Prof. Alberto Bemporad 6 giugno 2007

Soluzioni del Compitino di Controllo Digitale

Esercizio 1

1. La dinamica della catena di fornitura è descritta dalle equazioni alle differenze

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= (1-\alpha-\delta)x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= \alpha x_1(k) + (1-\alpha-\delta)x_2(k) + \beta x_3(k) \\ x_3(k+1) &= \alpha x_2(k) + (1-\beta-\gamma)x_3(k) \\ y(k) &= \gamma x_3(k) \end{cases}$$

2. La corrispondente matrice di osservabilità risulta essere

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma\alpha & \gamma(1-\beta-\gamma) \\ \gamma\alpha^2 & \gamma\alpha(2-\alpha-\beta-\gamma-\delta) & \gamma(\alpha\beta + (1-\beta-\gamma)^2) \end{bmatrix}$$

   Essendo $\gamma > 0$, per $\alpha > 0$ il sistema è sicuramente completamente osservabile. Viceversa, per $\alpha = 0$ la matrice di osservabilità risulta essere

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma(1-\beta-\gamma) \\ 0 & 0 & \gamma(1-\beta-\gamma)^2 \end{bmatrix}$$

   che ha rango 1 per ogni valore di $\gamma > 0$. Al fine di operare una decomposizione canonica di osservabilità, scegliamo come base del nucleo di Θ i vettori $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ e come completamento il vettore $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, andando quindi a definire la matrice di trasformazione

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   la cui inversa è $T^{-1} = T$. Nel nuovo sistema di coordinate, le matrici del sistema dinamico diventano

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c|cc} 1-\beta-\gamma & 0 & 0 \\ \hline \beta & 1-\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta \end{array}\right], \quad \tilde{C} = CT = \left[\begin{array}{c|cc} \gamma & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   da cui si ottiene che: (i) il sistema è ricostruibile se e solo se $\delta = 1$, (ii) è sempre rilevabile se e solo se $0 < \delta < 1$, (iii) non è osservabile, né ricostruibile, né rivelabile se $\delta = 0$.

3. Per $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, $\delta = 1$ il sottosistema osservabile diventa

$$A_o = \frac{1}{2},\ C_o = \frac{1}{4}$$

Imponendo $A_o - L_oC_o = 0$ per piazzare l'unico autovalore riallocabile in $z = 0$, si ricava $L_o = 2$, da cui si può definire ad esempio un guadagno di osservatore per il sistema complessivo pari a

$$L = T \begin{bmatrix} L_o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

che, essendo per $\delta = 1$ la parte non osservabile già di per sé nilpotente, garantisce che tutta la matrice $A - LC$ abbia autovalori nulli.

Esercizio 2

Includendo nel sistema dinamico un integratore dell'errore di inseguimento

$$q(k+1) = q(k) + (x_1(k) - r)$$

si ottiene un sistema esteso le cui matrici di transizione dello stato risultano essere

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Essendo il determinante della corrispondente matrice di raggiungibilità

$$\det \begin{vmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

il sistema esteso è completamente raggiungibile e si può pertanto progettare un controllore dead-beat con azione integrale $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$ per il sistema esteso. Imponiamo quindi che il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso

$$\begin{aligned} p_{ac}(\lambda) &= \det \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 - k_1 & \lambda + \frac{1}{2} - k_2 & -k_3 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - (\frac{1}{2} + k_2)\lambda^2 + (k_1 + k_2 - \frac{3}{2})\lambda - k_1 + k_3 + 1 \end{aligned}$$

eguagli il polinomio desiderato λ^3. Invocando il principio di identità dei polinomi si ottiene il sistema lineare

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} + k_2 &= 0 \\ k_1 + k_2 - \tfrac{3}{2} &= 0 \\ k_3 - k_1 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ricavano $k_1 = 2$, $k_2 = -\frac{1}{2}$, $k_3 = 1$. Il regolatore richiesto risulta essere pertanto

$$\begin{cases} q(k+1) = q(k) + x_1(k) - r \\ u(k) = 2x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + q(k) \end{cases}$$

Esercizio 3

1. La matrice di raggiungibilità del sistema risulta essere

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

che, direttamente osservandone le righe, ha evidentemente rango pari a due. Operiamo una decomposizione canonica di raggiungibilità prendendo come base dell'immagine di R i vettori $v_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ (prima colonna di R) e $v_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ (ottenuto sommando a v_1 la seconda colonna di R e dividendo per 4), e come completamento il vettore $v_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. In tal modo si definisce la matrice di cambio di coordinate

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la cui inversa è

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Conseguentemente le matrici del sistema dinamico diventano

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

da cui si evince che la parte non raggiungibile è 0. Pertanto il sistema non è completamente raggiungibile ma è controllabile.

2. Osservando che il sistema è esattamente il duale del sistema al punto precedente, si può immediatamente concludere che non è osservabile ma è ricostruibile.