Prof. Alberto Bemporad 17 Settembre 2002

Soluzioni del Compito di Controllo Digitale

Esercizio 1

Le equazioni dei due veicoli sono

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_1 &= u - \beta\dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 &= v \end{aligned}$$

da cui, essendo $y = z_2 - z_1$, $\dot{v} = 0$, e $d = -\beta v$, si ha

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} = -(u + d).$$

In forma di spazio di stato, posto $x = [\int_0^t y, y, \dot{y}]'$, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} (u+d) \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

La matrice di raggiungibilità

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{m} \\ 0 & -\frac{1}{m} & \frac{\beta}{m^2} \\ -\frac{1}{m} & \frac{\beta}{m^2} & -\frac{\beta^2}{m^3} \end{bmatrix}$$

ha le colonne linearmente indipendenti e quindi il sistema è completamente raggiungibile per ogni valore di $m > 0$ e $\beta \geq 0$.

Per $m = 1$, $\beta = 0.5$, posto $K = [k_1\ k_2\ k_3]$ il polinomio caratteristico ad anello chiuso $\det(\lambda I - A - BK)$ risulta

$$\lambda^3 + (\frac{1}{2} + k_3)\lambda^2 + k_2\lambda + k_1$$

che eguagliato al polinomio desiderato $(\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$ fornisce

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 2.5.$$

Per il principio del modello interno, per ogni valore costante di d (e quindi di v) e per ogni valore costante di riferimento r, la presenza dell'azione integrale garantisce la convergenza asintotica di y a r.

Esercizio 2

La matrice di osservabilità del sistema risulta

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\alpha & -\alpha & 2 \\ \alpha^2 + 2\beta & \alpha^2 - 2\beta & -2\alpha \end{bmatrix}$$

e $\det(\Theta) = 8\beta$. Segue che Θ ha rango pieno, e quindi il sistema è *osservabile*, se $\beta \neq 0$.
Se $\beta = 0$, allora Θ risulta

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\alpha & -\alpha & 2 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & -2\alpha \end{bmatrix}$$

e $\ker(\Theta) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Operando una decomposizione canonica di osservabilità con $T = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$, si ottiene

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} -\alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -\alpha \end{array}\right] \quad , \quad \tilde{C} = CT = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dato che l'autovalore della parte non osservabile è $-\alpha$, si conclude che, se $\beta = 0$, il sistema è *ricostruibile* se $\alpha = 0$, mentre è *rivelabile* se $0 < |\alpha| < 1$.
Dato che lo stato x_0 appartiene a $\ker(\Theta)$ se $\beta = 0$, x_0 risulta *indistinguibile* dall'origine.

Esercizio 3

Deve risultare $x_f = x(2) = A^2x_0 + Bu(1) + ABu(0) = R\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$, dove R denota la matrice di raggiungibilità del sistema.
Nel caso del sistema *a*) risulta $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$, che ha rango pieno. Dunque si ha $\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = R^{-1}x_f = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$. La soluzione è unica, e coincide quindi con la sequenza di controllo a *minima energia*.
Nel caso del sistema *b*) risulta $R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, che non ha rango pieno. D'altra parte $x_f \notin \text{Im}(R)$, e quindi non esiste alcuna sequenza di controllo che porti lo stato da x_0 a x_f.