Prof. Alberto Bemporad 5 Giugno 2002

SOLUZIONI DEL COMPITINO DI CONTROLLO DIGITALE

Esercizio 1

1. Le matrici di raggiungibilità e osservabilità sono rispettivamente

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_1^2 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_1(\beta_1+\beta_2) \\ 0 & 0 & \alpha_2\alpha_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_3\alpha_2 & \alpha_3\beta_3 \\ \alpha_3\alpha_2\alpha_1 & \alpha_3\alpha_2(\beta_2+\beta_3) & \alpha_3\beta_3^2 \end{bmatrix}$$

   ed hanno entrambe righe linearmente indipendenti per ogni valore di $\alpha_i, \beta_i > 0$. Pertanto il sistema è completamente raggiungibile e osservabile.

2. Per $\alpha_2 = 0$ il sistema non è completamente raggiungibile, essendo

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_1^2 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_1(\beta_1+\beta_2) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   e quindi $\text{rank}(R) = 2$.

3. Per $\alpha_2 = 0$ il sistema non è osservabile, essendo

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3\beta_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3\beta_3^2 \end{bmatrix}.$$

   Una base del $\ker(\Theta)$ è $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, quindi ogni combinazione lineare della prima e seconda componente dello stato x non è osservabile dall'uscita y, in particolare qualsiasi vettore del tipo $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ x_2(0) \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. Il numero di matricole $u(0) = 200$, $u(1) = 120$, $u(2) = 118$ lo si può ricavare risolvendo il sistema di equazioni lineari algebriche $x(3) = RU + A^3x(0)$ rispetto al vettore incognito $U = \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$, dove $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x(3) = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$ e

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.04 \\ 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2

La matrice A è triangolare inferiore, pertanto gli autovalori coincidono con gli elementi della diagonale: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Il sistema è instabile ad anello aperto.

La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

e $\text{rank}(R) = 1$, essendo le colonne di R linearmente dipendenti. Il sistema non è completamente raggiungibile. Decomponiamo il sistema nella sua parte raggiungibile e non raggiungibile. Una base dello spazio raggiungibile $\mathrm{Im}(R)$ è $\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]$. Per ottenere una base di $\mathbb{R}^2$ completiamo $\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]$ con il vettore $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ ed effettuiamo un cambio di coordinate nella nuova base:

$$\begin{aligned}
T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\tilde{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix} \\
\tilde{B} &= T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Il sistema è stabilizzabile, essendo la parte non raggiungibile asintoticamente stabile con autovalore $\lambda = -1$. Progettiamo un regolatore K_r per la parte raggiungibile in modo che anche il secondo autovalore venga posizionato in $\lambda = -1$: $A_r + B_r K_r = -1$, da cui $K_r = -4$. Nel sistema di coordinate di partenza, qualsiasi regolatore avente la forma

$$K = \begin{bmatrix} K_r & K_{\bar{r}} \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} K_{\bar{r}} & 4 + K_{\bar{r}} \end{bmatrix}$$

è tale che i poli ad anello chiuso sono entrambi in -1.

Esercizio 3

Il modello del servomeccanismo è

$$\begin{aligned}
&u - Ri - e = 0 \\
&e = k\omega \\
&T = ki \\
&J\dot{\omega} = T - \beta\omega
\end{aligned}$$

che scritto in forma di stato diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -(\frac{k^2}{R} + \beta)\frac{1}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{JR} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

Il sistema è già in forma canonica di raggiungibilità, è quindi completamente raggiungibile e il guadagno di retroazione $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ può essere calcolato come segue:

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k_1}{2} & \frac{k_2}{2} - 1 \end{bmatrix}$$

da cui, eguagliando i coefficienti della seconda riga ai coefficienti del polinomio desiderato $(\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ cambiati di segno, si ottiene $K = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix}$. Per quanto riguarda la sintesi dell'osservatore, innanzitutto notiamo che il sistema è completamente osservabile ($\Theta = \left[\begin{smallmatrix} C \\ CA \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$). Ponendo $L = \left[\begin{smallmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{smallmatrix}\right]$, si ha $A - LC = \left[\begin{smallmatrix} \ell_1 & 1 \\ \ell_2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, il cui polinomio caratteristico è $p(\lambda) \triangleq \lambda^2 + (1 + \ell_1)\lambda + (\ell_1 + \ell_2)$. Eguagliando $p(\lambda)$ al polinomio desiderato $(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$, si ottiene $L = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$. Il compensatore dinamico risulta pertanto

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + BK - LC)\hat{x} + Ly \\ u = K\hat{x} \end{cases} = \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} y \\ u = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

La funzione di trasferimento da y a u risulta quindi

$$C(s) = K(sI - A - BK + LC)^{-1}L = -\frac{24(s+1)}{s^2 + 7s + 16}$$