Università degli Studi di Siena

Prof. Alberto Bemporad — 5 Giugno 2002

Compitino di Controllo Digitale

Esercizio 1

Si consideri il seguente modello di dinamica di popolazione studentesca in un corso di laurea di primo livello

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= \beta_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= \alpha_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k) \\ x_3(k+1) &= \alpha_2 x_2(k) + \beta_3 x_3(k) \\ y(k) &= \alpha_3 x_3(k) \end{cases}$$

dove k indica l'anno accademico, $x_i(k)$ il numero di studenti iscritti all' i-esimo anno di corso, $i = 1, 2, 3$, $u(k)$ il numero di matricole, $y(k)$ il numero di laureati, α_i il tasso di promossi nell'anno di corso i-esimo, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, e β_i il tasso di ripetenti nell'anno di corso i-esimo, $0 \leq \beta_i \leq 1$ (con $1 - \alpha_i - \beta_i \geq 0$).

1. Supponendo che $\alpha_i, \beta_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, determinare se il sistema è completamente raggiungibile e osservabile.
2. Determinare la completa raggiungibilità del sistema qualora non vengano mai promossi studenti al II anno ($\alpha_2 = 0$)
3. Ancora nell'ipotesi $\alpha_2 = 0$, dimostrare che il numero di studenti del primo e del secondo anno non sono quantità osservabili dall'uscita y.
4. Supponendo che $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.5$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.2$ e che nell'anno $k = 0$ il corso non abbia alcun iscritto, determinare il numero di matricole che si devono iscrivere negli anni $k = 0, 1, 2$ affinché nell'anno $k = 3$ ci siano 150 studenti iscritti al primo anno, 100 al secondo, 50 al terzo.

Esercizio 2

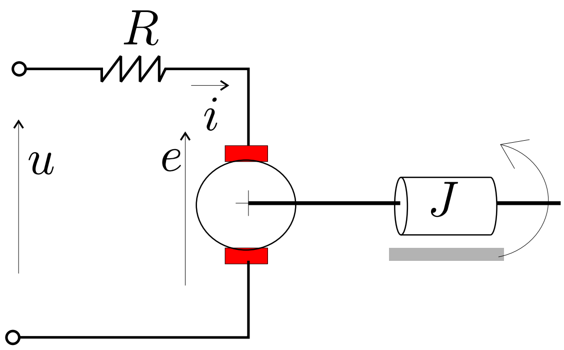
Discutere la stabilità del sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

e progettare un regolatore $u = Kx$ in modo che il sistema ad anello chiuso abbia autovalori coincidenti a parte reale negativa.

Esercizio 3

Si consideri il servomeccanismo schematicamente raffigurato qui sotto:



dove J è il momento di inerzia complessivo (carico + rotore del motore), R la resistenza del circuito di eccitazione, k è la costante del motore, β il coefficiente di attrito viscoso, u la tensione di eccitazione, e la forza controelettromotrice, T la coppia prodotta dal motore e θ la posizione del carico.

Posto $x = \left[\begin{smallmatrix}\theta\\ \omega\end{smallmatrix}\right]$, dove $\omega = \dot{\theta}$ è la velocità angolare del carico, determinare le equazioni di stato del sistema, prendendo come uscita la posizione angolare θ.

Posti $J = 1$, $R = 2$, $k = 1$, $\beta = 0.5$ (unità sistema internazionale), progettare un compensatore dinamico che regoli la posizione del carico a zero, in modo che i poli del controllore siano in -1, -2, e i poli dell'osservatore in -2, -3. Descrivere il compensatore risultante come funzione di trasferimento dall'uscita θ all'ingresso u.