Prof. Alberto Bemporad 11 luglio 2006

Soluzioni del Compito di Controllo Digitale

Esercizio 1

1. Il modello dinamico del sistema in forma di spazio di stato è il seguente

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1-a_1-b & 0 \\ b & 1-a_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

   Andando a sostituire i valore dei parametri a_1, a_2, β si ottiene la seguente matrice di raggiungibilità $R = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ e di osservabilità $\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{10} \end{bmatrix}$.

2. Per progettare un compensatore dinamico piazzando i poli del controllore in $(0.6, 0.8)$ è necessario eguagliare il polinomio ad anello chiuso del sistema $p_{ac}(\lambda) = det(\lambda I - A - BK) = \lambda^2 + (-k_1 - \frac{1}{2})\lambda + \frac{7}{10}k_1 - \frac{4}{5}k_2 - \frac{7}{50}$, con il polinomio desiderato $p_d(\lambda) = \lambda^2 - \frac{7}{5}\lambda + \frac{12}{25}$.
   Dal sistema lineare ottenuto eguagliando i coefficienti dei due polinomi di ottiene $K = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{80} \end{bmatrix}$.

Esercizio 2

La matrice di osservabilità del sistema è data da

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema è non osservabile, $\dim(\ker(\Theta)) = 2$, e $\ker(\Theta) = \{x \in R^3, x \neq 0 | x_1 = -x_2\}$.

Una possibile scelta della matrice di cambiamento di base è data da

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

essendo $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ una possible base di $\ker(\Theta)$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ un completamento di tale base.

Le matrici in decomposizione canonica di osservabilità sono

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{r|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \quad \tilde{C} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

in cui è evidente che gli autovalori della parte non osservabile sono $(0, \frac{1}{2})$. Esiste pertanto una componente dello stato che è non osservabile ma ricostruibile, e complessivamente il sistema è rivelabile.

Esercizio 3

1. I punti di equilibrio del sistema sono le soluzioni del sistema non lineare

$$\begin{aligned} 0 &= 2x_1(t)x_2(t) + (3 + u(t))x_2(t) \\ 0 &= 2x_2(t) + x_1(t) \end{aligned}$$

   le cui soluzioni diverse dalla soluzione nulla $x_1(t) = x_2(t) = 0$ sono

$$\begin{aligned} x_1^{eq} &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}u \\ x_2^{eq} &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}u \end{aligned}$$

2. Per $u = -2$, il punto di equilibrio risulta $(x_1^{eq}, x_2^{eq}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, e la linearizzazione della dinamica attorno a tali valori è data dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. Il sistema risulta quindi instabile in quanto gli autovalori della matrice A sono $(\frac{1}{2}, 2)$.