Università degli Studi di Siena

Prof. Alberto Bemporad 30 Maggio 2003

Soluzioni del Compitino di Controllo Digitale

Esercizio 1

1. Posto $x(k) = [x_1(k)\ x_2(k)]'$, il modello in forma di spazio di stato del sistema è

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$$

Le matrici di raggiungibilità e osservabilità sono rispettivamente

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 \\ \gamma_2\beta_1 & \gamma_2\alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è completamente raggiungibile e osservabile per ogni $\beta_1 > 0$, non raggiungibile e non osservabile per $\beta_1 = 0$.

2. Data la condizione iniziale $x(2003) = \left[\begin{smallmatrix} 20 \\ 20 \end{smallmatrix}\right]$, l'ingresso $u(2003)$, $u(2004)$ che conduce allo stato finale $x(2005) = \left[\begin{smallmatrix} 40 \\ 30 \end{smallmatrix}\right]$ si ottiene risolvendo il sistema lineare $R \left[\begin{smallmatrix} u(2004) \\ u(2003) \end{smallmatrix}\right] = x(2005) - A^2 x(2003)$ rispetto all'incognita $\left[\begin{smallmatrix} u(2004) \\ u(2003) \end{smallmatrix}\right]$. Per i valori assegnati dei coefficienti, risulta $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, da cui si ricava $u(2003) = 26$, $u(2004) = 16$.

3. La quantità $d(k)$ risulta una variabile di disturbo non misurabile sovrapposta all'ingresso $u(k)$ che rende necessaria l'introduzione di una azione integrale in maniera tale che l'uscita $y(k)$ possa convergere sul valore di riferimento costante $r(k)$. Posto $q(k+1) = q(k) + y(k)$ l'integratore del segnale di uscita, per il sistema esteso risultante si progetta un regolatore $K = [k_1\ k_2\ k_3]$ in maniera tale che il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso

$$\begin{aligned} p_{ac}(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - \alpha_1 & -\beta_2 & 0 \\ -\beta_1 & \lambda - \alpha_2 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^3 - (k_1+2)\lambda^2 + \left(\frac{3}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_2 + \frac{23}{20} \right)\lambda + \frac{1}{2}k_2 - \frac{3}{20}k_3 - \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{20} \end{aligned}$$

eguagli il polinomio desiderato $(\lambda - \frac{1}{2})^3 = \lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{8}$. Imponendo il principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

da cui si ricavano $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = -\frac{7}{10}$, $k_3 = -\frac{5}{6}$. Il regolatore risulta pertanto essere

$$\begin{cases} q(k+1) &= q(k) + (y(k) - r(k)) \\ u(k) &= -[\frac{1}{2}\ \frac{7}{10}]x(k) - \frac{5}{6}q(k) \end{cases}$$

Esercizio 2

Il sistema è in forma di decomposizione canonica di osservabilità, in cui la parte osservabile è data da $A_o = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $C_o = [0\ \ -1]$, essendo $\operatorname{rank}\Theta_o = \operatorname{rank}\left[\begin{smallmatrix} C_o \\ C_o A_o \end{smallmatrix}\right] = 2$, mentre il blocco non osservabile è dato da $A_{\bar{o}} = \left[\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. Il sistema quindi non è osservabile, ma essendo $A_{\bar{o}}$ una matrice asintoticamente stabile con autovalori in -3,-1, il sistema è rivelabile. Il guadagno dello stimatore non è influenzato dalla parte non osservabile del sistema, possiamo quindi concentrarci sulla sintesi di un'osservatore $L_o = [\ell_1\ \ell_2]'$ tale che

$$(s+1)(s+2) = \det(sI - A_o + L_o C_o) = \begin{vmatrix} s-1 & 2 \\ -3 & s+4 \end{vmatrix} = s^2 + (-\ell_2 - 2)s + \ell_2 - 3\ell_1 - 5$$

da cui, eguagliando i polinomi in s, si ricava $L_o = [-4\ \ -5]'$. L'osservatore completo L è un qualsiasi vettore del tipo $L = [-4\ \ -5\ \ell_3\ \ell_4]'$.

Esercizio 3

La matrice di raggiungibilità del sistema

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 1, quindi il sistema non è completamente raggiungibile. Cerchiamo una matrice di trasformazione T che permetta una decomposizione canonica di raggiungibilità

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_r & C_{\bar{r}} \end{bmatrix}.$$

L'immagine della matrice R è lo spazio generato dal vettore $v_1 = [1\ \ -1\ 0]'$. Un completamento di v_1 per ottenere una base di $\mathbb{R}^3$ è ad esempio dato dai vettori $v_2 = [1\ 0\ 0]'$ e $v_3 = [0\ 0\ 1]'$. Posto quindi

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ si ha } T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene la decomposizione canonica di raggiungibilità

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e in particolare $A_r = \frac{1}{2}$, $A_{\bar{r}} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Il sottosistema non raggiungibile ha entrambi gli autovalori in $z = 0$, pertanto la componente non raggiungibile dello stato si posiziona automaticamente sull'origine in al più 2 passi. La componente raggiungibile è di ordine 1, ed è pertanto in grado di raggiungere l'origine in un solo passo mediante la scelta di un opportuno ingresso $u(0)$. In conclusione, il numero minimo di passi richiesto per portare lo stato iniziale $x(0)$ a zero è 2.

[Per quanto visto a lezione, essendo

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} A_r^k & M_k \\ 0 & A_{\bar{r}}^k \end{bmatrix},$$

il problema di controllabilità all'origine dello stato iniziale $x(0) = T[\tilde{x}_r'(0)\ \tilde{x}_{\bar{r}}'(0)]'$ risulta

$$x(k) = T \begin{bmatrix} \tilde{x}_r(k) \\ \tilde{x}_{\bar{r}}(k) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} A_r^k \tilde{x}_r(0) + M_k x_{\bar{r}}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A_r^j B_r u(k-1-j) \\ A_{\bar{r}}^k \tilde{x}_r \end{bmatrix}.$$

La componente non raggiungibile dello stato $A_{\bar{r}}^k \tilde{x}_{\bar{r}}(0)$ si posiziona automaticamente sull'origine in al più 2 passi, mentre la componente raggiungibile $\tilde{x}_r(k)$, di ordine 1, è in grado di raggiungere l'origine in un solo passo mediante una opportuna scelta di $u(0)$ e di permanerci per $u(1) = 0$.]