Università degli Studi di Siena

Prof. Alberto Bemporad 3 Ottobre 2002

Soluzioni del Compito di Controllo Digitale

Esercizio 1

L'equazione di moto della pallina è

$$m\ddot{y} = u - \beta\dot{y} - ky - mg$$

da cui, essendo $d = -mg$ si ha

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + ky = (u + d).$$

In forma di spazio di stato, posto $x = [y \ \ \dot{y} \ \ \int_0^t y]'$, si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} (u+d) \\ y & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x. \end{array} \right.$$

La matrice di raggiungibilità

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} & -\frac{\beta}{m^2} \\ \frac{1}{m} & -\frac{\beta}{m^2} & -\frac{k}{m^2} + \frac{\beta^2}{m^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

ha il determinante pari a $-\frac{1}{m^3}$, e quindi il sistema è completamente raggiungibile per ogni valore di $m > 0$ e $\beta, k \geq 0$.

Per $m = 2$, $\beta = 1$, $k = 2$, posto $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$ il polinomio caratteristico ad anello chiuso $\det(\lambda I - A - BK)$ risulta

$$\lambda^3 + \frac{1}{2}(1 - k_2)\lambda^2 + (1 - \frac{1}{2}k_1)\lambda - \frac{1}{2}k_3$$

che eguagliato al polinomio desiderato $(\lambda + 2)(\lambda + 1 + 2j)(\lambda + 1 - 2j) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 9\lambda + 10$ fornisce

$$k_1 = -16, \quad k_2 = -7, \quad k_3 = -20.$$

Per il principio del modello interno, per ogni valore costante di d (e quindi di m e g) e per ogni valore costante di riferimento r, la presenza dell'azione integrale garantisce la convergenza asintotica di y a r.

Esercizio 2

La matrice di raggiungibilità del sistema risulta

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 + \beta(\beta - 1) \\ 1 & -\alpha & \alpha^2 + (\beta - 1) \\ 0 & \beta - 1 & -\alpha(\beta - 1) \end{bmatrix}$$

e $\det(R) = (\beta - 1)^3$. Segue che R ha rango pieno, e quindi il sistema è *raggiungibile* (e *contrallabile*, essendo a tempo continuo), se e solo se $\beta \neq 1$.
Se $\beta = 1$, allora R risulta

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha^2 \\ 1 & -\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Operando una decomposizione canonica di raggiungibilità con $T = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, si ottiene

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c|cc} -\alpha & 0 & 1 \\ \hline 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad , \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Dato che gli autovalori della parte non raggiungibile sono 0 e $-\alpha$, si conclude che, se $\beta = 1$, il sistema non è mai nemmeno *stabilizzabile*.
Dato che lo stato x non appartiene a $\mathrm{Im}(R)$ se $\beta = 1$, x non risulta *raggiungibile* dall'origine.

<u>Esercizio 3</u>

La matrice di osservabilità del sistema risulta

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e $\mathrm{rank}(\Theta) = 3$. Dunque il sistema è osservabile, ed è sempre possibile ricostruire la condizione iniziale x_0 a partire da n misure dell'uscita, noti gli ingressi applicati. Nel nostro caso, si deve risolvere il sistema $\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \Theta x_0$, da cui segue $x_0 = \Theta^{-1}\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.