Prof. Alberto Bemporad 4 Giugno 2003

Soluzioni del Compitino di Controllo Digitale

Esercizio 1

1. L'equazione differenziale che descrive il moto del cilindretto e dell'ago è
$$J\ddot{\theta} = T - \beta\dot{\theta} - 2k_M\theta$$
Posto $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$, il modello in forma di spazio di stato del sistema è il seguente:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2k_M}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_I}{J} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

2. Per ottenere un errore di inseguimento nullo a regime per riferimento costante r anche in presenza di disturbi costanti sull'ingresso, si progetta un regolatore con azione integrale. A tal scopo, si estende il modello sopra riportato con l'integrale q dell'uscita y, ottenendo per i valori assegnati dei parametri il modello esteso
$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_e(t) \end{cases}$$
dove $x_e = \left[\begin{smallmatrix} x \\ q \end{smallmatrix}\right]$. Il sistema esteso risulta completamente raggiungibile, essendo il determinante della matrice di raggiungibilità del sistema esteso
$$\det R_e = \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \neq 0$$
Si può pertanto progettare un regolatore $K = [k_1\ k_2\ k_3]$ per il sistema esteso in maniera tale che il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso
$$\begin{aligned} p_{ac}(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2}k_1 & \lambda + 1 - \frac{1}{2}k_2 & -\frac{1}{2}k_3 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda^3 + (1 - \frac{1}{2}k_2)\lambda^2 + (1 - \frac{1}{2}k_1)\lambda - \frac{1}{2}k_3 \end{aligned}$$
eguagli il polinomio desiderato $(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4$. Imponendo il principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema lineare
$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$
da cui si ricavano $k_1 = -10$, $k_2 = -6$, $k_3 = -8$. Il regolatore risulta essere pertanto
$$\begin{cases} \dot{q} &= y(t) - r(t) \\ u(t) &= -10\theta - 6\dot{\theta} - 8q(t) \end{cases}$$

Esercizio 2

- Per $a = -1$, si ha

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

che risulta essere una coppia di matrici in decomposizione canonica di osservabilità, essendo la coppia formata dalle sottomatrici $A_o = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $C_o = [1 \ -4]$ completamente osservabile. La parte non osservabile ha autovalore in -1 per cui il sistema risulta rivelabile.

- Per $a = 0$, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Essendo $\det \Theta = 45$, il sistema risulta completamente osservabile, pertanto tutti gli stati iniziali sono distinguibili dall'origine e in particolare lo sono gli stati iniziali x_1, x_2.

- Per $a = 1$, si ha

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right], \quad C = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

che risulta essere una coppia di matrici in decomposizione canonica di osservabilità. Essendo gli autovalori della parte non raggiungibile $A_{\bar{o}} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ pari a -1 e 1, il sistema non è rivelabile. Essendo la matrice di osservabilità

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\Theta x_1 = \Theta x_2 = [0 \ 0 \ 0]'$, risulta che gli stati iniziali x_1 e x_2 sono entrambi non distinguibili dall'origine.

Esercizio 3

Essendo $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, ogni stato del tipo $\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \\ 2\alpha \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, è raggiungibile in un passo, in particolare per $\alpha = -2$. Essendo le due colonne della matrice di raggiungibilità a due passi

$$[B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

linearmente indipendenti, ogni stato del tipo $\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, è raggiungibile in due passi, in particolare per $\alpha = 3$, $\beta = 1$. Essendo la matrice di raggiungibilità

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

a rango pieno ($\det R = -25$), ogni stato è raggiungibile in tre passi.