Prof. Alberto Bemporad 8 giugno 2005

Soluzioni del Compitino di Controllo Digitale

Esercizio 1

1. La dinamica del flusso contabile è descritta dalle equazioni alle differenze

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_1(k) + \gamma x_1(k) - \alpha x_1(k) + \beta x_2(k) + d(k) - u(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \delta x_2(k) - \beta x_2(k) + \alpha x_1(k) \end{cases}$$

dove $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.05$, $\delta = 0.1$. La valorizzazione in denaro complessiva $y(k) = x_1(k) + x_2(k)$. Posto $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$, il modello in forma di spazio di stato del sistema è il seguente:

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1-\alpha+\gamma & \beta \\ \alpha & 1-\beta+\delta \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} (u(k) - d(k)) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

2. Per ottenere un errore di inseguimento nullo a regime per riferimento costante r in presenza del disturbo costante sull'ingresso $-d(k)$ si progetta un regolatore con azione integrale. A tal scopo, si estende il modello sopra riportato con la sommatoria q dell'uscita y,

$$q(k+1) = q(k) + y(k)$$

ottenendo, per i valori assegnati dei parametri il modello esteso e ignorando il disturbo,

$$\begin{cases} x_e(k) &= \begin{bmatrix} \frac{11}{20} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_e(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_e(t) \end{cases}$$

dove $x_e = \left[\begin{smallmatrix} x \\ q \end{smallmatrix}\right]$. Il sistema esteso risulta completamente raggiungibile, essendo il determinante della matrice di raggiungibilità del sistema esteso

$$\det R_e = \det \begin{bmatrix} -1 & -\frac{11}{20} & -\frac{181}{400} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{27}{40} \\ 0 & -1 & -\frac{41}{20} \end{bmatrix} = -\frac{7}{20} \neq 0$$

Si può pertanto progettare un regolatore $K = [k_1\ k_2\ k_3]$ per il sistema esteso in maniera tale che il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso

$$\begin{aligned} p_{ac}(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - \frac{11}{20}k_1 & -\frac{3}{10} + k_2 & k_3 \\ -\frac{1}{2} & \lambda - \frac{4}{2} & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^3 + (k_1 - \frac{47}{20})\lambda^2 + (\frac{41}{25} - \frac{9}{5}k_1 + \frac{1}{2}k_2 + k_3)\lambda - \frac{1}{2}k_2 - \frac{3}{10}k_3 + \frac{4}{5}k_1 - \frac{29}{100} \end{aligned}$$

eguagli il polinomio desiderato $(\lambda - 0.5)^3 = \lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{8}$. Imponendo il principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} k_1 - \frac{47}{20} & = & -\frac{3}{2} \\ \frac{41}{25} - \frac{9}{5}k_1 + \frac{1}{2}k_2 + k_3 & = & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}k_2 - \frac{3}{10}k_3 + \frac{4}{5}k_1 - \frac{29}{100} & = & -\frac{1}{8} \end{array}$$

da cui si ricavano $k_1 = \frac{17}{20}$, $k_2 = \frac{323}{350}$, $k_3 = \frac{5}{28}$. Il regolatore risulta essere pertanto

$$\left\{ \begin{array}{rcl} q(k+1) & = & q(k) + y(k) - r(k) \\ u(k) & = & \frac{17}{20}x_1(k) + \frac{323}{350}x_2(k) + \frac{5}{28}q(k) \end{array} \right.$$

Esercizio 2

La matrice $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a^2+3a+3 \\ 0 & a+1 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ di raggiungibilità del sistema non è a rango pieno in quanto ha una riga nulla, pertanto il sistema non è (completamente) raggiungibile indipendentemente dalla scelta del parametro a.

Essendo il sistema a tempo continuo, non sarà mai controllabile, in quanto gli stati non raggiungibili non possono andare a zero in tempo finito.

Per $a \neq -1$ il rango della matrice R è pari a 2, quindi possiamo dire che (A, B) è in decomposizione canonica di raggiungibilità con parte non raggiungibile pari a $1 - a$. Quindi il sistema è stabilizzabile soltanto per $1 - a < 0$, ovvero per $a > 1$.

Si noti che per $a = -1$ il rango della matrice R è pari a 1 e la coppia (A, B) è ancora in decomposizione canonica di raggiungibilità con parte non raggiungibile pari a $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, che ha entrambi i modi instabili.

Esercizio 3

Lo stato iniziale da cui è stata generata la sequenza di uscite non può essere univocamente ricavato in quanto il sistema non è completamente osservabile ($rank(\Theta) = 2$). È possibile ricavare le solo le prime due componenti dello stato iniziale, ovvero $x_0 = (\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ * \end{smallmatrix}\right])$.
Il sistema però è già in decomposizione canonica di osservabilità e quindi si vede facilmente che non è completamente osservabile ma è ricostruibile in due passi, in quanto la sottomatrice $A_{\bar{o}} = 0$ relativa alla parte non osservabile ha dimensione 1, mentre invece la sottomatrice $A_o = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ ha dimensione 2 (occorrono in genere quindi due misure di uscita per stimare lo stato iniziale)[1].

[1] In generale il numero di passi necessari per ricostruire lo stato corrente $x(k)$ è dato da $\max\{n_o, m_{\bar{o}}\}$, dove n_o è la dimensione della sottomatrice relativa alla parte osservabile del sistema, $n_o = n - \dim \ker \Theta$, mentre $m_{\bar{o}}$ è la molteplicità algebrica dell'autovalore nullo della sottomatrice relativa alla parte non osservabile del sistema, $m_{\bar{o}} \leq \dim \ker \Theta$.