Prof. Alberto Bemporad 11 giugno 2008

SOLUZIONI DEL COMPITINO DI CONTROLLO DIGITALE

Esercizio 1

1. Il modello del sistema in forma di spazio di stato è dato da

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= (1-\alpha)x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= \alpha x_1(k) + (1-\beta-\gamma)x_2(k) + \delta x_3(k) \\ x_3(k+1) &= \beta x_2(k) + (1-\delta-\alpha)x_3(k) \\ y(k) &= x_2(k) \end{cases}$$

2. La matrice di osservabilità del sistema è

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{17}{100} & \frac{3}{50} \end{bmatrix}$$

Poiché $\det(\Theta) \neq 0$ il sistema è completamente osservabile. È quindi possibile costruire un osservatore deadbeat. Posto $L = [l_1\ l_2\ l_3]^T$ si ottiene:

$$[\lambda I - A + LC] = \begin{bmatrix} \lambda - \frac{2}{5} & l_1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \lambda - \frac{1}{10} + l_2 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} + l_3 & \lambda - \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

da cui il polinomio caratteristico della matrice $A - LC$ risulta essere

$$\lambda^3 + (l_2 - \frac{7}{10})\lambda^2 + (\frac{1}{5}l_3 - \frac{3}{5}l_2 + \frac{3}{5}l_1 - \frac{1}{50})\lambda - \frac{2}{25}l_3 + \frac{7}{125} + \frac{2}{25}l_2 - \frac{3}{25}l_1$$

Eguagliando i coefficienti del polinomio caratteristico a quelli del polinomio desiderato λ^3 si ottiene:

$$l_1 = \frac{8}{15}$$
$$l_2 = \frac{7}{10}$$
$$l_3 = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 2

1. La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 \\ 0 & -b & b(a-1+b-a^2) \\ -1 & a(1-a) & a(1-a+a^2-a^3) \end{bmatrix}$$

(a) Se $\{a = 0, b = 0\}$ si ottiene

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2, perciò il sistema non è completamente raggiungibile. Una base di $\mathrm{Im}(R)$ è data da

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Scegliendo

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene la decomposizione

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

da cui si evince che il sistema non è né controllabile né stabilizzabile.

(b) Se $\{a = 0, b = 1\}$ si ottiene

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 3, perciò il sistema è completamente raggiungibile.

(c) Se $\{a = 1, b = 0\}$ si ottiene

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 1, perciò il sistema non è completamente raggiungibile. Una base di $\mathrm{Im}(R)$ è data da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Scegliendo ancora

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene la decomposizione

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

da cui si evince che il sistema non è né controllabile né stabilizzabile.

(d) Se $\{a = 1, b = 1\}$ si ottiene

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2, perciò il sistema non è completamente raggiungibile. Una base di $\mathrm{Im}(R)$ è data da

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Scegliendo

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si ottiene la decomposizione

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

da cui si evince che il sistema non è né controllabile né stabilizzabile.

2. Sia nel caso (a) che nel caso (c) lo stato $x(k) = [2\ 0\ -2]^T$ è raggiungibile in un passo dall'origine in quanto multiplo del vettore B. Nel caso (a) lo stato $x(k) = [3\ 0\ 0]^T$ è raggiungibile dall'origine in 2 passi perché è contenuto in $\mathrm{Im}([B\ AB])$. Nel caso (c) lo stato $x(k) = [3\ 0\ 0]^T$ non è mai raggiungibile dall'origine perché non appartiene all'immagine della matrice di raggiungibilità R.

Esercizio 3

Il sistema è evidentemente in decomposizione canonica di raggiungibilità

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right], \ B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

perciò il sistema non è completamente raggiungibile. Gli autovalori della parte non raggiungibile sono già posti a 0.5.

Il guadagno del regolatore $u(k) = k_r x_1(k)$ per la parte raggiungibile si ottiene ponendo $\lambda - A_r - B_r k_r = \lambda - 1 - k_r = \lambda - 0.5$ da cui si ricava $k_r = -0.5$. Un possibile guadagno K di regolazione sarà quindi

$$K = [-0.5\ 0\ 0].$$