Richiami di Fondamenti di Automatica

Sistemi lineari tempo continuo

Rappresentazione spazio di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$y(t) \in \mathbb{R}^p$ $\quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Caso SISO (singolo ingresso singola uscita)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{x}_1(t) & = & a_{11}x_1(t) + \ \ldots \ + a_{1n}x_n(t) & +b_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & a_{21}x_1(t) + \ \ldots \ + a_{2n}x_n(t) & +b_2u(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n(t) & = & a_{n1}x_1(t) + \ \ldots \ + a_{nn}x_n(t) & +b_nu(t) \\ y(t) & = & c_1x_1(t) + \ \ldots \ + c_nx_n(t) & +du(t) \\ & & & \\ \multicolumn{4}{l}{x_1(0) = x_{10}, \quad \ldots \quad x_n(0) = x_{n0}} \end{array} \right.$$

Sistemi lineari tempo continuo

Soluzione:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{risposta forzata}}}$$

matrice esponenziale: $e^{At} \triangleq I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} + \ldots$

se la matrice A è diagonalizzabile:

$$A = T\Lambda T^{-1},\ T = [v_1|v_2|\ldots|v_n]\,,\ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dove

$\det(\lambda_i I - A) = 0$ autovalori di A

$Av_i = \lambda_i v_i$ autovettori di A

$i = 1, 2, \ldots, n$

$$\Longrightarrow e^{At} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

Sistemi lineari tempo continuo

Risposta modale:

- Sia l'ingresso $u(t) = 0$, $\forall t \geq 0$, e supponiamo che A sia diagonalizzabile
- La traiettoria di stato (risposta libera) è

$$x(t) = e^{At}x_0 = Te^{\Lambda t}T^{-1}x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i$$

dove v_i=autovettori di A, λ_i=autovalori di A, α_i=coefficienti che dipendono dalla condizione iniziale $x(0)$ (il vettore $\alpha = T^{-1}x(0)$, $T = [v_1 \ldots v_n]$).

- Il modo di evolvere del sistema dipende quindi dagli autovalori di A (detti, appunto, *modi* del sistema)
- Un modo si dice *eccitato* se il relativo $\alpha_i \neq 0$

Cambio di coordinate

Base di $\mathbb{R}^n$: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linearmente indipendenti

Base canonica di $\mathbb{R}^n$: $e_1 = [\ 1\ 0\ \ldots\ 0\ ]'$, $\ldots$, $e_n = [\ 0\ \ldots\ 0\ 1\ ]'$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} z_i v_i$$

$$\boxed{x = Tz}$$

coordinate rispetto alla nuova base

coordinate rispetto
alla base canonica

$$T = [\ v_1\ \ldots\ v_n\ ]$$

matrice di cambio di coordinate

Sistemi algebricamente equivalenti

- Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

- Sia T una matrice invertibile, e si definisca il cambio di coordinate $z = T^{-1}x$.

- Essendo $x = Tz$, risulta:

$$\dot{z}(t) = T^{-1}\dot{x}(t) = T^{-1}\left(Ax(t) + Bu(t)\right) = T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t)$$
$$y(t) = CTz(t) + Du(t)$$
$$z_0 = T^{-1}x_0$$

e quindi $\begin{cases} \dot{z}(t) &= \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}z(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$, dove

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{A} = T^{-1}AT \\ \tilde{B} = T^{-1}B \\ \tilde{C} = CT \\ \tilde{D} = D \end{array}}$$

$$z(0) = T^{-1}x_0$$

- I sistemi (A, B, C, D) e $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ si dicono *algebricamente equivalenti*

Nota: considerazioni numeriche

$$\boxed{Tz = x}$$

```
>> n=1000;
```

```
>> T=rand(n,n)+10*eye(n);
```

```
>> x=rand(n,1);
```

```
>> tic; z=inv(T)*x; toc

elapsed_time =

    2.2190
```

Viene prima invertita T. Tale operazione costa un numero di operazioni proporzionale ad n^3

```
>> tic; z=T \ x; toc

elapsed_time =

    0.8440
```

Viene risolto il sistema lineare $Tz{=}x$ (metodo di Gauss). Tale operazione costa un numero di operazioni proporzionale ad n^2

Cambio di coordinate

Osservazioni

Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, e $T = [\, v_1 \ \ldots \ v_n \,]$ una matrice invertibile. Si definisca il cambio di coordinate $z = T^{-1}x$.

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = T^{-1}A\,[\, v_1 \ \ldots \ v_n \,] = T^{-1}\,[\, Av_1 \ \ldots \ Av_n \,]$$

Dunque le colonne di $\tilde{A}$ sono le coordinate rispetto alla nuova base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ dei vettori trasformati $Av_1, \ldots, Av_n$.

Esempio. Se $v_1, \ldots, v_n$ sono autovettori di A, cioè $Av_i = \lambda_i v_i$, allora $\tilde{A} = \text{diag}\,\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Infatti:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT = T^{-1}\,[\lambda_1 v_1 | \lambda_2 v_2 | \ldots \lambda_n v_n] \\ &= T^{-1}\,[v_1 | v_2 | \ldots v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = TT^{-1}\Lambda = \Lambda \end{aligned}$$

Cambio di coordinate

Osservazioni

Le matrici A e $\tilde{A}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico, e quindi gli stessi autovalori. Infatti (applicando il teorema di Binet):

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - \tilde{A}) &= \det(\lambda T^{-1} I T - T^{-1} A T) = \det\Big(T^{-1}(\lambda I - A)T\Big) \\
&= \det(T^{-1})\det(\lambda I - A)\det(T) = \det(\lambda I - A)
\end{aligned}$$

Sistemi lineari tempo continuo

Equazioni differenziali di ordine n con ingresso

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{dy^{(n)}(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dy^{(n-1)}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = \\
&\quad b_{n-1}\frac{du^{(n-1)}(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2}\frac{du^{(n-2)}(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)
\end{aligned}}$$

equivale al sistema lineare di ordine n

$$\left\{\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}\right.$$

Sistemi lineari tempo continuo

Definizione: La *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo continuo (A, B, C, D) è

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

cioè il rapporto fra la trasf. di Laplace $Y(s)$ dell' uscita $y(t)$ e la trasf. di Laplace $U(s)$ dell' ingresso $u(t)$ per condizione iniziale nulla $x_0 = 0$.

Nel caso di eq. differenziali di ordine n: (condizioni iniziali nulle: $y(0)$, $\dot{y}(0)$, . . . , $y^{(n-1)}(0) = 0$)

$$\frac{dy^{(n)}(t)}{dt^2} + a_{n-1}\frac{dy^{(n-1)}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) =$$
$$b_{n-1}\frac{du^{(n-1)}(t)}{dt^{n-2}} + b_{n-2}\frac{du^{(n-2)}(t)}{dt^{n-2}} + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Sistemi lineari tempo continuo

Poli e zeri

- Considera il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad x(0) = 0$$

  e la funzione di trasferimento corrispondente

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \triangleq \frac{N(s)}{D(s)}$$

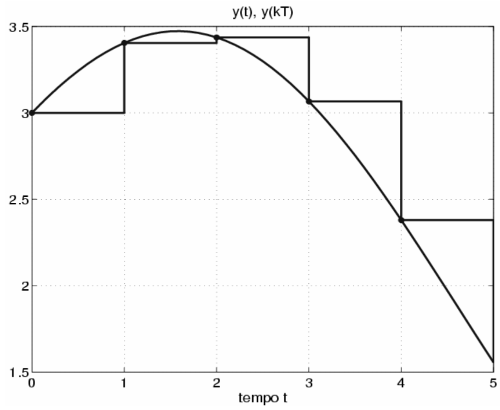
- **poli**=radici di $D(s)$, **zeri**=radici di $N(s)$

- Il denominatore $D(s) = \det(sI - A)$. Quindi i poli di $G(s)$ corrispondono agli autovalori di A.

- La stabilità del sistema si può quindi studiare sia tramite $G(s)$ che tramite A

- Attenzione: alcuni autovalori di A possono non risultare poli di $G(s)$ (cancellazioni)

Sistemi lineari tempo discreto



- Esprimono relazioni fra variabili *campionate* ad intervalli T: $x(kT)$, $u(kT)$, $y(kT)$, $k = 0, 1, \ldots,$
- Il segnale è $x(kT)$ è mantenuto costante durante l' *intervallo di campionamento* $[kT, (k+1)T)$.
- Il segnale può rappresentare il *campionamento* di un segnale *continuo* nel tempo, oppure essere intrinsecamente *discreto* nel tempo.

Rappresentazione spazio di stato

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$u(k) \in \mathbb{R}^m$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$y(k) \in \mathbb{R}^p$ $\quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}$
$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Sistemi lineari tempo discreto

Soluzione:

$$x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(k-1-i)}_{\text{risposta forzata}}$$

se la matrice A è diagonalizzabile:

$$A = T \Lambda T^{-1},\ T = [v_1 | v_2 | \ldots | v_n],\ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^k = T \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{bmatrix} T^{-1}$$

Risposta modale: simile al caso tempo continuo

Rappresentazioni di stato algebr. equivalenti: simile al caso t.continuo

Sistemi lineari tempo discreto

Equazioni alle differenze di ordine n con ingresso

$$\boxed{\begin{aligned} &a_n y(k-n) + a_{n-1} y(k-n+1) + \cdots + a_1 y(k-1) + y(k) = \\ &\quad b_n u(k-n) + \cdots + b_1 u(k-1) + b_0 u(k) \end{aligned}}$$

equivale al sistema lineare di ordine n

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(k+1) & = & \left[\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{array} \right] x(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] u(k) \\ \\ y(k) & = & \left[\begin{array}{cccc} b_n - b_0 a_n & b_{n-1} - b_0 a_{n-1} & \dots & b_1 - b_0 a_1 \end{array} \right] x(k) + b_0 u(k) \end{array} \right.$$

Sistemi lineari tempo discreto

Funzione di trasferimento

Definizione: La *funzione di trasferimento* di un sistema lineare tempo discreto (A, B, C, D) è

$$G(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

cioè il rapporto fra la trasf. zeta $Y(z)$ dell' uscita $y(k)$ e la trasf. zeta $U(z)$ dell' ingresso $u(k)$ per condizione iniziale nulla $x_0 = 0$.

Nel caso di eq. differenziali di ordine n:

$$\begin{aligned} a_n y(k-n) + a_{n-1} y(k-n+1) + \cdots + a_1 y(k-1) \\ + y(k) = b_n u(k-n) + \cdots + b_1 u(k-1) \end{aligned}$$

(condizioni iniziali nulle: $y(k) = u(k) = 0$, $\forall k < 0$)

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{b_n z^{-n} + b_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + b_1 z^{-1}}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \cdots + a_1 z^{-1} + 1} \\ &= \frac{b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \end{aligned}$$

Poli e zeri: simile al caso tempo continuo

Analisi nel discreto - Campionamento esatto

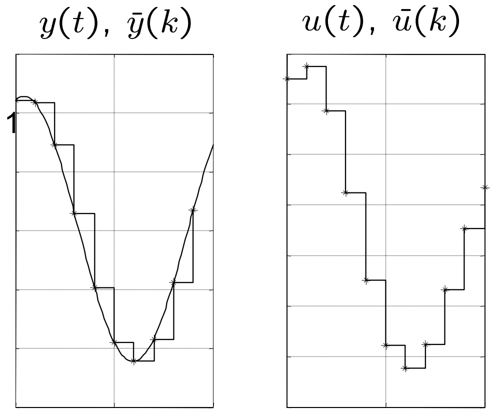
- Consideriamo un sistema a tempo continuo in forma di spazio di stato:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$
$$x(0) = x_0$$

- Vogliamo esprimerne l'evoluzione agli istanti di campionamento $t = 0,\ T,\ 2T,\ \dots,\ kT,\ \dots$, supponendo che l'ingresso $u(t)$ sia costante durante ogni intervallo di campionamento:

$$\boxed{u(t) = \bar{u}(k),\ \ kT \le t < (k+1)T}$$

- Siano $\bar{x}(k) \triangleq x(kT)$ e $\bar{y}(k) \triangleq y(kT)$ i campioni dello stato e dell'uscita, rispettivamente, all' istante di campionamento k-esimo.



Campionamento esatto

- Applichiamo la *formula di Lagrange* per integrare nel tempo il modello lineare del processo:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

con $t = (k+1)T$, $t_0 = kT$, $x(t_0) = x(kT)$.

- Poiché l'ingresso è costante a tratti

$$u(\tau) \equiv \bar{u}(k),\ \ kT \le \tau < (k+1)T$$

si ottiene:

$$x((k+1)T) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau\right)B\bar{u}(k)$$

e quindi

$$\bar{x}(k+1) = e^{AT}\bar{x}(k) + \left(\int_0^T e^{A\tau}d\tau\right)B\bar{u}(k)$$

Campionamento esatto

- Il sistema tempo-discreto a segnali campionati

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) &= \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\bar{u}(k) \\ \bar{y}(k) &= \bar{C}\bar{x}(k) + \bar{D}\bar{u}(k) \end{cases}$$

è legato al sistema tempo continuo dalle relazioni

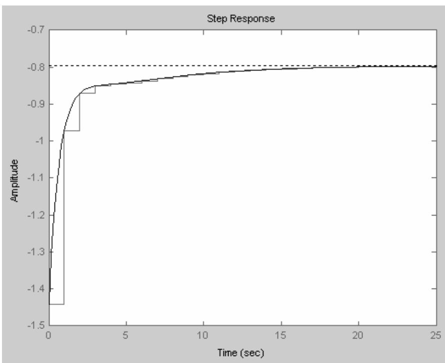
$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{A} \triangleq e^{AT} & \bar{B} \triangleq \int_0^T e^{A\tau} B d\tau \\ \bar{C} \triangleq C & \bar{D} \triangleq D \end{array}}$$

- Nota: in generale, affinchè il sistema a tempo discreto $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ e il sistema a tempo continuo (A, B, C, D) coincidano agli istanti di campionamento $t = kT$ occorre che l'ingresso $u(t)$ sia costante durante l'intervallo di campionamento.

In Matlab:
```
sys=ss(A,B,C,D);
sysd=c2d(sys,T);
[Ab,Bb,Cb,Db]=ssdata(sysd);
```


Esempio in Matlab

`>> sys=rss(4,1,1);`	crea sistema random
`>> [A,B,C,D]=ssdata(sys);`	recupera matrici A, B, C, D
`>> step(sys)`	risposta al gradino
`>> T=1;`	tempo di campionamento
`>> dcgain(sys)`	guadagno in continua
`>> sysd=c2d(sys,T);`	converte a tempo discreto
`>> [Ab,Bb,Cb,Db]=ssdata(sysd);`	recupera matrici $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$
`>> Ab,expm(A*T)`	
`>> hold on;step(sysd)`	



Stabilità dei sistemi lineari

sistema	*tempo continuo* $\dot{x}(t) = Ax(t)$	*tempo discreto* $x(k+1) = Ax(k)$
as. stabile	$Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i = 1,\ldots,n$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$
instabile	$\exists i$ tale che $Re(\lambda_i) > 0$	$\lvert\lambda_i\rvert > 1$
stabile	1) $\forall i,\ldots,n,\ Re(\lambda_i) \leq 0$ 2) $\forall \lambda_i$ tale che $Re(\lambda_i) = 0$ molt(alg.)=molt(geom.)	$\lvert\lambda_i\rvert \leq 1$ $\lvert\lambda_i\rvert = 1$

Linearizzazione

- Considera il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t),u(t)) \\ y(t) &= g(x(t),u(t)) \end{cases} \quad \text{e sia } (x_r,u_r) \text{ un equilibrio: } f(x_r,u_r)=0$$

- Obiettivo: studiare il sistema per piccole variazioni $\Delta u(t) \triangleq u(t) - u_r$e $\Delta x(0) \triangleq x(0) - x_r$.

- L'evoluzione di $\Delta x(t) \triangleq x(t) - x_r$ è data da

$$\begin{aligned} \dot{\Delta x}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{x}_r = f(x(t),u(t)) \\ &= f(\Delta x(t) + x_r, \Delta u(t) + u_r) \\ &\approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_r,u_r)}_{A} \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(x_r,u_r)}_{B} \Delta u(t) \end{aligned}$$

- In maniera simile,

$$\Delta y(t) \approx \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(x_r,u_r)}_{C} \Delta x(t) + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial u}(x_r,u_r)}_{D} \Delta u(t)$$

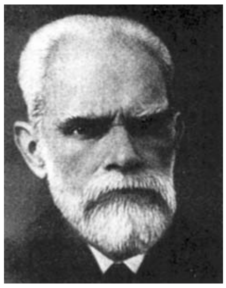
dove $\Delta y(t) \triangleq y(t) - g(x_r,u_r)$ è la deviazione dell'uscita dall'equilibrio.

Stabilità (metodo di linearizzazione)

Considera il sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$, con f derivabile, e sia $x = 0$ un punto di equilibrio ($f(0) = 0$).

Metodo indiretto di Lyapunov. Considera il sistema linearizzato $\dot{x} = Ax$, con $A = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0}$.

- Se $\dot{x} = Ax$ è asintoticamente stabile, allora l'origine $x = 0$ è asintoticamente stabile per il sistema non lineare (localmente).
- Se $\dot{x} = Ax$ è instabile, allora l'origine $x = 0$ è instabile per il sistema non lineare.
- Se A è marginalmente stabile, allora nulla si può dire sulla stabilità dell'origine per il sistema non lineare.



Aleksandr Mikhailovich Lyapunov

(1857-1918)