Posizionamento dei poli mediante retroazione dello stato

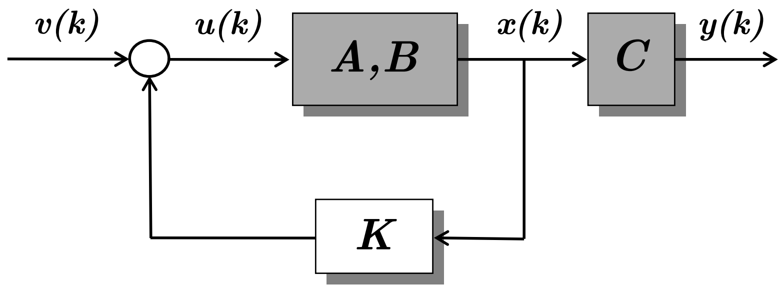
Controllo con retroazione dello stato

Problema: progettare un dispositivo che, connesso al sistema da controllare, renda asintoticamente stabile il sistema complessivo risultante.

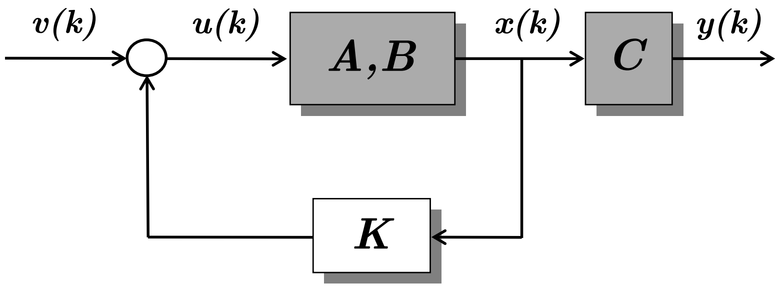
Soluzione con retroazione dello stato

Se sono disponibili le misure di tutto lo stato del sistema, possiamo generare l'ingresso di controllo moltiplicando le misure dello stato per un guadagno statico K=[k_1 k_2 ... k_n]:

$$\boxed{u(k) = k_1 x_1(k) + k_2 x_2(k) + \ldots + k_n x_n(k) + v(k)}$$



Controllo con retroazione dello stato



- Essendo $u(k) = Kx(k) + v(k)$, il sistema complessivo ha equazioni:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A+BK)x(k) + Bv(k) \\ y(k) &= (C+DK)x(k) + Dv(k) \end{aligned}$$

> TEOREMA
> Se (A,B) è raggiungibile gli autovalori di $A+BK$ possono essere decisi arbitrariamente.

Assegnazione degli autovalori

- Vale il seguente fatto:

> (A,B) è completamente raggiungibile se e solo se è algebricamente equivalente ad una coppia $(\tilde{A},\tilde{B})$ in *forma canonica di controllabilità*
>
> $$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{array}\right] \quad ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice T tale che $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$ è

$$T = [B \ AB \ \dots A^{n-1}B] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dove

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = \det(\lambda I - A)$$

Assegnazione degli autovalori

- Consideriamo una coppia (A, B) raggiungibile, e $m = 1$(singolo ingresso).
- Siano $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ il polinomio caratteristico della matrice A, e $p_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$ un polinomio caratteristico desiderato per la matrice $A + BK$.
- Supponiamo che la coppia (A, B) sia in forma canonica di controllabilità:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Definendo la matrice $K = [k_1 \ \ldots \ k_n]$, si ha:

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -(a_0 - k_1) & -(a_1 - k_2) & \ldots & -(a_{n-1} - k_n) \end{bmatrix}$$

Assegnazione degli autovalori

- Il polinomio caratteristico di $A + BK$ risulta pertanto:

$$\lambda^n + (a_{n-1} - k_n)\lambda^{n-1} + \ldots + (a_1 - k_2)\lambda + (a_0 - k_1) \ ,$$

e affinché questo coincida con $p_d(\lambda)$ occorre imporre:

$$a_0 - k_1 = d_0 \ , \ a_1 - k_2 = d_1 \ , \ \ldots \ , \ a_{n-1} - k_n = d_{n-1}$$

- Quindi:
  - se $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ è il polinomio caratteristico della matrice A, e
  - $p_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$ è il polinomio caratteristico desiderato per la matrice $A + BK$ ad anello chiuso,

  se (A, B) è in forma canonica di controllabilità basterà porre:

$$K = \begin{bmatrix} a_0 - d_0 & a_1 - d_1 & \ldots & a_{n-1} - d_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Assegnazione degli autovalori

- Se il sistema (A,B) non è in forma canonica di controllabilità, occorre porre:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \left[a_0-d_0 \;\; a_1-d_1 \;\; \ldots \;\; a_{n-1}-d_{n-1} \right] \\ K &= \tilde{K}T^{-1} \quad \text{(cioè risolvere il sistema } T'K' = \tilde{K}'\text{)} \end{aligned}$$

dove

$$T = R \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

- Infatti, gli autovalori di $(A+BK)$ risultano uguali agli autovalori di

$$T^{-1}(A+BK)T = T^{-1}AT + T^{-1}BKT = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$$

Assegnazione degli autovalori

Formula di Ackermann:

- Siano:
  $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ il polinomio caratteristico di A
  $p_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$ è il polinomio caratteristico desiderato per la matrice $A+BK$ ad anello chiuso.

- Sia $p_d(A) = A^n + d_{n-1}A^{n-1} + \ldots + d_1A + d_0I$ (è una matrice $n \times n$)

- Allora

$$\boxed{K = -[0 \; 0 \; \ldots \; 0 \; 1][B \; AB \; \ldots \; A^{n-1}B]^{-1} p_d(A)}$$

In MATLAB: **K=-acker(A,B,P);** **K=-place(A,B,P);**

dove P=[λ_1 λ_2 ... λ_n] sono i poli desiderati ad anello chiuso

Pole-placement: esempio

- Si consideri il sistema

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -3 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u(k) = Ax(k) + Bu(k)$$

- $R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$ ha rango 2, dunque il sistema è raggiungibile.

- Si desiderano assegnare gli autovalori $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$:

$$p_d(\lambda) = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{4}) = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} = \det(\lambda I - A - BK)$$

$$\begin{aligned} \lambda I - A - BK &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -\frac{k_1}{2} & -\frac{k_2}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda - k_1 & \frac{1}{4} - k_2 \\ 3 + \frac{k_1}{2} & \lambda - 1 + \frac{k_2}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pole-placement: esempio

- Percui:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A - BK) &= \begin{vmatrix} \lambda - k_1 & \frac{1}{4} - k_2 \\ 3 + \frac{k_1}{2} & \lambda - 1 + \frac{k_2}{2} \end{vmatrix} = (\lambda - k_1)(\lambda - 1 + \frac{k_2}{2}) - (3 + \frac{k_1}{2})(\frac{1}{4} - k_2) \\ &= \lambda^2 + (\frac{k_2}{2} - 1 - k_1)\lambda + (\frac{7k_1}{8} - \frac{3}{4} + 3k_2) \end{aligned}$$

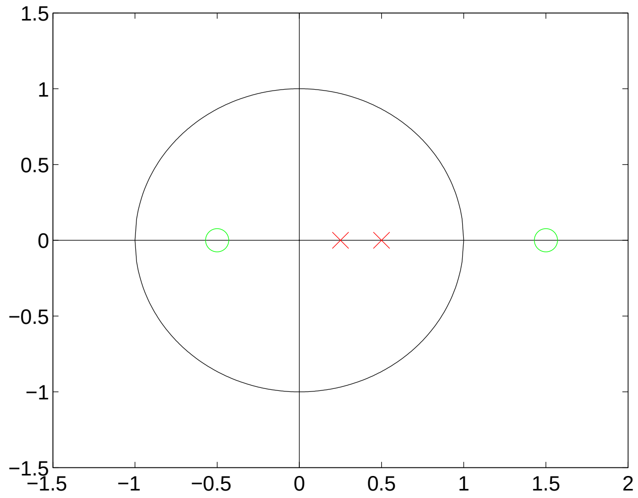
- da cui eguagliando i coefficienti:

$$\begin{cases} \frac{k_2}{2} - 1 - k_1 = -\frac{3}{4} \\ \frac{7k_1}{8} - \frac{3}{4} + 3k_2 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{k_2}{2} - \frac{1}{4} \\ \frac{7k_2}{16} - \frac{7}{32} - \frac{3}{4} + 3k_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

- e quindi:

$$\begin{cases} k_2 = \frac{7}{22} \\ k_1 = -\frac{1}{11} \end{cases} \Rightarrow K = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Pole-placement: esempio



o = autovalori ad anello aperto
x = autovalori ad anello chiuso

In MATLAB:

```
» A=[ 0 -1/4 ; -3 1 ];
» B=[ 1 ; -1/2 ];
» K=-place(A,B,[ 1/2 1/4 ])
K =
    -0.0909   0.3182
```


Metodo Alternativo

- Consideriamo una coppia (A, B) raggiungibile, e $m = 1$
- Siano $p_A(\lambda)=\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ il polinomio caratteristico della matrice A e $p_d(\lambda)=\lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$ un polinomio caratteristico desiderato per la matrice $A + BK$.
- Sia h la soluzione del sistema $R'h = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (la soluzione esiste essendo rank$(R) = n$)
- Si definisca:

$$Q = \begin{bmatrix} h' \\ h'A \\ \vdots \\ h'A^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Sia $\tilde{K} = \begin{bmatrix} a_0 - d_0 & a_1 - d_1 & \ldots & a_{n-1} - d_{n-1} \end{bmatrix}$.
- La matrice K cercata è $K = \tilde{K}Q$ (quindi $Q = T^{-1}$)

Pole-placement: esempio (cont'd)

- Si consideri ancora il sistema

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -3 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u(k) = Ax(k) + Bu(k)$$

- $R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$

- Risolvendo $R'h = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, si ottiene $h = \begin{bmatrix} -\frac{8}{55} & -\frac{16}{55} \end{bmatrix}'$

- $Q = \begin{bmatrix} h' \\ h'A \end{bmatrix} = -\frac{8}{55} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -6 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$

- $p_d(\lambda) = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{4}) = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad d_0 = \frac{1}{8}\,,\ d_1 = -\frac{3}{4}$

- $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad a_0 = -\frac{3}{4}\,,\ a_1 = -1$

- $\tilde{K} = [\, a_0{-}d_0 \ \ a_1{-}d_1 \,] = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}-\frac{1}{8} & -1+\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Assegnazione degli autovalori

Se rank(R)=n_r<n, allora $n-n_r$ autovalori del sistema non sono affetti da retroazione dallo stato.

- Si consideri infatti una matrice di cambio di coordinate T che opera una decomposizione canonica di raggiungibilità della coppia (A, B).

- Si consideri inoltre una matrice $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, e si definisca $\tilde{K}{=}KT$.

- Le matrici $A + BK$ e $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ hanno gli stessi autovalori.

- Posto $\tilde{K} = [\, K_r \ K_{\bar{r}}]$, con $K_r \in \mathbb{R}^{m\times n_r}$, si ha:

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} A_r + B_r K_r & A_{r\bar{r}} + B_r K_{\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di $A_{\bar{r}}$ (cioè gli autovalori della parte non raggiungibile del sistema) non possono essere cambiati!