UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SIENA

Prof. Alberto Bemporad 13 giugno 2006

SOLUZIONI DEL COMPITINO DI CONTROLLO DIGITALE

Esercizio 1

1. La dinamica del flusso di visitatori è descritta dalle equazioni alle differenze

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= (1-a)x_1(k) + bx_2(k) + d(k) - u(k) \\ x_2(k+1) &= (1-b-c)x_2(k) + ax_1(k) + u(k) \\ y(k) &= dx_1(k) + cx_2(k) \end{cases}$$

dove $a = 0.4$, $b = 0.2$, $c = 0.3$, $d = 0.1$. Posto $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$, il modello in forma di spazio di stato del sistema è il seguente:

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b-c \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} d & c \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

2. Progettiamo un regolatore con azione integrale. A tal scopo, si estende il modello sopra riportato con la sommatoria q dell'uscita y,

$$q(k+1) = q(k) + y(k)$$

ottenendo, per i valori assegnati dei parametri il modello esteso e ignorando il disturbo,

$$\begin{cases} x_e(k) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 1 \end{bmatrix} x_e(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix} x_e(t) \end{cases}$$

dove $x_e = \left[\begin{smallmatrix} x \\ q \end{smallmatrix}\right]$. Il sistema esteso risulta completamente raggiungibile, essendo il determinante della matrice di raggiungibilità del sistema esteso

$$\det R_e = \det \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{5} & -\frac{11}{50} \\ 1 & \frac{1}{10} & -\frac{11}{100} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{19}{100} \end{bmatrix} = -\frac{9}{1000} \neq 0$$

Si può pertanto progettare un regolatore $K = [k_1\ k_2\ k_3]$ per il sistema esteso in maniera tale che il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso

$$\begin{aligned} p_{ac}(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - \frac{3}{5} + k_1 & -\frac{1}{5} + k_2 & k_3 \\ -\frac{2}{5} - k_1 & \lambda - \frac{1}{2} - k_2 & -k_3 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda^3 + (k_1 - k_2 - \frac{21}{10})\lambda^2 + (\frac{33}{25} - \frac{17}{10}k_1 + 2k_2 - \frac{1}{5}k_3)\lambda + \frac{7}{10}k_1 - k_2 + \frac{23}{100}k_3 - \frac{11}{50} \end{aligned}$$

eguagli il polinomio desiderato $(\lambda - 0.7)^3 = \lambda^3 - \frac{21}{10}\lambda^2 + \frac{147}{100}\lambda - \frac{343}{1000}$. Imponendo il principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} k_1 - k_2 - \frac{21}{10} & = & -\frac{21}{10} \\ \frac{33}{25} - \frac{17}{10}k_1 + 2k_2 - \frac{1}{5}k_3 & = & \frac{147}{100} \\ \frac{7}{10}k_1 - k_2 + \frac{23}{100}k_3 - \frac{11}{50} & = & -\frac{343}{1000} \end{array}$$

da cui si ricavano $k_1 = k_2 = \frac{11}{10}$, $k_3 = \frac{9}{10}$. Il regolatore risulta essere pertanto

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q(k+1) & = & q(k) + y(k) - \frac{1}{60}r(k) \\ u(k) & = & \frac{11}{10}(x_1(k) + x_2(k)) + \frac{9}{10}q(k) \end{array} \right.$$

dove il fattore moltiplicativo $\frac{1}{60}$ è stato introdotto per tenere conto della conversione della variabile di riferimento r in numero di persone al minuto.

Esercizio 2

La matrice di osservabilità del sistema $\Theta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ è singolare. L'insieme degli stati indistinguibili dall'origine è dato dal nucleo di Θ $\ker(\Theta) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \Theta x = 0\}$.

Essendo $\text{rank}(\Theta) = 2$, la dimensione del $\ker(\Theta) = 1$. La soluzione del sistema lineare omogeneo $\Theta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ è data da

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 & = & x_2 \\ -x_1 & = & x_3. \end{array} \right.$$

L'insieme degli stati indistinguibili dall'origine è quindi $\ker(\Theta) = L(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix})$[1].

Il sistema non è dunque completamente osservabile. Per determinarne la ricostruibilità o la rivelabilità è necessario portare il sistema in forma canonica di osservabilità. Una possibile matrice di cambiamento di base è $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Le matrici $\tilde{A}$ e $\tilde{C}$ risultanti sono

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \tilde{A} & = & T^{-1}AT & = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ \hline 8 & -5 & 0 \end{array} \right] \\ \tilde{C} & = & CT = & \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \end{array} \right]. \end{array} \right.$$

Il sistema è ricostruibile in quanto l'autovalore della sua parte non osservabile è nullo. È quindi possibile costruire uno stimatore asintotico dello stato piazzando i poli ad anello chiuso in 0.

Si può pertanto progettare uno stimatore $\tilde{L}_o = [l_1 \; l_2]'$ per la parte osservabile dello stato in maniera tale che il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso

$$\begin{array}{rcl} p_{ac}(\lambda) & = & \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 4 + 2l_1 & -1 - l_1 \\ 5 + 2l_2 & \lambda - 1 - l_2 \end{bmatrix} \right) \\ & = & \lambda^2 + (3 + 2l_1 - l_2)\lambda + 1 - 2l_2 + 3l_1 \end{array}$$

[1] Lo spazio lineare generato dal vettore $[1 \; 2 \; -1]'$.

eguagli il polinomio desiderato λ^2. Imponendo il principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} 3+2l_1-l_2 & = & 0 \\ -2l_2+3l_1+1 & = & 0 \end{array}$$

da cui si ricavano $l_1=-5$, $l_2=-7$. Ponendo ad esempio $\tilde{L}=[-5\ \ -7\ 0]'$, si ottiene per il sistema originale lo stimatore $L=T\tilde{L}=[-5\ \ -7\ 0]'$.

Esercizio 3

Il sistema non è completamente raggiungibile in quanto $\text{rank}(R)=\text{rank}(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})=2$. Nel primo caso lo stato finale $x_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\in Im(R)$, quindi è possibile trovare una sequenza di ingressi a minima energia che porti il sistema dallo stato iniziale in x_3.

Dal sistema $x_3=R\begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$ si ottiene che

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_2+2u_1+2u_0 & = & 1 \\ u_2+2u_0 & = & 1. \end{array}\right.$$

e quindi che

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 & = & 0 \\ u_2 & = & 1-2u_0. \end{array}\right.$$

La sequenza di ingressi a minima energia del sistema è data dalla soluzione del problema di minimo (non vincolato)

$$\min_{u(2),u(1),u(0)} \left\{u_2^2+u_1^2+u_0^2\right\}.$$

Andando a sostituire i valori degli ingressi ottenuti precedentemente e cercando il punto di minimo del polinomio così ottenuto si ha che

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \frac{2}{5} \\ u_1 & = & 0 \\ u_2 & = & \frac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Nel secondo caso, lo stato finale $x_3\notin Im(R)$ quindi non è possibile trovare alcuna sequenza di ingressi che porti il sistema dallo stato iniziale x_0 ad $x_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.