Università degli Studi di Siena

Prof. Alberto Bemporad 2 Luglio 2002

Soluzioni del Compito di Controllo Digitale

Esercizio 1

Le equazioni di moto del sistema sono

$$M\ddot{y} = -k(y + u - y_0) + Mg \tag{1}$$

Trascurando l'effetto di y_0 e g, e posto $x(t) = [\int_0^t y(\tau)d\tau,\ y(t),\ \dot{y}(t)]$ si ottiene la forma in spazio di stato

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k}{M} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

La matrice di raggiungibilità risulta

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{M} & 0 \\ -\frac{k}{M} & 0 & \frac{k^2}{M^2} \end{bmatrix}$$

e quindi il sistema è completamente raggiungibile. Posto $K = [k_I\ k_P\ k_D]$, il polinomio caratteristico ad anello chiuso $\det(\lambda I - A - BK)$ risulta

$$\lambda^3 + \frac{1}{10}\lambda^2 k_D + \frac{1}{10}(1 + k_P)\lambda + \frac{1}{10}k_I$$

che eguagliato al polinomio desiderato $(\lambda + \frac{1}{2})^3 = \lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8}$ fornisce

$$k_I = \frac{5}{4},\quad k_P = \frac{13}{2},\quad k_D = 15$$

La legge di controllo PID risulta pertanto

$$u(t) = 15(y(t) - r(t)) + \frac{5}{4}\int_0^t (y(\tau) - r(\tau))d\tau + \frac{13}{2}\dot{y}(t)$$

Consideriamo adesso l'effetto di y_0 e g. Posto $d = -y_0 - \frac{M}{k}g$, le equazioni di moto risultano

$$M\ddot{y} = -ky - k(u + d) \tag{2}$$

Per il principio del modello interno, per ogni valore costante di y_0 e g e per ogni valore costante di set-point r, la presenza dell'azione integrale garantisce la reiezione del disturbo d sull'ingresso e la convergenza asintotica di y al riferimento r.

Esercizio 2

Il sistema è già in decomposizione canonica di osservabilità. La parte osservabile risulta essere

$$A_o = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad C_o = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La sottomatrice non osservabile è

$$A_{\bar{o}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è quindi osservabile, ma è ricostruibile e stabilizzabile. Per progettare un osservatore nilpotente per la parte osservabile, poniamo $L_o = [\ell_1 \ \ell_2]$ e imponiamo

$$\det(\lambda I - A_o + L_o C_o) = \lambda^2$$

da cui $\ell_1 = -\frac{5}{2}$, $\ell_2 = -\frac{1}{2}$. Un osservatore nilpotente è dato ad esempio da

$$\left\{ \hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(y(k) - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(k)\right) \right.$$

Esercizio 3

Il modello usato per la progettazione viene diviso nella sua parte invertibile

$$\tilde{G}_-(s) = \frac{2 + 0.2s}{s+1}$$

e non invertibile

$$\tilde{G}_+(s) = e^{-10s}$$

dove $G_+(0) = 1$. Il controllore risulta pertanto composto dai blocchi

$$G_c(s) = \frac{s+1}{(2+0.2s)(1+0.1s)}$$

e $\tilde{G}(s)$, disposti come in figura.