-1)} x(T-1)$$

Soluzione LQ mediante programm. dinamica

- All'istante $T-2$: per un generico $x(T-2)$

$$\begin{aligned} V_{T-2}(x(T-2)) &= \min_{u(T-2)} \left\{ x'(T-2)Qx(T-2) + u'(T-2)Ru(T-2) + V_{T-1}(x(T-1)) \right\} \\ &= x'(T-2)Qx(T-2) + \min_{u(T-2)} \left\{ u'(T-2)Ru(T-2) + \right. \\ &\quad \left. x(T-1)'P(T-1)x(T-1) \right\} \end{aligned}$$

ha la stessa forma del problema al passo $T-1$!!!

- l'ingresso ottimo $u^*(T-2)$ è pertanto

$$u^*(T-2) = -(R + B'P(T-1)B)B'P(T-1)Ax(T-2)$$

e quindi, sostituendo,

$$V_{T-2}(x(T-2)) = x'(T-2)P(T-2)x(T-2)$$

dove

$$P(T-2) = Q - A'P(T-1)B(R + B'P(T-1)B)^{-1}B'P(T-1)A + A'P(T-1)A$$

Iterazioni di Riccati

- Iterazioni di Riccati:

1. Inizializza $P(T) = Q_T$

2. Per $j = T, \ldots, 1$:

$$P(j-1) = Q - A'P(j)B(R + B'P(j)B)^{-1}B'P(j)A + A'P(j)$$

3. Definisci

$$K(j) = -(R + B'P(j+1)B)^{-1}B'P(j+1)$$

4. L'ingresso ottimo

$$u^*(j) = K(j)x(j)$$

Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754)

- Nota: l'ingresso ottimo è calcolato in forma di retroazione dello stato !

LQR (orizzonte infinito)

- Per processi che operano su un orizzonte temporale molto lungo, un orizzonte temporale finito T non è sufficiente

- Mandiamo $T \to \infty$:

$$V^\infty(x(0)) = \min_{u(0),u(1),\ldots} \sum_{k=0}^{\infty} x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k)$$

- Risultato: se (A, B) è stabilizzabile, esiste ed è unica la soluzione P_∞ dell' *equazione algebrica di Riccati* (ARE)

$$P_\infty = A'P_\infty A + Q - A'P_\infty B(B^T P_\infty B + R)^{-1} B' P_\infty A$$

- Nota: il costo ottimo su orizzonte infinito è $V^\infty(x(0)) = x'(0)P_\infty x(0)$

LQR (orizzonte infinito)

- Ritorniamo alle iterazioni di Riccati: partendo da $P(\infty) = P_\infty$ ed andando all'indietro, otteniamo $P(j) = P_\infty \ \forall j \geq 0$

- Di conseguenza:

$$K(j) = -(R + B'P_\infty B)^{-1} B' P_\infty A \triangleq K_{LQ}, \quad \forall j = 0, 1, \ldots$$

- La legge di controllo LQR è lineare e non dipende dall'indice temporale j

- in Matlab:

```
[KLQ,P∞,E] = -DLQR(A,B,Q,R)
```

  dove E=modi del sistema ad anello chiuso (cioè autovalori di $(A + BK_{LQ})$)

- È un metodo universale (e ottimo) di piazzare i poli !

- Sistemi lineari a tempo continuo: vale un risultato analogo (in Matlab: `LQR`)

LQR - Peso sull'uscita

- Spesso ci interessa pesare solo le uscite: $y'(k)Q_y y(k)$
- Equivale a porre $Q = C'Q_yC$
- Vale il seguente risultato: Sia (A, B) stabilizzabile, (A, C) rivelabile e $Q_y > 0$ (in generale: $Q \geq 0$, $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ rivelabile, dove $Q = Q^{\frac{1}{2}}{}'Q^{\frac{1}{2}}$). Allora l'anello chiuso sotto la regolazione $u(k) = K_{LQ}x(k)$ è asintoticamente stabile:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} u(t) = 0$$

- Spiegazione intuitiva: solo la parte osservabile influisce sul costo, e quindi deve necessariamente andare a zero perchè il costo minimo sia finito. La parte non osservabile invece non ha influenza, e può pertanto non convergere a zero.

LQR: Esempio

- Sistema a due stati, singolo ingresso singola uscita (SISO) (doppio integratore)

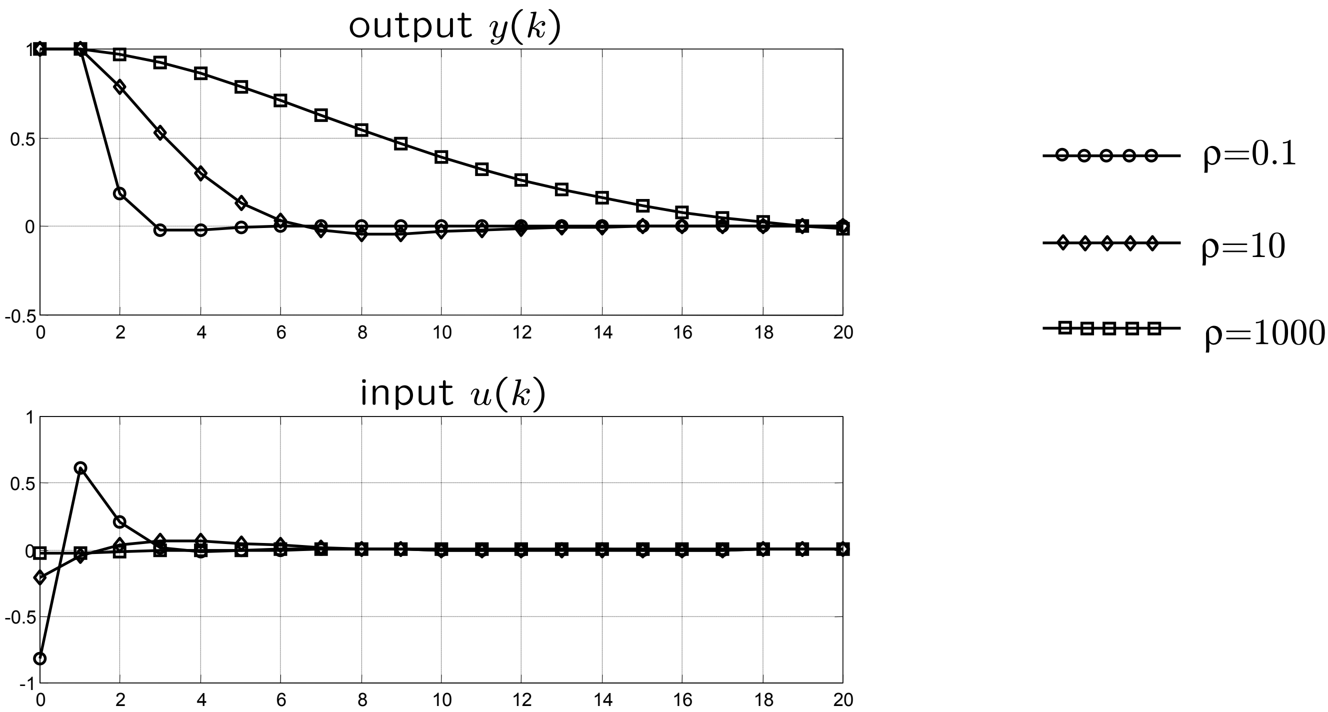
$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

- LQR (orizzonte infinito)

$$V^\infty(x(0)) = \min_{u(0),u(1),\ldots} \sum_{k=0}^{\infty} y^2(k) + \rho u^2(k)$$

- Pesi: $Q = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \cdot 1 \cdot [\,1\ 0\,] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $R = \rho > 0$

LQR: Esempio



Stato iniziale: $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$V^{\infty}(x(0)) = \min_{u(0),u(1),\ldots} \sum_{k=0}^{\infty} y^2(k) + \rho u^2(k)$$