Università degli Studi di Siena

Prof. Alberto Bemporad 11 luglio 2005

Soluzioni del Compitino di Controllo Digitale

Esercizio 1

1. L'equazione differenziale che descrive il moto del sistema è

$$m\ddot{y} = u - mg\sin\alpha + F\cos\alpha - \beta\dot{y} - ky$$

Posto $x = \left[\begin{smallmatrix} y \\ \dot{y} \end{smallmatrix}\right]$, il modello in forma di spazio di stato del sistema è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} (u(t) + d(t)) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

dove $d(t) = -mg\sin\alpha + F\cos\alpha$ modella le forze di disturbo costante complessive agenti sull'ingresso.

2. Per ottenere un errore di inseguimento nullo a regime per riferimento costante r anche in presenza di disturbi costanti sull'ingresso, si progetta un regolatore con azione integrale. A tal scopo, si estende il modello sopra riportato con l'integrale q dell'uscita y, $\dot{q} = y$, ottenendo per i valori assegnati dei parametri il modello esteso

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e(t) \end{cases}$$

dove $x_e = \left[\begin{smallmatrix} x \\ q \end{smallmatrix}\right]$. Il sistema esteso risulta completamente raggiungibile, essendo il determinante della matrice di raggiungibilità del sistema esteso

$$\det R_e = \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \neq 0$$

Si può pertanto progettare un regolatore $K = [k_1\ k_2\ k_3]$ per il sistema esteso in maniera tale che il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso

$$\begin{aligned} p_{ac}(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2}k_1 & \lambda + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k_2 & -\frac{1}{2}k_3 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda^3 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k_2)\lambda^2 + (1 - \frac{1}{2}k_1)\lambda - \frac{1}{2}k_3 \end{aligned}$$

eguagli il polinomio desiderato $(\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+5) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 5$. Imponendo il principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

da cui si ricavano $k_1 = -16$, $k_2 = -9$, $k_3 = -10$. Il regolatore risulta essere pertanto

$$\begin{cases} \dot{q} &= y(t) - r(t) \\ u(t) &= -16y - 9\dot{y} - 10q(t) \end{cases}$$

3. Il sistema ad anello chiuso può essere scritto nella forma di spazio di stato

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & -5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-r(t) + \frac{1}{2}d(t)) \\ u(t) &= \begin{bmatrix} -16 & -9 & -10 \end{bmatrix} x_e(t) \end{cases}$$

Per $\alpha = 45°$, $F = 20$, $g = 10$ si ottiene $d = 0$. In condizioni di regime stazionario, $\dot{x}_e = 0$. Ponendo $r = 10$, si ottiene per lo stato di equilibrio x_e il seguente sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & -5 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava $x_e = \left[\begin{smallmatrix} 10 \\ 0 \\ 18 \end{smallmatrix}\right]$ e quindi $u = \begin{bmatrix} -16 & -9 & -10 \end{bmatrix} x_e = 20$.

Alternativamente, si può osservare che, grazie all'azione integrale, in condizione di regime stazionario $y = r$ e quindi dall' equazione differenziale del II ordine si ottiene

$$0 = m\ddot{y} = u - mg\sin\alpha + F\cos\alpha - \beta \cdot 0 - ky \;\rightarrow\; u = kr + mg\sin\alpha - F\cos\alpha$$

da cui si ricava $u = 20$.

Esercizio 2

Le matrici delle equazioni di transizione dello stato sono

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di raggiungibilità del sistema è data da

$$R = \begin{bmatrix} -2 & -10 & -34 \\ -2 & -6 & -18 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix}.$$

Il sistema non è completamente raggiungibile in quanto $\det(R) = 0$. Inoltre si vede che il $\text{rank}(R) = 2$.

Per determinare gli stati raggiungibili si imposta il sistema $x_f = R_k U_k$, dove le matrici R_k ed il vettore U_k cambiano al secondo del numero di passi.

Nel primo caso la soluzione è $U_1 = u_0 = -\frac{1}{2}$. Nel secondo caso

$$U_2 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Il sistema non è completamente raggiungibile, quindi se lo stato x_f è raggiungibile in tre passi lo è anche in due. Quindi il sistema $x_f = RU_3$ ha un grado di libertà in più. Si può pensare di porre

$u_0 = 0$ e risolvere il sistema già precedentemente impostato nel punto precedente (cambiando solo x_f). In questo caso, la soluzione è immediata ed è

$$U_3 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3

1. Il modello Simulink descrive il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x} & = x(6 - 2x - y) \\ \dot{y} & = y(4 - x - y) \end{cases}.$$

   Linearizzando intorno al punto di equilibrio $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ si ottiene il sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$$

   dove $\tilde{x} = x - 2$, $\tilde{y} = y - 2$.

2. Assumendo di misurare solo le prede x, ovvero

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

   i seguenti comandi Matlab effettuano la sintesi richiesta:

```
>> A=[-4 -2; -2 -2];
>> C=[1 0];
>> n=rank(obsv(A,C))            % Verifica che il sistema sia osservabile (n=2)
>> L=place(A', C', [-10 -20])'  % Piazzamento dei poli
```