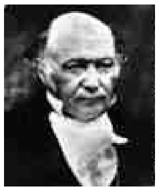
Raggiungibilità e retroazione dello stato

Richiami di Algebra Lineare

Data $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

- *immagine di A*: Im$(A) = \{w \in \mathbb{R}^m : w = Av,\ v \in \mathbb{R}^n\}$
- *rango di A*: rank(A) = dimensione di Im(A)
- *kernel di A*: ker$(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : 0 = Av\}$



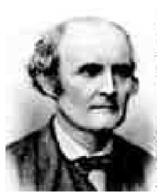
Sir William Rowan Hamilton

(1805-1865)

Data $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- *spettro di A*: $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I - A) = 0,$ con la loro molteplicità$\}$
- *sottospazio A-invariante:* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $AV \subseteq V$, cioè $Av \in V\ \forall v \in V$
- *TEOREMA DI HAMILTON-CAYLEY*
  Posto $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$,
  risulta:

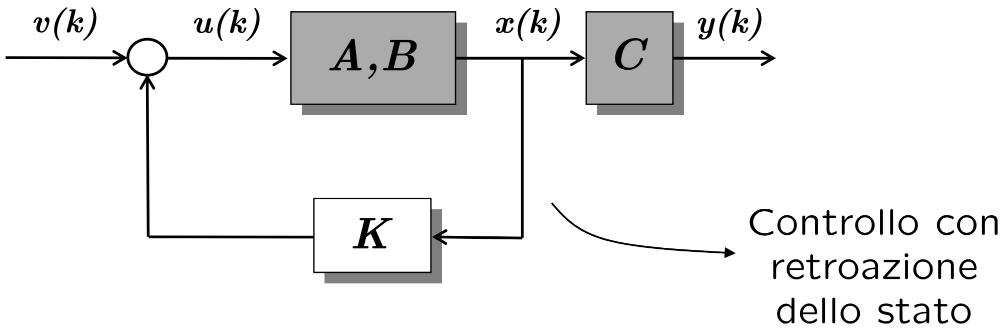
$$\boxed{A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0}$$



Arthur Cayley

(1821-1895)

Raggiungibilità: motivazione



- Primo obiettivo del controllo è la stabilizzazione.
- Si dispone delle misure di tutto lo stato.
- IDEA: utilizzare istantaneamente le misure dello stato per modificare la dinamica del sistema.

  È possibile determinare K tale che $A+BK$ è asintoticamente stabile?
- Essendo $u(k)=Kx(k)+v(k)$, risulta $x(k+1)=(A+BK)x(k)+Bv(k)$.
- La RAGGIUNGIBILITÀ affronta questo tipo di problema, dicendoci *quando* e *come* il problema può essere risolto

Raggiungibilità

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k), \quad x(0)=x_0 \qquad (x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^m)$$

Soluzione: $x(k)=A^k x_0+\sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu(k-1-j)$

Definizione

Il sistema si dice *(completamente) raggiungibile* se per ogni x_1, $x_2 \in\mathbb{R}^n$ esistono $k\in\mathbb{N}$ e $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(k-1)\in\mathbb{R}^m$ tali che

$$x_2=A^k x_1+\sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu(k-1-j)\ .$$

Raggiungibilità

Si consideri il problema di determinare, se esiste, una sequenza di n ingressi che permette di portare lo stato dalla condizione iniziale x_1 alla condizione finale x_2. Essendo:

$$\underbrace{x_2 - A^n x_1}_{X} = \underbrace{\left[\, B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B \,\right]}_{R} \underbrace{\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{U}$$

il problema è equivalente a risolvere rispetto a U il sistema

$$X = RU\ ,$$

dove la matrice $R \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ è detta matrice di raggiungibilità

- Il sistema ammette soluzione se e solo se $X \in \mathrm{Im}(R)$ (Teorema di Rouché-Capelli: $\mathrm{rank}([R\ X]) = \mathrm{rank}(R)$)

- Esiste una soluzione per ogni X se e solo se $\mathrm{rank}(R) = n$.

Raggiungibilità

TEOREMA

Il sistema è raggiungibile se e solo se $\mathrm{rank}(R) = n$.

Dimostrazione. (necessità) Se il sistema è raggiungibile, allora scegliendo x_1=0 e x_2=x si ha che $x = \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u(k-1-j)$. Se $k \le n$, allora direttamente $x \in \mathrm{Im}(R)$. D'altronde, se $k > n$, applicando il teorema di Hamilton-Cayley si ottiene ancora $x \in \mathrm{Im}(R)$. Per l'arbitrarietà di x, segue che $\mathrm{Im}(R) = \mathbb{R}^n$, e quindi $\mathrm{rank}(R) = n$.

(sufficienza) Se $\mathrm{rank}(R) = n$, allora $\mathrm{Im}(R) = \mathbb{R}^n$, e quindi il sistema $X = RU$, dove $X = x_2 - A^n x_1$ e $U = [\, u(n-1)' \ldots u(1)'\, u(0)'\,]'$, è risolvibile rispetto a U per ogni X. Dunque il sistema è raggiungibile.

Raggiungibilità

Osservazioni

- La proprietà di raggiungibilità di un sistema dipende solo dalle sue matrici A e B. Dunque, per estensione, la coppia (A, B) si dice *raggiungibile* se rank$\left(\left[\; B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B \;\right]\right) = n$.

- In generale, si dimostra che Im(R) è l'*insieme degli stati raggiungibili dall'origine*, cioè l'insieme degli stati $x \in \mathbb{R}^n$ per cui esistono $k \in \mathbb{N}$ e $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(k-1) \in \mathbb{R}^m$ tali che $x = \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u(k-1-j)$.

- Dato che Im$(R) = \mathbb{R}^n$ se e solo se rank$(R) = n$, risulta che il sistema è raggiungibile se e solo se tutti gli stati sono raggiungibili dall'origine.

Controllo a minima energia

Sia il sistema completamente raggiungibile e consideriamo il problema di voler portare lo stato iniziale $x(0) = x_1$ nello stato finale $x(k) = x_2$ in $k > n$ passi.

Possiamo scrivere:

$$\underbrace{x_2 - A^k x_1}_{X} = \underbrace{\left[\; B\ AB\ \ldots\ A^{k-1}B \;\right]}_{R_k} \underbrace{\begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{U}$$

dove la matrice $R_k \in \mathbb{R}^{n \times km}$ è la matrice di raggiungibilità in k passi.

Poiché rank$(R_k) = $ rank$(R) = n$, $\forall k > n$, segue che rank $R_k = $ rank$[R_k\ \ X] = n$ e quindi il sistema $X = R_k U$ ammette infinite soluzioni.

Problema. Determinare la sequenza di ingressi $\sum_{j=0}^{k-1} \|u(j)\|^2$ *a minima energia* che porta lo stato da x_1 a x_2.

Controllo a minima energia

Il problema è equivalente a trovare la soluzione U avente norma $\|U\|$ minima del sistema di equazioni

$$X = R_k U\ ,$$

Occorre pertanto risolvere il seguente problema di ottimizzazione:

$$U^* = \arg\min \frac{1}{2}\|U\|^2 \quad \text{subject to} \quad X = R_k U$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathcal{L}(U,\lambda) = \frac{1}{2}\|U\|^2 + \lambda'(X - R_k U)$$

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = U - R_k'\lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = X - R_k U = 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad U^* = \underbrace{R_k'(R_k R_k')^{-1}}_{R_k^{\#}} X$$

Nota. Poiché $\text{rank}(R_k) = \text{rank}(R) = n$, $\forall k \geq n$, la matrice $R_k R_k'$ risulta invertibile.

Richiami di Algebra Lineare

Cambi di coordinate

Base di $\mathbb{R}^n$: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linearmente indipendenti

Base canonica di $\mathbb{R}^n$: $e_1 = [\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ ]'$, $\ldots$, $e_n = [\ 0\ \ldots\ 0\ 1\ ]'$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} z_i v_i$$

$$\boxed{x = Tz}$$

coordinate rispetto alla nuova base

coordinate rispetto alla base canonica

$$T = [\ v_1\ \ldots\ v_n\ ]$$

matrice di cambio di coordinate

Cambio di coordinate nello spazio di stato

- Si consideri il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) & = & Cx(k)+Du(k) \end{array}\right.$$
$$x(0)=x_0$$

- Sia T una matrice invertibile, e si definisca il cambio di coordinate $z=T^{-1}x$.

- Essendo $x=Tz$, risulta:

$$z(k+1)=T^{-1}x(k+1)=T^{-1}\left(Ax(k)+Bu(k)\right)=T^{-1}ATz(k)+T^{-1}Bu(k)$$
$$y(k)=CTz(k)+Du(k)$$
$$z_0=T^{-1}x_0$$

e quindi
$$\left\{\begin{array}{rcl} z(k+1) & = & \tilde{A}z(k)+\tilde{B}u(k) \\ y(k) & = & \tilde{C}z(k)+\tilde{D}u(k) \end{array}\right.$$
$$z(0)=T^{-1}x_0$$
, dove
$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{A}=T^{-1}AT \\ \tilde{B}=T^{-1}B \\ \tilde{C}=CT \\ \tilde{D}=D \end{array}}$$

Decomposizione canonica di raggiungibilità

Obiettivo: effettuare un cambio di coordinate nello spazio di stato in modo da separare gli stati raggiungibili da quelli non raggiungibili

- Sia rank$(R)=n_r<n$ e si consideri la matrice di cambiamento di base

$$T=\left[\begin{array}{cccccc} v_1 & \dots & v_{n_r} & w_{n_r+1} & \dots & w_n \end{array}\right],$$

dove $\{v_1,\dots,v_{n_r}\}$ è una base di Im(R), e $\left\{w_{n_r+1},\dots,w_n\right\}$ è un suo completamento per ottenere una base di $\mathbb{R}^n$.

- Si osservi che Im(R) è A-invariante, cioè $Ax\in$ Im(R) $\forall x\in$ Im(R) (segue dal teorema di Hamilton-Cayley), e quindi Av_i non ha componenti rispetto ai vettori w_{n_r+1}, ..., w_n, $\forall i$.

- Si osservi anche che le colonne di B non hanno componenti rispetto ai vettori w_{n_r+1}, ..., w_n, dato che Im$(B)\subseteq$ Im(R).

- Quindi il sistema nelle nuove coordinate ha le matrici $\tilde{A}=T^{-1}AT$, $\tilde{B}=T^{-1}B$ e $\tilde{C}=CT$ nella forma:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{cc} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{array}\right] \quad \tilde{B}=\left[\begin{array}{c} B_r \\ 0 \end{array}\right] \quad \tilde{C}=\left[\begin{array}{cc} C_r & C_{\bar{r}} \end{array}\right]$$

Decomposizione canonica di raggiungibilità

La coppia (A_r, B_r) è *completamente raggiungibile* (con $A_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$ e $B_r \in \mathbb{R}^{n_r \times m}$)

- Infatti, si consideri la matrice di raggiungibilità

$$\tilde{R} = \left[\ \tilde{B} \ \tilde{A}\tilde{B} \ \ldots \ \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \ \right] = \left[\begin{array}{cccc} B_r & A_r B_r & \ldots & A_r^{n-1} B_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right]$$

ed anche

$$\tilde{R} = \left[T^{-1}B \ \ T^{-1}ATT^{-1}B \ \ \ldots \ \ T^{-1}A^{n-1}TT^{-1}B \right] = T^{-1}R$$

- Poiché T è non singolare, rank$(\tilde{R})$ = rank$(R) = n_r$, e quindi

$$\text{rank} \left[B_r \ \ A_r B_r \ \ \ldots \ \ A_r^{n_r-1} B_r \right] = n_r$$

cioè (A_r, B_r) è una coppia completamente raggiungibile.

Raggiungibilità e funzione di trasferimento

Gli autovalori della parte non raggiungibile del sistema non compaiono come poli della sua funzione di trasferimento

Si consideri infatti una matrice di cambio di coordinate T che opera una decomposizione canonica di raggiungibilità della coppia (A, B). Si ha:

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zI - A)^{-1}B + D = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D \\ &= \left[\begin{array}{cc} C_r & C_{\bar{r}} \end{array} \right] \left(zI - \left[\begin{array}{cc} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{array} \right] \right)^{-1} \left[\begin{array}{c} B_r \\ 0 \end{array} \right] + D \\ &= \left[\begin{array}{cc} C_r & C_{\bar{r}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} (zI - A_r)^{-1} & \star \\ 0 & (zI - A_{\bar{r}})^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B_r \\ 0 \end{array} \right] + D \\ &= C_r(zI - A_r)^{-1}B_r + D \end{aligned}$$

$G(z)$ non dipende dagli autovalori di $A_{\bar{r}}$! (si ha quindi una cancellazione poli/zeri)

Controllabilità

- Sotto l'ipotesi di raggiungibilità, si è visto che è possibile risolvere il problema di trovare una sequenza finita di ingressi che permette di portare lo stato dall'origine in un punto arbitrario $x \in \mathbb{R}^n$: $U = R^{\#}x$.

- Ci poniamo ora il problema inverso, ossia trovare una sequenza finita di ingressi che permette di portare lo stato da un punto arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nell'origine.

Definizione

Il sistema si dice *controllabile (all'origine) in k passi* se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esistono $u(0)$, $u(1)$, ..., $u(k-1) \in \mathbb{R}^m$ tali che $0 = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u(k-1-j)$.

Controllabilità

- Il sistema

$$-A^k x_0 = \underbrace{\left[\, B\ AB\ \ldots\ A^{k-1}B \,\right]}_{R_k} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

ammette soluzione per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $\text{Im}(A^k) \subseteq \text{Im}(R_k)$.

Dunque il sistema è *controllabile (all'origine) in k passi* se e solo se

$$\text{Im}(A^k) \subseteq \text{Im}(R_k) \ .$$

- Dato che $\text{Im}(A^k) = \text{Im}(A^n)$ per ogni $k > n$, un sistema controllabile in n passi è controllabile in k passi per ogni $k > n$.

- D'altra parte, se un sistema è controllabile in k passi con $k < n$, allora è controllabile in n passi.

Controllabilità

Definizione:

> Un sistema controllabile in n passi si dice (completamente) controllabile

Teorema:

> Un sistema è controllabile se e solo se tutti gli autovalori della sua parte non raggiungibile sono nulli

Dimostrazione:

- Dato lo stato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si deve risolvere rispetto a U il sistema

$$-A^n x_0 = \left[\, B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B \,\right] U = RU$$

dove $U = [\, u(n-1)' \; u(n-2)' \dots \; u(0)']'$.

- Operando una decomposizione canonica di raggiungibilità, si ha:

$$-A^n x_0 = -T\tilde{A}^n z_0 = \left[\, T\tilde{B} \quad T\tilde{A}\tilde{B} \quad \dots \quad T\tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \,\right] U = T\tilde{R}U$$

dove si è posto $z_0 = T^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} z_r \\ z_{\bar{r}} \end{bmatrix}$ e $T = [v_1 \; \dots \; v_{n_r} \; w_{n_r+1} \; \dots \; w_n]$.

Controllabilità

- Essendo T invertibile, il sistema $T\tilde{R}U = -T\tilde{A}^n z_0$ equivale al sistema $\tilde{R}U = -\tilde{A}^n z_0$, cioè al sistema

$$-\begin{bmatrix} A_r^n & \star \\ 0 & A_{\bar{r}}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_{\bar{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_r & A_rB_r & \dots & A_r^{n-1}B_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} U$$

- Essendo la coppia (A_r, B_r) completamente raggiungibile, tale sistema ammette soluzione se e solo se, per qualsiasi condizione iniziale $z_{\bar{r}}$,

$$A_{\bar{r}}^n z_{\bar{r}} = 0$$

e quindi se e solo se la matrice $A_{\bar{r}}^n = 0$.

- In definitiva, il sistema lineare di partenza ammette una soluzione *per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $A_{\bar{r}}$ è una matrice nilpotente (=autovalori tutti nulli).

- Infatti, se $A_{\bar{r}}$ è nilpotente

$$A_{\bar{r}}^n = A_{\bar{r}}^{n_r} A_{\bar{r}}^{n-n_r} = A_{\bar{r}}^{n_r} \cdot 0 = 0$$

Stabilizzabilità

Definizione:

> Un sistema si dice *stabilizzabile* se la sua parte non raggiungibile è asintoticamente stabile

- È una condizione più debole della controllabilità.

- Se $A_r^k \to 0$ per $k \to \infty$, allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esiste una sequenza di ingresso $\{u(k)\}_{k=0}^{\infty}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{k\to\infty} A^k x_0 + \sum_{j=1}^{k-1} A^j B u(k-1-j) = 0 \, ,$$

ossia lo stato può essere portato asintoticamente nell'origine.

> Un sistema è stabilizzabile se e solo se tutti gli autovalori della sua parte non raggiungibile sono in modulo < 1 / a parte reale negativa.