

Università degli Studi di Firenze

Facoltà di Ingegneria

Tesi di Laurea in Ingegneria Elettronica

Controllo predittivo in presenza di vincoli e gestione in linea del riferimento

Candidato:

Alberto Bemporad

Relatori:

Prof. Ing. E. Mosca

Prof. Ing. L. Chisci

Prof. Ing. A. Tesi

anno accademico 1992-93

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il Prof. E. Mosca per avermi seguito costantemente durante l'intero lavoro di tesi osservandone con attenzione gli sviluppi e stimolandomi con problematiche sempre nuove. Ringrazio inoltre il Prof. A. Tesi e il Prof. L. Chisci per i preziosi suggerimenti sia in fase di studio che di stesura.

Indice

Prefazione

In questo lavoro di tesi sono stati ideati e studiati alcuni algoritmi di controllo predittivo in grado di regolare un generico impianto rispettando dei limiti imposti dalle specifiche di progetto sulle variabili di sistema. Vengono considerati due approcci. Il primo prevede la risoluzione di un problema di minimizzazione vincolata effettuata ad ogni passo secondo la metodologia "ad orizzonte recessivo". Il secondo invece, sfruttando un regolatore preventivamente progettato per l'impianto, gestisce in linea il riferimento plasmandolo in maniera tale che i vincoli risultino soddisfatti. Sebbene entrambi i tipi di filosofia siano applicabili a sistemi non lineari tempo-varianti a più ingressi e più uscite, la maggior parte dei risultati teorici e simulativi verrà sviluppata per impianti tempo-invarianti descritti da equazioni alle differenze.

Il lavoro inizierà con un capitolo introduttivo in cui verranno spiegati i concetti di controllo in retroazione a due gradi di libertà, controllo predittivo, gestione del riferimento. Seguirà nel capitolo 2 una dimostrazione di come gli algoritmi di controllo predittivo a orizzonte recessivo basati sulla minimizzazione di un funzionale di costo vincolato riescano a stabilizzare un generico impianto descritto da equazioni alle differenze e a soddisfare

dei vincoli imposti su variabili di sistema. Nel capitolo 3 analizzeremo gli effetti di un riferimento dipendente dal valore attuale dell'uscita dell'impianto. In particolare affronteremo lo studio per il controllo lineare quadratico, dimostrando come il sistema complessivo continui a rimanere stabile e come, manipolando opportunamente il riferimento, si riesca a variare la dinamica e l'intensità delle grandezze dell'impianto regolato. I risultati ottenuti saranno basilari per lo sviluppo dei capitoli successivi. Il capitolo 4 inizierà ad affrontare le problematiche inerenti ad una gestione predittiva del riferimento, cioè operata in linea. Analizzeremo diversi algoritmi di controllo sviluppandoli in maniera critica e nell'ordine cronologico con il quale sono stati ideati durante il lavoro di tesi, corredando l'esposizione con risultati simulativi. Nel capitolo 5 descriveremo dettagliatamente la tecnica di gestione in linea del riferimento che ha dato i migliori risultati, ponendo fra l'altro in evidenza come questi, pur non richiedendo alcuna procedura iterativa di minimizzazione, consentano di ottenere prestazioni prossime a quelle ottenibili mediante algoritmi di controllo predittivo del tipo descritto nel capitolo 2 e risolti mediante programmazione matematica. Infine nel capitolo 6 esamineremo alcuni aspetti di tipo implementativo.

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Il controllo in retroazione

Con il termine *sistema fisico* o *processo* intendiamo genericamente un insieme di grandezze interagenti dinamicamente descrivibile tramite un *modello matematico* astratto detto anche *sistema dinamico*. Ad esempio possiamo riferirci ad un braccio meccanico (in cui le grandezze principali sono coppie, velocità, posizioni), ad una trasformazione chimica (concentrazioni, temperature), ad un problema di inquinamento termico nei fiumi (portate, temperature, potenze). Il modello matematico è il complesso delle equazioni (integro-differenziali, alle derivate parziali, alle differenze, ...) che legano le grandezze in gioco e fornisce uno strumento di *predizione*, cioè capace di predire con un certo grado di approssimazione quale sarà l'evoluzione del processo una volta assegnate le condizioni iniziali. Talvolta intenderemo con *impianto* il modello stesso, assumendo tacitamente che esso sia il sistema fisico vero e proprio.

In un sistema distinguiamo grandezze

- di *ingresso* che rappresentano le variabili manipolabili tramite le quali si danno dei comandi (in inglese *controls*) all'impianto ; ad esempio le tensioni elettriche ai capi dei motori che muovono le articolazioni meccaniche di un robot, oppure la potenza dissipata da una centrale termoelettrica in un canale
- di *uscita*, cioè le variabili che desideriamo stabilizzare o in generale a cui vogliamo far compiere una certa evoluzione; ad esempio la posizione istantanea della parte terminale del manipolatore meccanico a cui richiediamo di descrivere un arco di cerchio, oppure la temperatura del

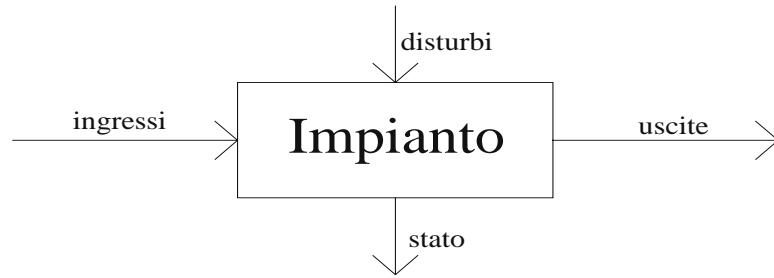


Figura 1.1: Rappresentazione di un generico impianto

canale ad una certa distanza dallo scarico termico

- di *stato* che consentono di predire l'evoluzione futura dell'intero sistema noti gli ingressi attuali e futuri
- di *disturbo*, cioè grandezze non manipolabili (e in genere non misurabili) che interagiscono con le variabili del processo.

In figura (1.1) riportiamo la rappresentazione grafica con la quale indicheremo nel seguito un impianto.

Con il concetto di *controllo automatico* o semplicemente *controllo* intendiamo l'applicazione all'impianto di un dispositivo (detto *controllore*, *regolatore* o *compensatore*) in grado di generare automaticamente gli ingressi al fine di far evolvere nel tempo le uscite in maniera più fedele possibile a delle traiettorie preassegnate dette *riferimenti*. In generale l'ingresso generato viene fatto dipendere dal valore dell'uscita (o dello stato). Si compie così una "azione all'indietro". Indichiamo con il termine *retroazione* questo meccanismo di produzione della variabile di controllo sulla base della grandezza che ci interessa regolare e del riferimento da inseguire. Un esempio molto

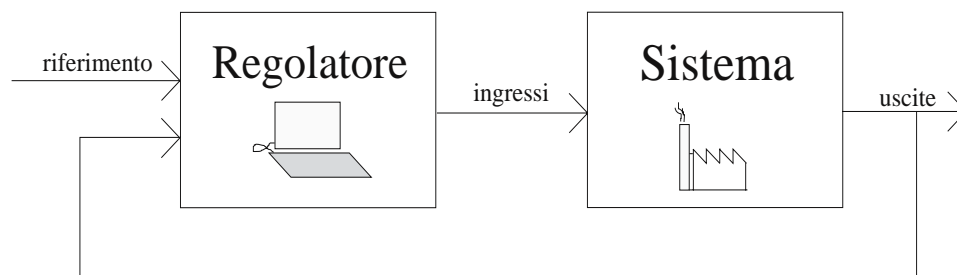


Figura 1.2: Sistema di controllo

elementare di regolazione automatica in retroazione è l'inserzione di una molla di ritorno per la richiusura automatica di un portone: la molla esercita una forza (l'ingresso) proporzionale alla posizione angolare (l'uscita). Indichiamo poi con *inseguimento* (o *asservimento*, *tracking*, *control*) l'obbiettivo di ridurre a zero l'errore esistente fra l'uscita del sistema e il riferimento e per *regolazione* il volere annullare l'uscita. È banale osservare che un problema di inseguimento degenera in uno di regolazione qualora il riferimento sia costantemente nullo. Intendiamo inoltre con *sistema di controllo* o *di regolazione* il complesso costituito dall'impianto e dal controllore, come rappresentato in figura (1.2); diremo inoltre che il controllore è *stabilizzante* qualora il sistema, lasciato in evoluzione libera, si porti in una condizione di riposo. Banalizzando possiamo dire che l'introduzione di un controllore per la regolazione di un processo equivale all'inserzione di "molle di ritorno" artificiali (più o meno



Figura 1.3: Controllore ad 1-GDL



Figura 1.4: Controllore a 2-GDL

”intelligenti”), che saranno di tipo idraulico, termodinamico, meccanico, ecc., a seconda dei casi.

Distinguiamo due tipi di controllore:

1. *ad un grado di libertà (1 GDL)* qualora l’ingresso sia generato in funzione del solo *errore di inseguimento*, cioè della differenza fra l’uscita e il riferimento, come rappresentato in figura (1.3)
2. *a due gradi di libertà (2 GDL)* qualora l’uscita e il riferimento contribuiscano in modo indipendente a tale generazione, come riportato in figura (1.4)

Ad esempio la molla di ritorno non è altro che un controllore ad un grado di libertà, in quanto esercita una forza proporzionale all'errore di inseguimento, dove il riferimento in questo caso è la posizione di riposo.

Per implementare fisicamente la legge di controllo normalmente si ricorre ad una trasformazione elettrica (analogica o digitale) delle uscite tramite dei trasduttori (ed eventualmente convertitori A/D), ad una elaborazione (ad esempio in forma numerica tramite un calcolatore) e ad una nuova trasformazione in grandezze di ingresso (tramite attuatori, eventualmente preceduti da un convertitore D/A) che vanno poi ad agire effettivamente sull'impianto.

Nel caso (ormai comune) in cui il controllo sia di tipo digitale, l'ingresso viene calcolato ad intervalli di tempo prefissati, dove l'ampiezza dell'intervallo, detta *tempo di campionamento*, è legata alla velocità di risposta della dinamica del processo. In questo senso ci riferiremo allo scorrere del tempo in termini di *passi di campionamento* o semplicemente *passi*.

1.2 Il controllo predittivo

Possiamo genericamente dire che un controllore è di tipo *predittivo* se la scelta dell'azione di controllo ad ogni istante è basata su una predizione dell'evoluzione che il sistema avrebbe se tale azione venisse applicata. Per effettuare tale predizione occorre

- un modello dinamico dell'impianto
- la conoscenza dello stato attuale

- la conoscenza di un certo numero di campioni futuri del riferimento

L'estensione temporale sulla quale la predizione viene effettuata viene detta *orizzonte di predizione*.

In letteratura si parla di *Controllo Predittivo Multipasso* o anche *Controllo Predittivo a Lungo Orizzonte*. Si parla inoltre di *Controllo ad Orizzonte Recessivo* (RHC, *Receding Horizon Control*) quando l'ingresso corrente $u(t)$ che deve essere dato al sistema al passo t viene ottenuto determinando su un orizzonte di predizione di N passi la sequenza di ingressi $[\hat{u}(t), \hat{u}(t + 1), \dots, \hat{u}(t + N - 1)]$ minimizzante un assegnato funzionale di costo J quadratico, eventualmente in presenza di vincoli, e prendendo $u(t) = \hat{u}(t)$; l'intera procedura di minimizzazione viene poi ripetuta al passo $t + 1$ per scegliere $u(t + 1)$. Pertanto, ad ogni intervallo di tempo, viene scelto come ingresso il primo di una sequenza ottima i cui rimanenti $N - 1$ elementi vengono semplicemente scartati¹. Osserviamo che l'ingresso applicato sarebbe veramente ottimale solo se nei successivi $N - 1$ passi l'impianto venisse alimentato con i rimanenti elementi della sequenza. Poiché questo non viene fatto la tecnica RHC non può essere definita di tipo "ottimo" rispetto al costo J . Il controllo RHC a 2 gradi di libertà (2-GDL) può essere considerato dunque un controllo di tipo predittivo.

¹Volendo fare una analogia, un controllore predittivo ad orizzonte recessivo si comporta come un bravo giocatore di scacchi. Questi, infatti, ad ogni turno elabora mentalmente un piano strategico comprendente un certo numero di mosse, "prevedendo" quella che potrebbe essere l'evoluzione della partita. Di fatto poi esegue soltanto la prima di tali mosse. Inoltre al turno successivo, osservata la risposta dell'avversario, ripete ex-novo tutta l'operazione di previsione.

Anche il tradizionale controllo LQ (Lineare Quadratico) può essere visto come controllo ad orizzonte recessivo, e quindi predittivo, in cui $N \rightarrow \infty$.

Mediante un controllore di tipo predittivo è possibile imporre che le variabili di sistema soddisfino determinati vincoli. Questo obiettivo può essere raggiunto imponendo tali vincoli al momento di minimizzare il funzionale J . Nel capitolo 2 affronteremo uno studio in tale direzione. Nel prossimo paragrafo vedremo come tale obiettivo possa essere conseguito in maniera più semplice gestendo opportunamente il riferimento dato al controllore.

1.2.1 Note bibliografiche

Agli inizi degli anni '70 venne proposto negli articoli [?]-[?] un semplice metodo per stabilizzare impianti lineari tempo-invarianti che in [?] fu adottato usando il concetto di controllo ad orizzonte recessivo, che venne ripreso successivamente anche in [?]. In [?], [?] e [?] furono trattati metodi RHR non lineari volti a velocizzare la risposta in presenza di elevati errori di regolazione per impianti lineari tempo-invarianti mediante retroazione dallo stato. Successivamente in [?], [?], [?], e [?] sono state riportate delle estensioni del controllo RHR per la stabilizzazione di sistemi non lineari. I controlli SIORHR e SIORHC vennero introdotti in [?], [?] e, indipendentemente, in [?].

Il concetto di controllo predittivo apparve per la prima volta in [?] e in [?]. Successivamente in [?] e in [?] furono considerati degli approcci dal punto di vista del controllo di processo industriale. Confronta anche il *survey* [?]. Ulteriori riferimenti possono essere ritrovati in [?], [?], [?], [?], [?], [?], e [?].

1.3 La gestione del riferimento

Consideriamo un generico sistema costituito da un impianto (il sistema fisico da regolare, inclusi attuatori e trasduttori) regolato da un controllore a 2-GDL predittivo stabilizzante. Indicheremo con *legge di controllo primaria* tale regolazione. Essa, essendo predittiva, al passo t fa uso di una certa porzione del futuro del riferimento $\{r(t+i)\}_{i=0}^N$ che diamo come ingresso all'anello di regolazione. Sia inoltre $y(t)$ l'uscita che desideriamo controllare e $v(t)$ una variabile (del processo oppure artificiale) sulla quale vogliamo porre dei vincoli.

Nelle applicazioni di controllo tradizionali il riferimento $r(t)$ designa la traiettoria che l'uscita dovrebbe inseguire, che invece indicheremo qui con $w(t)$. Supponiamo allora che $r(t)$ sia distinto da $w(t)$. Ad esempio possiamo immaginare che $r(t)$ sia una versione filtrata di $w(t)$ oppure che $r(t)$ raccordi in maniera liscia il valore attuale dell'uscita con la traiettoria $w(t)$. In figura (1.5) riportiamo una descrizione dello schema di controllo sotto esame, avendo indicato con $r(t+i|t)$ ² il riferimento che il controllore a 2-GDL riceve al passo t . Imponiamo che la forma del riferimento $\{r(t+i)\}_{i=0}^{\infty}$ dipenda da un parametro λ variabile fra 0 e 1 in maniera tale che

- Per $\lambda \rightarrow 1$ si tenda a mantenere l'uscita al valore corrente $y(t)$, inibendo quindi eventuali manovre dettate da variazioni eccessivamente brusche di $w(t)$
- Per $\lambda \rightarrow 0$ $r(t+i)$ tenda a coincidere con la traiettoria $w(t+i)$ ovvero con una sua approssimazione

Nei capitoli successivi considereremo due approcci alla gestione del

²con il simbolo ' $|t$ ' intendiamo "sulla base di ciò che è noto al tempo t "

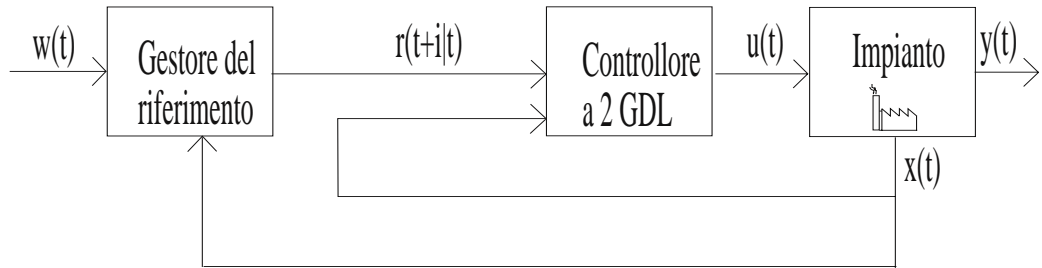


Figura 1.5: Regolazione con gestione del riferimento

riferimento: una *fuori linea* e *non predittiva* ed una *viceversa in linea* e *predittiva*. Descriveremo brevemente tali approcci nei paragrafi che seguono. Ulteriori metodologie possono essere ritrovate in [?] e in [?].

1.3.1 Gestione predittiva del riferimento

Consideriamo un sistema regolato da un controllore di tipo predittivo, il quale quindi, ad un generico passo t , richiede la conoscenza di una porzione del futuro del riferimento $r(t+i)$. L'idea che nasce è la seguente: perché non costruire $r(t+i)$ con la filosofia del controllo predittivo? Ricordiamo che un controllore di tipo predittivo sceglie l'ingresso $u(t)$ facendo una *predizione* su quella che sarà la evoluzione del sistema per un numero N di passi nel futuro. Poiché per fare tale predizione è necessario conoscere anche quali saranno gli ingressi futuri, di fatto il controllore calcola una sequenza $u_{[t,t+N)}$. Facciamo una operazione analoga per $r(t+i)$ che in sostanza è l' *ingresso* del sistema regolato. Decidiamo di scegliere ad ogni istante t una intera sequenza $\{r(t+i|t)\}_{i=0}^{\infty}$ con la quale venga predetta una evoluzione *ammissibile* del sistema, dove con "ammissibile"

intendiamo che la variabile v rispetta i vincoli. Indichiamo schematicamente tale scelta in figura (1.6). Ovviamente in tale scelta non dobbiamo perdere di vista il fatto che l'uscita y deve, qualora ciò sia possibile, inseguire la traiettoria w .

Ad ogni passo t viene allora scelto un valore $\lambda(t)$ in maniera tale che il corrispondente riferimento $r(\cdot|t, \lambda(t)) := \{r(t+i|t, \lambda(t))\}_{i=0}^{\infty}$ provocherebbe, secondo la predizione, una evoluzione ammissibile dell'anello chiuso. Di fatto l'evoluzione predetta in generale coincide con quella effettiva solo per quanto riguarda il primo istante $t+1$; infatti al passo successivo l'intera sequenza $r(\cdot|t+1, \lambda(t+1))$ verrà sintetizzata ex-novo e quindi differirà quasi certamente da quella calcolata al passo precedente. Che garanzie ci sono che sia sempre possibile determinare ad ogni passo un $\lambda(t)$ ammissibile e quindi che si riesca a non violare i vincoli? Dipende da come si sceglie la struttura della sequenza $r(t+i)$ e da quanto stringenti essi sono. Nei capitoli 4 e 5 descriveremo le diverse metodologie di scelta del riferimento che abbiamo sperimentato. Anticipiamo subito che la tecnica che ha dato maggiori garanzie di rispetto dei vincoli è basata sulla seguente idea. Supponiamo di avere trovato all'istante $t-1$ una sequenza $r(\cdot|t-1)$ tale che per M passi futuri i vincoli siano soddisfatti. Supponiamo di essere in una situazione ideale in cui il modello che fa le predizioni collimi esattamente con l'impianto fisico che genera i dati e che non ci sia alcun tipo di disturbo. Stabiliamo allora di porre, nel caso che nessun valore di $\lambda(t)$ sia ammissibile, $r(t+i|t) \equiv r(t+i|t-1, \lambda(t-1))$. Con questa scelta si ha la garanzia che almeno fino all'istante $t+M-1$ i vincoli non saranno violati. Nel capitolo 5 [pag. 138] mostreremo che scegliendo opportunamente un M finito di fatto il rispetto dei vincoli è assicurato per sempre. Qualora la scelta di $r(t+i)$ dipenda dalle variabili dell'impianto (ad

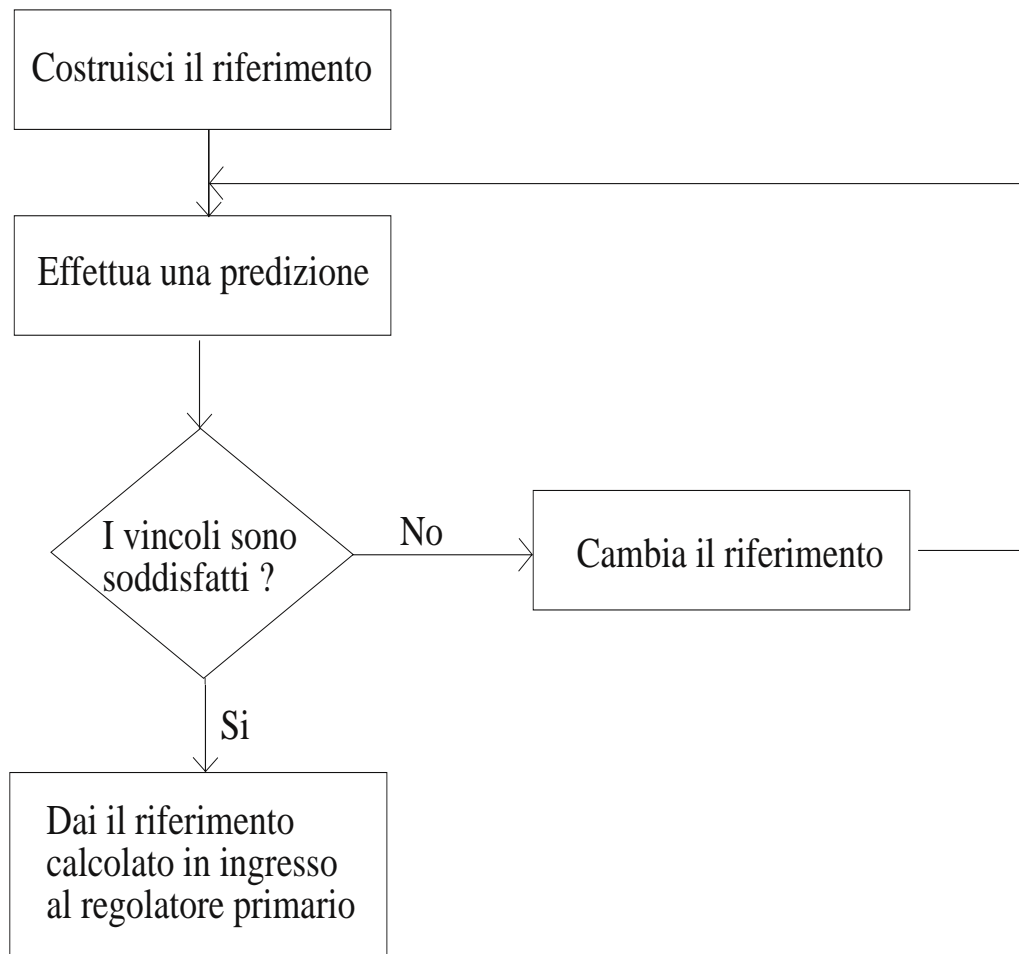


Figura 1.6: Scelta predittiva del riferimento

esempio da $y(t)$) il sistema complessivo viene a presentare un' ulteriore catena di retroazione esterna a quella primaria.

Notiamo che, rispetto all'uso di un controllore predittivo in cui i vincoli vengono imposti al momento di minimizzare il funzionale di costo, la gestione del riferimento fa ottenere risultati del tutto equivalenti e con un minore carico computazionale. Le due tecniche possono però essere anche applicate congiuntamente.

1.3.2 Gestione non predittiva del riferimento

Quantunque l'anello di regolazione primaria sia di tipo predittivo (comprendendo con questo anche la regolazione LQ 2-GDL), possiamo decidere che il riferimento $r(t+i)$ che deve essere fornito al controllore dipenda da un parametro λ che rimane invariato durante tutta l'evoluzione del sistema. Ci riferiamo quindi ad una gestione di tipo "non predittivo" in quanto la scelta del riferimento $r(t+i|t)$ non richiede alcuna predizione. A questo tipo di problema sarà dedicato il capitolo 3.

Capitolo 2

Controllo a orizzonte recessivo con vincoli

In questo capitolo affronteremo il problema di costruire una legge di controllo predittiva per un generico impianto nonlineare e tempo-variante che permetta il soddisfacimento di vincoli imposti sulle variabili di sistema. Dimostreremo un teorema di fondamentale importanza il quale assicura che, sotto ipotesi di esistenza ed unicità di soluzioni ammissibili, un tale tipo di controllore stabilizza il sistema e fa rispettare i vincoli.

2.1 SRHR (Stabilizing Receding Horizon Regulation)

Sia dato l'impianto (eventualmente non lineare)

$$\begin{cases} x(t+1) = \varphi(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = \eta(x(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

con

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad y(t) \in \mathbb{R}^p, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

in cui 0_n è un punto di equilibrio

$$\begin{aligned} 0_n &= \varphi(t, 0_n, 0_m) \quad \forall t \in \mathbb{Z} \\ 0_p &= \eta(0_n) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Definiamo un funzionale di costo

$$C(t, x(t), u_{[t, t+T-1]}) = \sum_{k=0}^{T-1} [\Psi_x(x(t+k)) + \Psi_u(u(t+k))] \quad (2.3)$$

dove

$\Psi_u(u)$ definita positiva

$\Psi_x(x)$ definita positiva oppure $\Psi_x(x) = \Psi_y(\eta(x))$ con $\Psi_y(y)$ definita positiva

(ricordiamo che una funzione scalare $f(x)$ si dice *(semi)definita positiva* se $f(x) \geq 0 \forall x \neq 0_x$ e $f(0_x) = 0$).

Definiamo inoltre dei vincoli

$$W(t) = \begin{cases} x(t+T) = 0_n \\ x(t+k) \in \Omega_x \quad \forall k = 0, 1, \dots, T-1 \\ u(t+k) \in \Omega_u \quad \forall k = 0, 1, \dots, T-1 \end{cases} \quad (2.4)$$

con

$$0_n \in \Omega_x$$

$$0_m \in \Omega_u$$

Teorema 2.1 *Sia dato l'impianto (2.1) e supponiamo che ad ogni passo t esista un' unica sequenza finita $\hat{u}_{[t, t+T-1]}$ che minimizza il costo (2.3) e soddisfa i vincoli (2.4). Allora la legge di controllo in retroazione ad orizzonte recessivo*

$$u(t) = \hat{u}(t) =: F(x(t), t) \quad (2.5)$$

è tale che i vincoli

$$x(t) \in \Omega_x$$

$$u(t) \in \Omega_u$$

sono soddisfatti ad ogni istante t e che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0_p \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0_m \quad (2.6)$$

Se inoltre la condizione

$$\Psi_x(x) \text{ definita positiva}$$

è soddisfatta, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0_n \quad (2.7)$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$V(t) = \min_{u_{[t,t+T-1]}} C(t, x(t), u_{[t,t+T-1]} | W(t))$$

dove $x(t)$ è l'evoluzione dello stato per il sistema (2.1) in retroazione sotto la legge di controllo SRHR (2.5) e con la notazione " $|W(t)$ " intendiamo "subordinatamente al fatto che i vincoli $W(t)$ siano soddisfatti". Sia $x(0) = \bar{x}_0$. Sia inoltre $\hat{u}_{[0,T-1]}$ la sequenza finita ottenuta all'istante $t = 0$ dalla minimizzazione del funzionale $C(0, \bar{x}_0, u_{[0,T-1]})$ con i vincoli $W(0)$.

Definiamo la sequenza finita $\bar{u}_{[1,T]}$ come

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \hat{u}(t) & \text{per } t = 1, \dots, T-1 \\ 0 & \text{per } t = T \end{cases}$$

la quale determina una evoluzione dello stato

$$\begin{cases} \bar{x}(t) = \varphi(0, \bar{x}(t-1), \bar{u}(t-1)) \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

Essendo per costruzione $x(k) \in \Omega_x \forall k = 1, \dots, T-1$, $x(T) = 0_n \in \Omega_x$ e $\bar{u}(k) \in \Omega_u$ ed essendo per l'ipotesi che 0_n sia un punto di equilibrio $x(T+1) = \varphi(T, x(T), \bar{u}(T)) = \varphi(T, 0_n, 0_m) = 0_x \in \Omega_x$ la sequenza finita

$\bar{u}_{[1,T]}$ soddisfa i vincoli $W(1)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
V(1) &= \min_{u_{[1,T]}} C(\bar{x}(1), u_{[1,T]}, 1 | W(1)) \\
&\leq C(\bar{x}(1), \bar{u}_{[1,T]}, 1) = \sum_{k=0}^{T-1} [\Psi_x(\bar{x}(1+k)) + \Psi_u(\bar{u}(1+k))] \\
&= \sum_{k=0}^{T-2} [\Psi_x(\bar{x}(1+k)) + \Psi_u(\hat{u}(1+k))] \\
&\leq \sum_{k=0}^{T-2} [\Psi_x(\bar{x}(1+k)) + \Psi_u(\hat{u}(1+k))] + \Psi_x(\bar{x}(0)) + \Psi_u(\hat{u}(0)) \\
&= V(0)
\end{aligned}$$

In generale, allora, vale che

$$0 \leq V(t) \leq V(t-1)$$

$$V(t-1) - V(t) \geq \Psi_x(x(t)) + \Psi_u(u(t)) \quad (2.8)$$

dove $x(t)$ e $u(t)$ sono rispettivamente gli stati e gli ingressi che si ottengono controllando l'impianto con la legge SRHR.

Sommando la (2.8) si ottiene

$$0 \leq \sum_{k=0}^N [\Psi_x(x(k)) + \Psi_u(u(k))] \leq \sum_{k=0}^N [V(k-1) - V(k)] = V(0) - V(N)$$

Ma $V(t)$ è una successione monotona non crescente limitata inferiormente da 0, quindi ammette limite per $t \rightarrow \infty$. Quindi la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\Psi_x(x(k)) + \Psi_u(u(k))]$$

converge. Pertanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\Psi_x(x(t)) + \Psi_u(u(t))] = 0$$

ed è quindi immediato verificare le (2.6)–(2.7).

Inoltre il soddisfacimento dei vincoli $W(t)$ implica evidentemente che $x(t) \in \Omega_x$ e $u(t) \in \Omega_u \forall t \geq 0$ □

2.2 Osservazioni al teorema SRHR

Osservazione 2.1

Il risultato è estendibile al caso in cui le funzioni $\Psi_x(\cdot)$ e $\Psi_u(\cdot)$ dipendano dall'indice di predizione k purchè

$$\begin{aligned} \Psi_x(x, k) &\leq \Psi_x(x, k+1) \quad \forall k = 0, \dots, T-1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \\ \Psi_u(u, k) &\leq \Psi_u(u, k+1) \quad \forall k = 0, \dots, T-1, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Osservazione 2.2

Dal punto di vista applicativo la minimizzazione del funzionale vincolato C necessaria per il calcolo di $u(t)$ in generale verrà svolta tramite procedure numeriche iterative. Osserviamo però che non è necessario raggiungere il punto di minimo con la massima precisione. Un criterio di arresto per tali procedure può essere infatti quello di scegliere la prima sequenza $\hat{u}_{[t, t+T-1]}$ tale che la (2.8) viene soddisfatta. La legge di controllo è quindi sufficientemente *robusta* nei confronti delle approssimazioni numeriche, con la diretta conseguenza che il carico computazionale può essere alleggerito in quanto sono accettabili anche soluzioni "grossolane".

Osservazione 2.3

Questo modo di procedere non è molto diverso dalle tecniche di sintesi del controllore mediante funzioni di Lyapunov, in cui la legge di controllo viene costruita in maniera tale che nasca una funzione di Lyapunov e quindi sia garantita la asintotica stabilità del sistema.

Osservazione 2.4

L'esistenza e unicità della sequenza finita di ingressi minimizzante il funzionale di costo C è legato ad un problema di *controllabilità*. Pertanto dipende dalla natura dell'impianto e dal tipo di vincoli imposti. Viceversa, nel caso in cui $\Psi_x(\cdot) = \Psi_y(\eta(\cdot))$ e cioè che si pesino le uscite $y(t)$, la asintotica stabilità dello stato $x(t)$ è legata in qualche modo anche ad un problema di *osservabilità*

Osservazione 2.5

Nel caso in cui si voglia introdurre una azione integrale nella legge di controllo è sufficiente riformulare il problema sostituendo agli ingressi $u(t)$ le variazioni $\delta u(t)$.

Osservazione 2.6

Qualora sia possibile assumere come stato dell'impianto un vettore che raccolga un certo numero di ingressi e uscite passate, il problema può essere tradotto in forma ingresso/uscita (SIORHR, *Stabilizing Input Output Receding Horizon Regulator*), ottenendo quindi una legge di controllo del tipo

$$\delta u(t) = F(u_{[t-1, t-n_b]}, y_{[t, t-n_a]}, t)$$

In tale contesto è possibile affrontare un problema di inseguimento sostituendo l'uscita $y(t)$ con l'errore di inseguimento $y(t) - r(t)$ nel funzionale C e la

condizione $x(T) = 0_n$ con la condizione

$$\begin{aligned}y(t+T) &= y(t+T-1) = \dots = y(t+T-n_a) = r(t+T-n_a) \\ \delta u(t+T) &= \delta u(t+T-1) = \dots = \delta u(t+T-n_b) = 0\end{aligned}$$

Successivamente alla ideazione e alla dimostrazione del teorema SRHR siamo venuti a conoscenza di lavori precedentemente pubblicati ([?], [?] e [?]) in cui abbiamo ritrovato un ampliamento ed una generalizzazione dei concetti espressi in questo capitolo.

Capitolo 3

Gestione del riferimento nel
controllo LQ 2–GDL in assenza
di vincoli

3.1 Introduzione

In questo capitolo, definite le caratteristiche che deve possedere il modello dell'impianto fisico oggetto della regolazione, imposteremo e risolveremo innanzitutto il problema LQ 2-GDL (Lineare Quadratico a 2 Gradi Di Libertà), ottenendo quindi una catena di controllo *primaria* in cui l'ingresso di tale catena è la traiettoria di riferimento che desideriamo far inseguire all'uscita. Successivamente definiremo tale riferimento come raccordo tra l'uscita attuale dell'impianto e la traiettoria effettivamente desiderata in maniera più o meno graduale a seconda di un parametro λ . Ne scaturirà una legge di controllo lineare tempo-invariante che dimostreremo essere stabilizzante per ogni valore del parametro ed ovviamente per ogni condizione iniziale e traiettoria desiderata. Mostreremo inoltre che l'impianto così regolato presenta un errore di inseguimento nullo in regime stazionario. La legge di controllo verrà descritta sia in forma di stato che in forma I/O (*Input/Output*) e verrà generalizzata in modo da tenere conto della conoscenza di un certo numero di campioni futuri della traiettoria da inseguire. Modificheremo poi la legge per migliorare le prestazioni nei confronti di disturbi sia sull'ingresso che sull'uscita. Infine riformuleremo il problema in modo che si abbia un incremento del margine di stabilità, ottenendo ancora una legge di controllo stabilizzante e con errore nullo a regime.

3.2 La legge di controllo

3.2.1 Descrizione matematica dell'impianto

Si consideri un sistema dinamico SISO (Single Input Single Output) a tempo discreto, lineare, tempo invariante e strettamente proprio descritto dall'equazione alle differenze

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b), \quad t \in \mathbb{Z}$$

Introducendo l'operatore di ritardo unitario $d = z^{-1}$ si può riscrivere tale relazione in forma compatta

$$A(d)y(t) = B(d)u(t) \tag{3.1}$$

dove

$$\begin{aligned} A(d) &= 1 + a_1d + \dots + a_{n_a}d^{n_a} \\ B(d) &= b_1d + b_2d^2 + \dots + b_{n_b}d^{n_b} \\ B(1) &\neq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Chiamiamo poi $r(t)$ il riferimento cui desideriamo si porti l'uscita all'istante di tempo t e definiamo "errore di inseguimento" la grandezza

$$\epsilon(t) := y(t) - r(t).$$

Posti

$$\Delta(d) := 1 - d$$

$$\delta u(t) := \Delta(d)u(t)$$

premultiplicando per $\Delta(d)$ possiamo riscrivere la (3.1) nella forma

$$A(d)\Delta(d)y(t) = B(d)\delta u(t) \tag{3.3}$$

Tale sistema può essere equivalentemente descritto in forma di equazione alle differenze del primo ordine definendo uno stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e una terna di matrici (Φ, G, H) di dimensioni compatibili legate dalla classica relazione

$$\begin{cases} x(t+1) &= \Phi x(t) + G\delta u(t) \\ y(t) &= Hx(t) \\ x(0) &= 0_x \end{cases}$$

È noto che la matrice di trasferimento dall'ingresso incrementale $\delta u(t)$ allo stato $x(t)$ è scrivibile come

$$H_{x\delta u}(d) = (I - d\Phi)^{-1}dG \quad (3.4)$$

e introducendo le matrici

$$\begin{aligned} A_1(d) &:= I - d\Phi \\ B_1(d) &:= dG \\ A_2(d) &:= \det(I - d\Phi) \\ B_2(d) &:= \text{Adj}(I - d\Phi)dG \end{aligned} \quad (3.5)$$

possiamo riscrivere la (3.4) come descrizione matriciale fratta (DMF)

$$H_{x\delta u}(d) = A_1^{-1}(d)B_1(d) = B_2(d)A_2^{-1}(d)$$

3.2.2 Regolazione LQ 2–GDL

La regolazione LQ 2–GDL è una tecnica di controllo *lineare* in cui gli ingressi vengono generati filtrando l'uscita e il riferimento in modo da minimizzare un costo o indice di prestazione di tipo *quadratico*

$$J(x(0), \delta u_{[0,+\infty)}) := \sum_{t=0}^{\infty} [\epsilon(t)^2 + \rho \delta u(t)^2]$$

$$\rho \geq 0$$

Il problema può essere impostato anche come controllo predittivo a orizzonte recessivo (RHC), considerando l'indice di prestazione definito su un orizzonte di predizione che, partendo dall'istante attuale t , si estende fino all'infinito:

$$J(x(t), \delta u_{[t,t+\infty)}) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N [\epsilon(t+i)^2 + \rho \delta u(t+i)^2] \quad (3.6)$$

In termini ingegneristici definire un costo in questa forma significa volere un *trade-off* fra una buona performance nell'inseguimento della traiettoria e l'aver variazioni non troppo repentine della variabile di comando $u(t)$. È noto come la minimizzazione di J nel caso di regolazione ($r(t) \equiv 0$) porti ad una soluzione del tipo

$$\delta \hat{u}(t+i) = F_{LQ} x(t+i) \quad \forall i = 0, 1, \dots$$

e quindi, secondo la filosofia RHC,

$$\delta u(t) = \delta \hat{u}(t+0) = F_{LQ} x(t) \quad \forall t \in \mathbb{Z};$$

Nel caso di orizzonte seminfinito, quindi, la soluzione RHC con funzionale di costo quadratico non vincolato coincide con la soluzione ottima; occorre

sottolineare che questo non è vero per un generico controllo RHC, particolarmente se l'orizzonte di predizione è finito.

Ricordiamo che l'approccio polinomiale al problema LQ richiede la risoluzione del seguente problema di fattorizzazione spettrale:

$$\begin{aligned} E^*(d)E(d) &= A_2^*(d)\rho A_2(d) + B_2^*(d)H'HB_2(d) \\ &= \rho A^*(d)A(d) + B^*(d)B(d) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$E(d)$ hurwitziano

dove in generale, se $p(d)$ è una matrice polinomiale, $p^*(d) := p(d^{-1})$ e con *hurwitziano* intendiamo che il polinomio al quale l'aggettivo si riferisce ha tutte le sue radici nel cerchio di stabilità. Inoltre

$$F_{LQ} = -X^{-1}Y$$

dove X e Y sono rispettivamente uno scalare ed un vettore che, assumendo la coppia (Φ, G) completamente raggiungibile, risolvono l'equazione diofantina

$$XA_2(d) + YB_2(d) = E(d) \quad (3.8)$$

Dimostriamo adesso un lemma che useremo spesso nel seguito:

Lemma 3.1 *Si consideri una generica catena di controllo come in figura (3.1) dove $v, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x(t+1) = \Phi x(t) + Gv(t)$. Sia inoltre*

$$F = X_1^{-1}Y_1 = Y_2X_2^{-1}$$

e

$$H_{xv}(d) = (I - d\Phi)^{-1}dG = A_1(d)^{-1}B_1(d) = B_2(d)A_2(d)^{-1}.$$

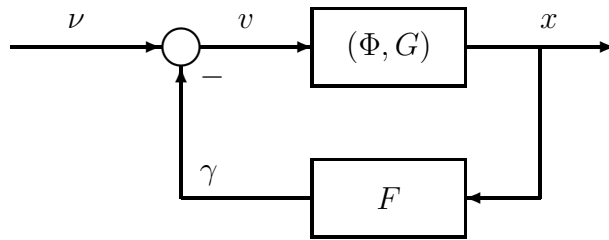


Figura 3.1: generico schema di regolazione con retroazione dallo stato.

Allora le risposte di $\gamma(t)$ e $x(t)$ dovute all'eccitazione $\nu(t)$ sono scrivibili come

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \frac{Y_1 B_2(d)}{\chi(d)} \nu(t) \\ x(t) &= \frac{B_2(d) X_1}{\chi(d)} \nu(t)\end{aligned}\tag{3.9}$$

con

$$\chi(d) = X_1 A_2(d) + Y_1 B_2(d)\tag{3.10}$$

dove quindi $\chi(d)$ rappresenta il polinomio caratteristico dell'impianto ad anello chiuso.

Dimostrazione. Le relazioni costitutive dell'anello implicano che

$$\gamma(t) = FH_{xv}(d)[\nu(t) - \gamma(t)]$$

$$[1 + FH_{xv}(d)]\gamma(d) = FH_{xv}(d)\nu(t)$$

$$\left[1 + X_1^{-1}Y_1B_2(d)A_2^{-1}(d)\right]\gamma(d) = X_1^{-1}Y_1B_2(d)A_2^{-1}(d)\nu(t)$$

$$X_1^{-1}[X_1A_2(d) + Y_1B_2(d)]A_2^{-1}(d)\gamma(d) = X_1^{-1}Y_1B_2(d)A_2^{-1}(d)\nu(t)$$

ed essendo $A_2(d)$ uno scalare

$$[X_1A_2(d) + Y_1B_2(d)]\gamma(d) = Y_1B_2(d)\nu(t)$$

da cui si ricava $\gamma(t)$ in funzione di $\nu(t)$. Inoltre

$$\begin{aligned} x(t) &= B_2(d)A_2^{-1}(d)[\nu(t) - \gamma(t)] \\ &= B_2(d)A_2^{-1}(d)\left[1 - \frac{Y_1B_2(d)}{X_1A_2(d) + Y_1B_2(d)}\right]\nu(t) \\ &= \frac{B_2(d)X_1}{X_1A_2(d) + Y_1B_2(d)}\nu(t) \end{aligned}$$

□

Si osservi che le (3.9) rappresentano in maniera corretta l'evoluzione delle variabili soltanto nell'ipotesi in cui $x(0) = 0$.

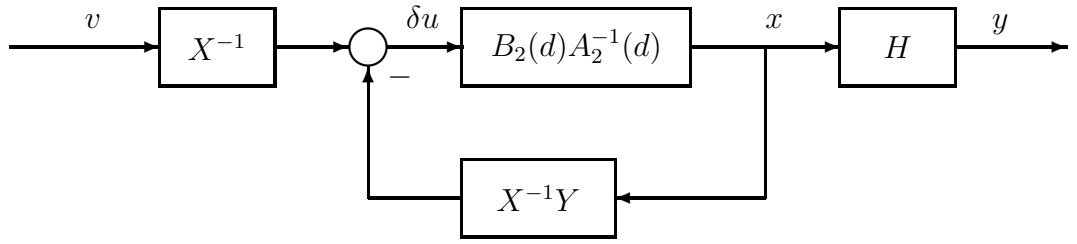


Figura 3.2: regolazione LQ a due gradi di libertà (2-GDL)

Per il lemma 3.1 la regolazione LQ porta allora ad un polinomio ad anello chiuso dato proprio da $E(d)$.

Modifichiamo adesso la legge di controllo nella forma

$$\delta u(t) = -X^{-1}Yx(t) + X^{-1}v(t)$$

come indicato in figura (3.2). Posto inoltre

$$\hat{v}_t(d) := \sum_{i=0}^{\infty} v(t+i)d^i$$

e definendo $\hat{x}_t(d), \delta\hat{u}_t(d)$ in maniera analoga, si ha

$$\delta\hat{u}_t(d) = -X^{-1}Y\hat{x}_t(d) + X^{-1}\hat{v}_t(d)$$

Per semplicità supponiamo adesso che lo stato iniziale $x(0)$ sia nullo. Allora per le (3.9) del lemma (3.1) si può scrivere che

$$\begin{cases} \hat{x}_t(d) = B_2(d)E^{-1}(d)\hat{v}_t(d) \\ \delta\hat{u}_t(d) = A_2(d)E^{-1}(d)\hat{v}_t(d) \end{cases}$$

Indicando con $\prec \dots \succ$ l'operazione di estrazione del termine di grado zero di una serie di potenze nell'operatore d e d^{-1} si può allora scrivere che

$$\begin{aligned}
J &= \prec \hat{\epsilon}_t^* \hat{\epsilon}_t + \rho \delta \hat{u}_t^* \delta \hat{u}_t \succ \\
&= \prec (H \hat{x}_t - \hat{r}_t)^* (H \hat{x}_t - \hat{r}_t) + \rho \delta \hat{u}_t^* \delta \hat{u}_t \succ \\
&= \prec (BE^{-1} \hat{v}_t - \hat{r}_t)^* (BE^{-1} \hat{v}_t - \hat{r}_t) + \rho (A_2 E^{-1} \hat{v}_t)^* (A_2 E^{-1} \hat{v}_t) \succ \\
&= \prec \frac{BB^*}{EE^*} \hat{v}_t^* \hat{v}_t - \frac{B}{E} \hat{v}_t \hat{r}_t^* - \frac{B^*}{E^*} \hat{v}_t^* \hat{r}_t + \hat{r}_t^* \hat{r}_t + \rho \frac{A^* A}{E^* E} \hat{v}_t^* \hat{v}_t \succ \\
&= \prec \hat{v}_t^* \hat{v}_t - \frac{B}{E} \hat{v}_t \hat{r}_t^* - \frac{B^*}{E^*} \hat{v}_t^* \hat{r}_t + \hat{r}_t^* \hat{r}_t + \frac{B^* B}{E^* E} \hat{r}_t^* \hat{r}_t - \frac{B^* B}{E^* E} \hat{r}_t^* \hat{r}_t \succ \\
&= \prec \left(\hat{v}_t - \frac{B^*}{E^*} \hat{r}_t \right)^* \left(\hat{v}_t - \frac{B^*}{E^*} \hat{r}_t \right) + \rho \left(\frac{A}{E} \hat{r}_t \right)^* \left(\frac{A}{E} \hat{r}_t \right) \succ
\end{aligned}$$

dove per semplicità si è omessa la dipendenza da d ; quindi la minimizzazione di J rispetto a $\hat{v}_t(d)$ si ha per

$$\hat{v}_t(d) = \left[\frac{B^*(d)}{E^*(d)} \hat{r}_t(d) \right]_+$$

dove con la notazione $[\dots]_+$ indichiamo l'estrazione della parte causale (cioè relativa alle sole potenze in d). Si può dimostrare che il risultato trovato è il medesimo qualora si parta con un generico stato iniziale $x(0)$.

3.2.3 Formulazione della legge di controllo LQ 2–GDL con gestione del riferimento

Definiamo adesso un riferimento che sull'orizzonte di predizione raccordi in maniera esponenziale il valore dell'uscita attuale $y(t)$ al valore del set–point

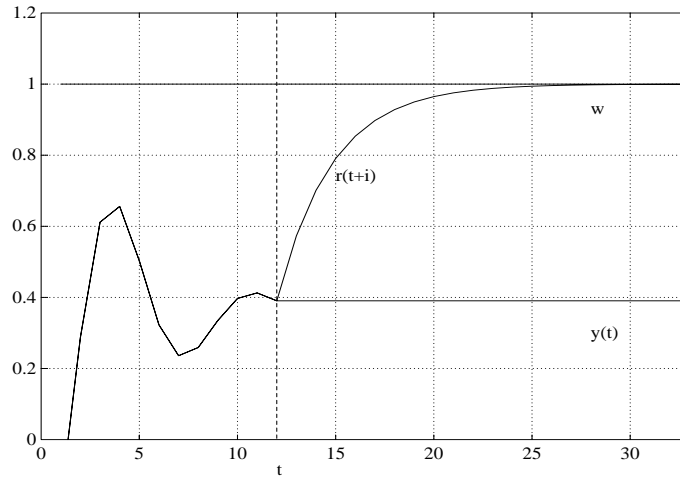


Figura 3.3: Esempio di riferimento

$w(t) \equiv w$ che si vuole raggiungere:

$$r(t+i) := \lambda^i y(t) + (1 - \lambda^i)w(t) \quad (3.11)$$

$$\lambda \in [0, 1)$$

come rappresentato in figura (3.3). Calcoliamone la trasformata:

$$\begin{aligned} \hat{r}_t(d) &= \sum_{i=0}^{\infty} r(t+i)d^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i d^i y(t) + (1 - \lambda^i) d^i w \\ &= \frac{1}{1 - \lambda d} y(t) + \left(\frac{1}{1 - d} - \frac{1}{1 - \lambda d} \right) w \end{aligned}$$

La filosofia RHC impone di prendere

$$\begin{aligned}\delta u(t) &= \prec \delta \hat{u}_t(d) \succ \\ &= \prec -X^{-1}Y\hat{x}_t(d) + X^{-1}\hat{v}_t(d) \succ\end{aligned}$$

Dimostriamo il seguente lemma

Lemma 3.2 *Dato il sistema dinamico (3.1) e definito $E(d)$ come in (3.7) e (3.8), sotto le ipotesi*

$$MCD[A(d), B(d)] \text{ strettamente hurwitziano} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \rho > 0 \text{ oppure} \\ \rho = 0 \text{ e } B(e^{j\omega}) \neq 0 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi) \end{cases} \quad (3.13)$$

la funzione di trasferimento

$$K(d) := \frac{B(d)}{E(d)} \quad (3.14)$$

è asintoticamente stabile. (Con MCD indichiamo il Massimo Comun Divisore)

Dimostrazione. Per l'ipotesi (3.12) $E(d)$ esiste ed è stabile. Se avesse radici sul cerchio unitario esisterebbe un ω_0 tale che

$$\begin{aligned}0 &= E^*(e^{j\omega_0})E(e^{j\omega_0}) \\ &= \rho A(e^{-j\omega_0})A(e^{j\omega_0}) + B(e^{-j\omega_0})B(e^{j\omega_0}) \\ &= \rho \left| A(e^{j\omega_0}) \right|^2 + \left| B(e^{j\omega_0}) \right|^2\end{aligned}$$

il che è assurdo. □

Osservazione 3.1

Osserviamo che se $MCD[A, B]$ non è strettamente hurwitziano, affinché valga la (3.8) occorre che E abbia a fattore tale MCD e quindi sia instabile, il che è in disaccordo con la (3.7).

La funzione di trasferimento $K(d)$ descrive quindi un impianto avente modi tutti asintoticamente stabili; pertanto è una serie formale nell'operatore di ritardo d :

$$K(d) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i d^i \quad (3.15)$$

(l'indice i parte da 1 poiché $B(d) = H \text{Adj}(I - d\Phi)dG = 0$ per $d = 0$). Quindi

$$\begin{aligned} \prec K^*(d) \frac{1}{1 - \lambda d} \succ &= \prec \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i d^i \sum_{j=1}^{\infty} k_j d^{-j} \succ \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} k_i \lambda^i \\ &= K(\lambda) \end{aligned}$$

e analogamente

$$\prec K^*(d) \left(\frac{1}{1-d} - \frac{1}{1-\lambda d} \right) \succ = K(1) - K(\lambda)$$

Abbiamo allora ottenuto la legge di controllo RHC 2-GDL su orizzonte seminfinito con sintesi del riferimento di tipo (3.11)

$$\delta u(t) = -X^{-1} [Y - K(\lambda)H] x(t) + X^{-1} [K(1) - K(\lambda)] w(t) \quad (3.16)$$

In figura (3.4) riportiamo il diagramma a blocchi corrispondente alla legge di controllo trovata. Notiamo che per $\lambda = 0$ $r(t) \equiv w$ e la (3.16) degenera quindi in un problema di inseguimento LQ 2-GDL in cui il riferimento è la

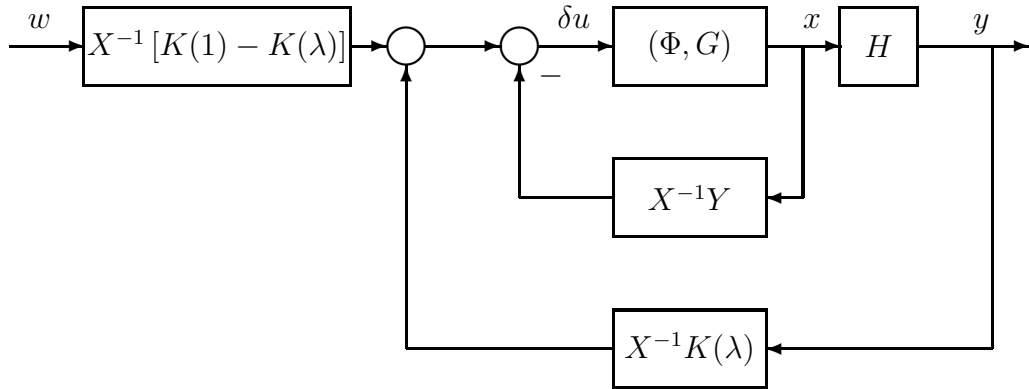


Figura 3.4: schema di regolazione 2-GDL con gestione del riferimento.

funzione gradino di valore w . Valutiamo il polinomio caratteristico del sistema controllato con la (3.16). Per la(3.10) del lemma 3.1

$$\begin{aligned}
 \chi_{cl}(d) &= XA_2(d) + [Y - K(\lambda)H] B_2(d) \\
 &= E(d) - \frac{B(\lambda)}{E(\lambda)}B(d)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Osservazione 3.2

Qualora $w(t)$ sia variabile nel tempo applicare la (3.16) significherebbe costruire ad ogni istante t un riferimento $r(t + i|t)$ che raccorda $y(t)$ alla traiettoria $\{w(t + i) \equiv w(t)\}_{i=0}^{\infty}$. Questo modo di procedere è tipico dei controllori predittivi non anticipativi i quali, non disponendo di campioni futuri $w(t + i)$ della traiettoria da inseguire, estrapolano che questa si mantenga allo stesso valore $w(t)$ su tutto l'orizzonte futuro. Malgrado tale approssimazione, di fatto la (3.16) risulta essere una legge di controllo lineare tempo-invariante causale che dà buone prestazioni anche con traiettorie $w(t)$ non costanti.

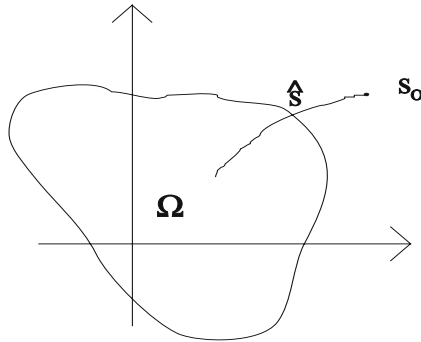


Figura 3.5: Regione Ω del piano complesso

3.3 Analisi della stabilità

Lemma 3.3 (Rouché) *Siano $L(s)$ e $M(s)$ polinomi nella variabile complessa s , $P_1(s) := L(s) + M(s)$ e Ω una regione chiusa e limitata del piano complesso. Se*

$$L(s) \neq 0 \quad \forall s \in \Omega$$

e

$$\sup_{s \in \Omega} \left| \frac{M(s)}{L(s)} \right| < 1$$

allora $P_1(s) \neq 0 \quad \forall s \in \Omega$.

Dimostrazione. Sia $P_\alpha(s) = L(s) + \alpha M(s)$, $\alpha \in [0, 1]$. Poiché le radici di un polinomio sono una funzione continua dei coefficienti e poiché per ipotesi $P_0(s) = L(s)$ non ha zeri in Ω , se $P_1(s)$ avesse radici in Ω esisterebbe un $\hat{\alpha} \in (0, 1]$ tale che $P_{\hat{\alpha}}(\hat{s}) = 0$ per qualche $\hat{s} \in \partial\Omega$, come mostrato in figura (3.5). Allora $\hat{\alpha}M(\hat{s}) = -L(\hat{s})$, $\hat{\alpha}|M(\hat{s})| = |L(\hat{s})|$ e quindi

$$\left| \frac{M(\hat{s})}{L(\hat{s})} \right| = \frac{1}{\hat{\alpha}} \geq 1,$$

il che è assurdo perché per ipotesi

$$\left| \frac{M(\hat{s})}{L(\hat{s})} \right| \leq \sup_{s \in \Omega} \left| \frac{M(s)}{L(s)} \right| < 1.$$

Pertanto $P_1(s)$ non può avere radici su Ω . \square

Teorema 3.1 *Sia il MCD $[A(d), B(d)]$ strettamente hurwitziano. La legge di controllo (3.16) rende l'impianto (3.1) asintoticamente stabile $\forall \lambda \in [0, 1)$ e $\forall \rho > 0$. Per $\rho = 0$ il risultato continua a valere purché $B(e^{j\omega}) \neq 0 \forall \omega \in [0, 2\pi)$*

Dimostrazione. Sia $\Omega = \{s \in \mathbb{C} : |s| \leq 1\}$. Per il lemma (3.2) la funzione di variabile complessa $K(s) := \frac{B(s)}{E(s)}$ è analitica in Ω . Inoltre

$$\left| K(e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{|B(e^{j\omega})|^2}{|B(e^{j\omega})|^2 + \rho |A(e^{j\omega})\Delta(e^{j\omega})|^2} \leq 1.$$

Per il Principio di Massimo [Ahl53, pag. 134], la funzione $|K(s)|$ assume massimo su $\partial\Omega$, e quindi

$$\forall s \in \overset{\circ}{\Omega} \quad |K(s)| < \sup_{s \in \partial\Omega} |K(s)| \leq 1.$$

In particolare $\forall \lambda \in [0, 1)$ $s = \lambda + j0 \in \overset{\circ}{\Omega}$ e quindi

$$|K(\lambda)| < 1. \tag{3.18}$$

Si può applicare il lemma precedente ai polinomi $L(s) := E(s)$, $M(s) := -K(\lambda)B(s)$, essendo

$$\sup_{s \in \Omega} \left| \frac{M(s)}{L(s)} \right| \leq |K(\lambda)| \sup_{s \in \partial\Omega} |K(s)| < 1$$

e $L(s) \neq 0 \forall s \in \Omega$, e concludere che il polinomio $\chi_{cl}(s) = E(s) - K(\lambda)B(s)$ non ha radici in Ω cioè è asintoticamente stabile. \square

Osserviamo che il polinomio caratteristico $\chi_{cl}(d)$ è ottenuto perturbando con il termine $-K(\lambda)B(d)$ il polinomio caratteristico $E(d)$ che si avrebbe in un

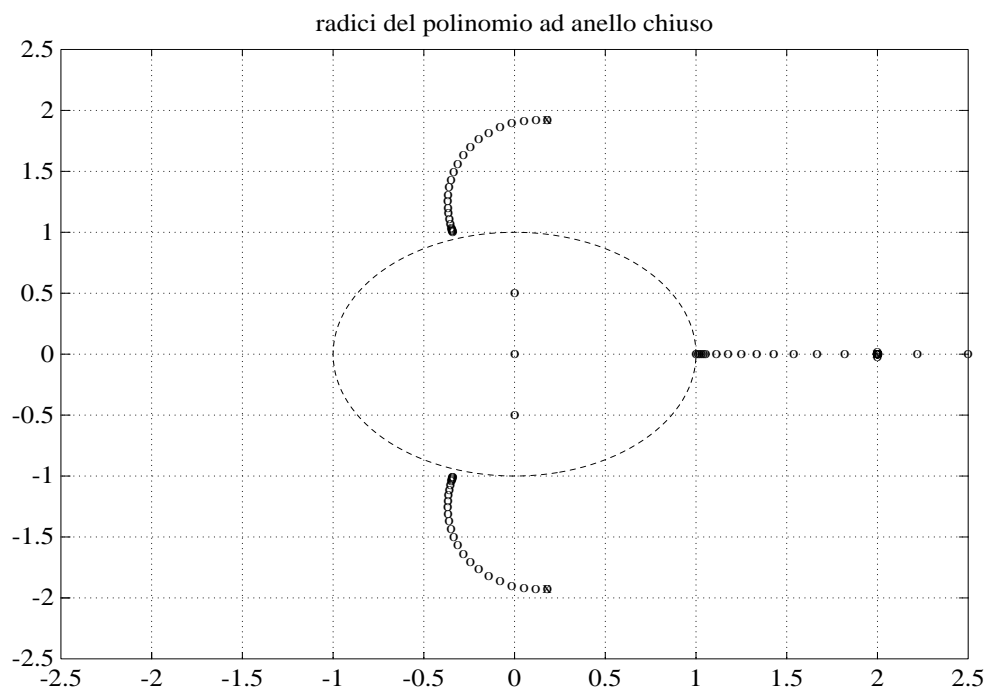


Figura 3.6: luogo delle radici al variare di λ

problema di pura regolazione LQ. In figura (3.6) riportiamo un tipico esempio di luogo delle radici che si può avere al variare di λ fra 0 e 1; in figura (3.7) osserviamo come varia il relativo grafico $K(\lambda)$ (la quale non sempre però è una funzione monotona di λ nell' intervallo $[0, 1]$, come ad esempio si può vedere in figura (3.12).

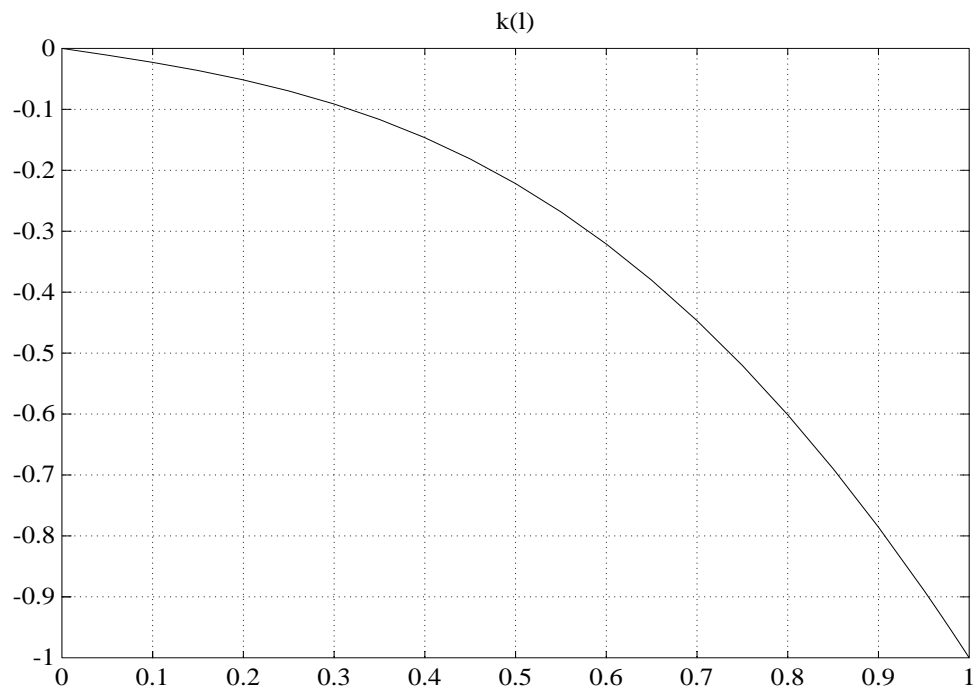


Figura 3.7: andamento di $K(\lambda)$

3.4 Errore a regime

Possiamo mostrare che l'errore d' inseguimento è nullo a regime; infatti per la (3.9)

$$x(t) = \frac{B_2(d)XX^{-1}[K(1) - K(\lambda)]}{E(d) - K(\lambda)B(d)}w(t)$$

e quindi

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{B(d)[K(1) - K(\lambda)]}{E(d) - K(\lambda)B(d)}w(t) \\ &=: H_{yw}(d)w(t) \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} \delta u(t) &= \frac{\Delta(d)A(d)}{B(d)}H_{yw}(d)w(t) \\ &= \frac{\Delta(d)A(d)[K(1) - K(\lambda)]}{E(d) - K(\lambda)B(d)}w(t) \\ &=: H_{uw}(d)w(t) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Per quanto dimostrato precedentemente, sotto le ipotesi (3.12) e (3.13) la funzione di trasferimento $H_{yw}(d)$ è asintoticamente stabile e quindi ha senso

calcolarne il guadagno in continua

$$\begin{aligned}
H_{yw}(1) &= \frac{B(1) [K(1) - K(\lambda)]}{E(1) - K(\lambda)B(1)} \\
&= \frac{B(1) [K(1) - K(\lambda)]}{\frac{E(1)E^*(1)}{E(1)} - K(\lambda)B(1)} \\
&= \frac{B(1) [K(1) - K(\lambda)]}{\frac{\rho[A(1)\Delta(1)]^2 + B^2(1)}{E(1)} - K(\lambda)B(1)} \\
&= \frac{B(1) [K(1) - K(\lambda)]}{B(1)K(1) - K(\lambda)B(1)} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Si ha quindi che l'errore a regime $\epsilon_w(t) := y(t) - w$ è nullo per $t \rightarrow \infty$. Inoltre è utile osservare che $\delta u(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$. Ricordiamo che la possibilità di avere *offset* nullo a regime si ha grazie all'introduzione dell'integratore nella catena di controllo.

3.5 Simulazioni

Abbiamo testato le prestazioni di alcuni impianti controllati con la legge di controllo (3.16). Ogni prova è stata realizzata facendo partire l'impianto da una situazione di regime preesistente

$$u(-i) = u(0), x(-i) = x(0), y(-i) = y(0) \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

e imponendo all'istante $t = 0$ una variazione del valore di set-point w . Poiché

$$x(0) = x(-i + 1) = \Phi x(-i) = \Phi x(0),$$

è stato sufficiente inizializzare lo stato con un valore $x(0)$ diretto secondo l'autovettore di Φ relativo all'autovalore unitario (che esiste sempre, visto che $\det(I - d\Phi) = (1 - d)A(d)$). In alternativa, posto $x_p(t)$ lo stato dell'impianto descritto dalla funzione di trasferimento $H_{uy}(d)$ e da una terna (Φ_p, G_p, H_p) , uno stato iniziale di regime è quello che si ha ponendo

$$x_p(0) = (I - \Phi_p)^{-1}G_p$$

essendo la funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ allo stato $x_p(t)$

$$x_p(t) = (I - d\Phi_p)^{-1}dG_p$$

Esempio 3.1

Come primo esempio abbiamo preso un impianto stabile a fase minima

$$H_{yu}(z) = \frac{0.0489z + 0.0381}{z^2 - 1.3853z + 0.4724} \quad (3.22)$$

ottenuto discretizzando con tempo di campionamento $T = 1$ e introduzione di ZOH (Zero Order Hold) la funzione di trasferimento

$$\overline{H}_{yu}(s) = \frac{\frac{1}{8}}{(s + \frac{1}{2})(s + \frac{1}{4})}$$

e abbiamo imposto una variazione del set-point da un valore di 10 ad un valore di 5. Nelle figura (3.8)–(3.9) riportiamo i risultati della simulazione.

Possiamo fare alcune osservazioni:

- Rispetto al controllo LQ 2–GDL tradizionale ($\lambda = 0$) si possono eliminare sovraelongazioni sull'uscita e sull'ingresso scegliendo opportunamente λ .
- Per λ crescente si hanno variazioni dell'ingresso sempre più dolci.

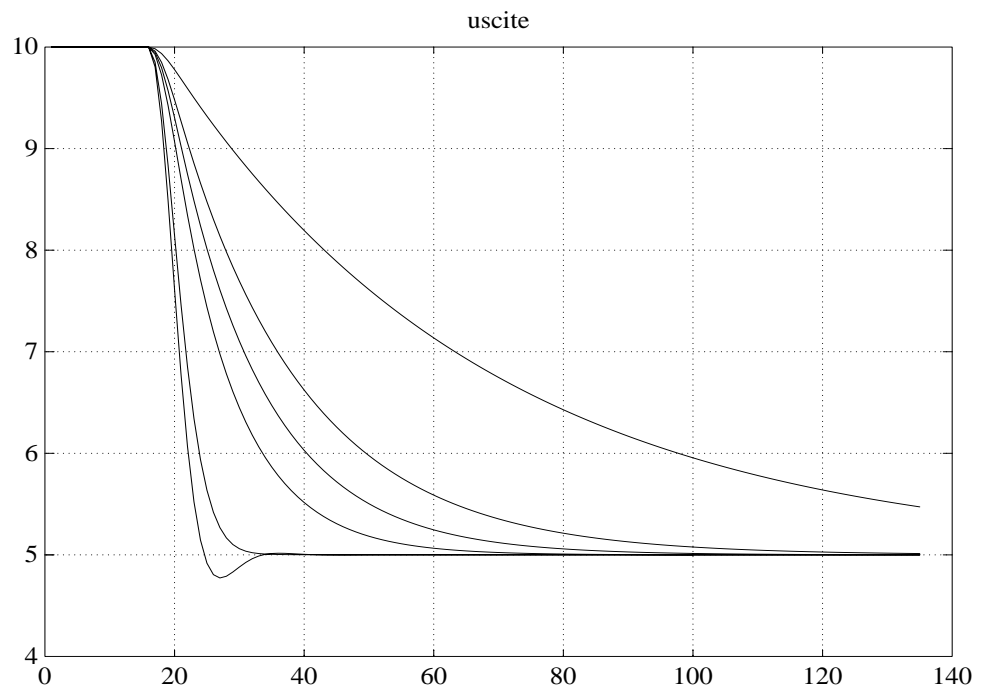


Figura 3.8: Esempio 3.1. Risposta al variare di λ per $\rho = 1$

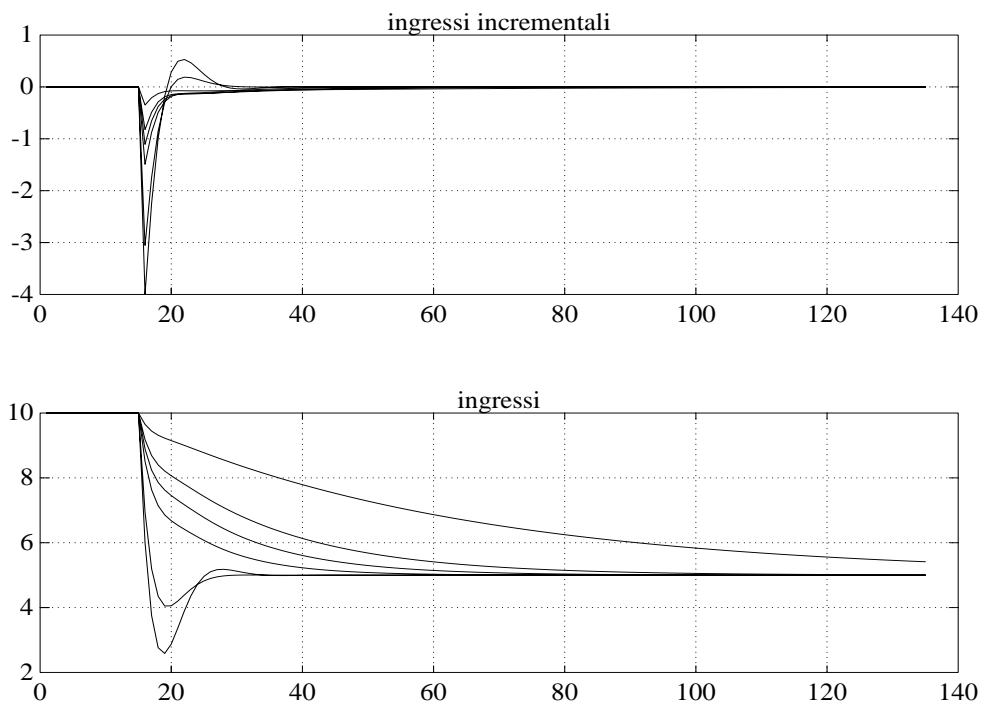


Figura 3.9: Esempio 3.1. Risposta al variare di λ per $\rho = 1$

- Esiste un trade-off fra tempo di salita e intensità dell'ingresso incrementale: al variare di λ se l'intensità degli ingressi incrementali decresce il tempo di salita cresce e viceversa
- Si può raggiungere all'incirca lo stesso risultato aumentando ρ oppure aumentando λ . Mentre però variare λ significa soltanto ricalcolarsi $K(\lambda)$, variare ρ comporta una nuova risoluzione di un problema di fattorizzazione spettrale. Questa osservazione risulterà più chiara quando parleremo di tecniche tempo-varianti.
- In generale la sensibilità rispetto a λ cresce quando esso si avvicina a 1.

A proposito dell'ultima osservazione possiamo constatare che di fatto la legge di controllo dipende da $K(\lambda)$. È dunque necessario analizzare la curva $K(\lambda)$ per avere una idea della sensibilità rispetto al parametro. In alcuni casi [cfr. figura (3.12)] addirittura la curva non è monotona, con il risultato che esistono valori distinti λ_1, λ_2 che danno lo stesso valore di $K(\lambda)$ e quindi la stessa legge di controllo.

Esempio 3.2

Come secondo esempio abbiamo preso un impianto stabile a fase non minima

$$H_{yu}(z) = \frac{-2.3590z + 2.4312}{z^2 - 1.6015z + 0.6376} \quad (3.23)$$

ottenuto discretizzando con tempo di campionamento $T = 0.03$ e introduzione di ZOH funzione di trasferimento

$$\overline{H}_{yu}(s) = -100 \frac{s - 1}{(s + 10)(s + 5)}$$

e abbiamo imposto una variazione del set-point da un valore di 1 ad un valore di 3. Nelle figure (3.10)–(3.11) riportiamo le uscite, gli ingressi e le variazioni degli

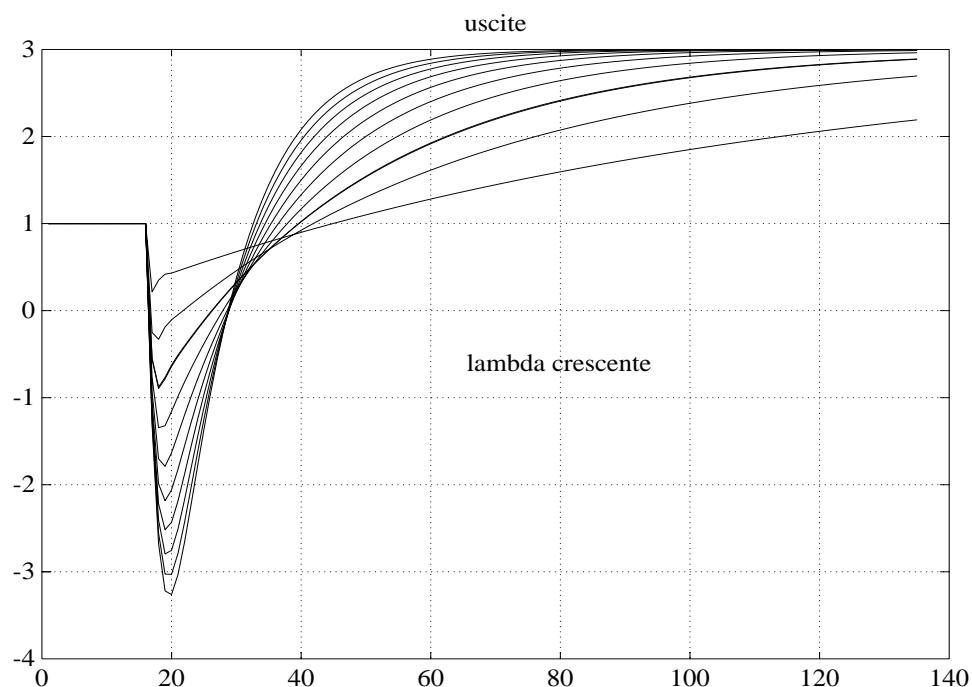


Figura 3.10: Esempio 3.2. Risposta al variare di λ per $\rho = 1$

ingressi che si hanno al variare di λ . In figura (3.12) possiamo osservare come l'andamento di $K(\lambda)$ non sia monotono; questo spiega perché al crescere di λ si abbia dapprima un aumento degli ingressi e poi una graduale diminuzione.

3.6 Legge di controllo in forma I/O

Utilizzeremo adesso i risultati trovati per determinare un controllore a 2-GDL in forma I/O (Ingresso/Uscita, *Input/Output*), in cui la retroazione viene cioè fatta dall'uscita anziché dallo stato. La legge di controllo che

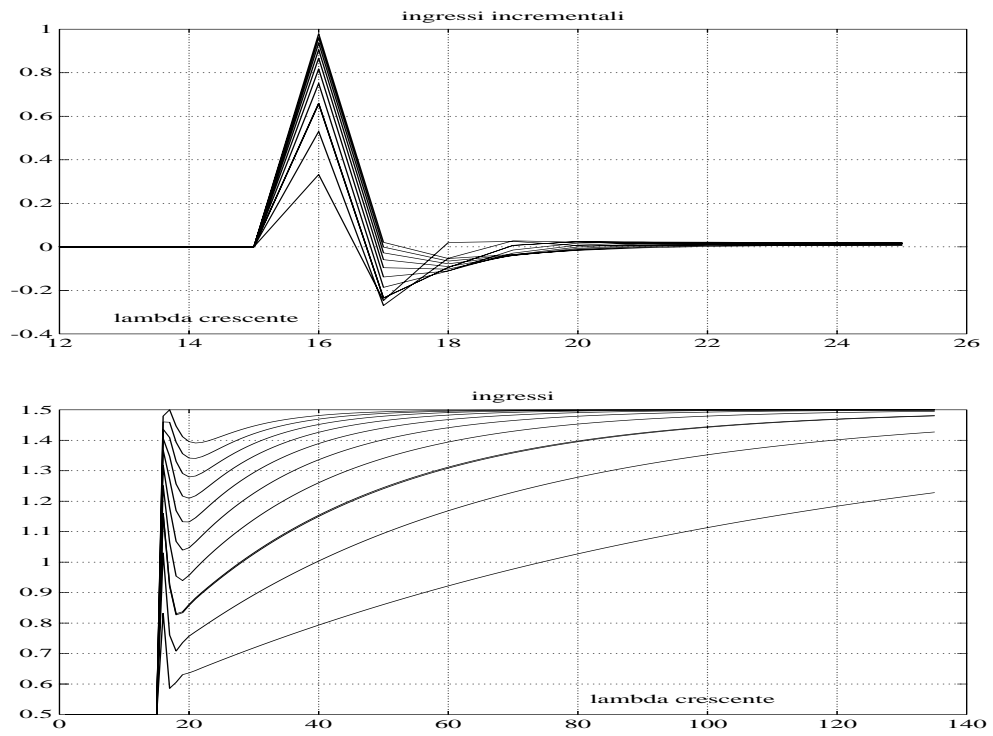


Figura 3.11: Esempio 3.2. Risposta al variare di λ per $\rho = 1$

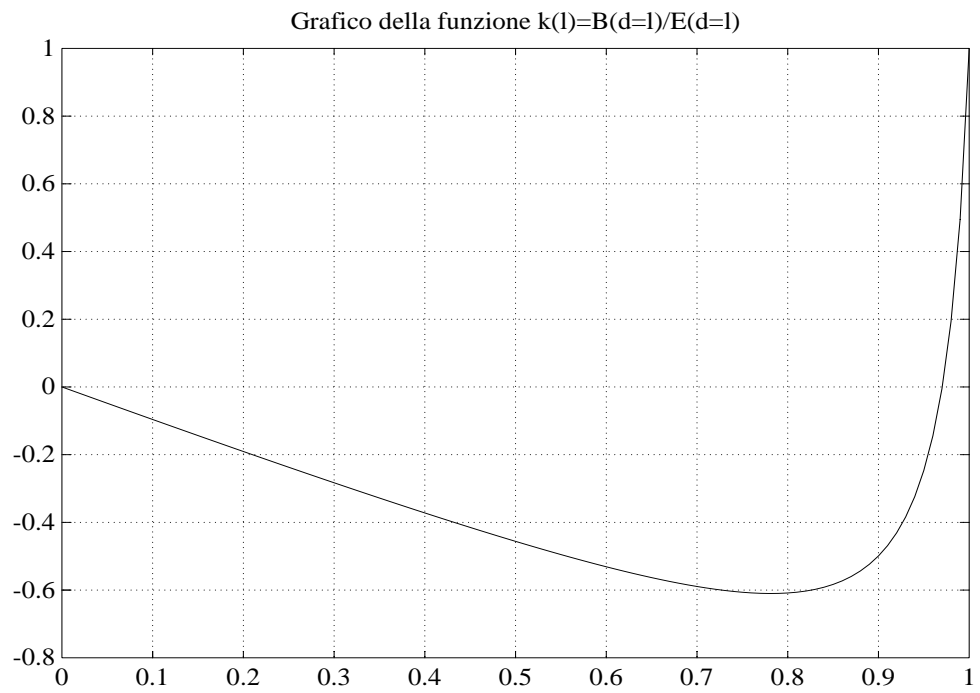


Figura 3.12: Esempio 3.2. Andamento di $K(\lambda)$ al variare di λ

troveremo risulterà utile qualora risulti impossibile o inopportuno misurare tutto lo stato. Inoltre si riesce ad avere una descrizione nel dominio della frequenza dell'impianto controllato.

3.6.1 Soluzione del problema

Consideriamo ancora l'impianto da controllare nella sua forma incrementale (3.3).

Definiamo

$$\begin{cases} n_a & := \partial A(d) \\ n_b & := \partial B(d) \end{cases}$$

dove in generale, dato un polinomio $p(d)$, con $\partial p(d)$ ne intendiamo il grado.

Consideriamo il vettore

$$x(t) := [y(t - n_a), y(t - n_a + 1), \dots, y(t),$$

$$\delta u(t - n_b + 1), \delta u(t - n_b + 2), \dots, \delta u(t - 1)]'$$

Si può dimostrare [?, pag. 33] che $x(t)$ rappresenta uno stato per l'impianto (3.3) e che inoltre, sotto l'ipotesi (3.12), si ha che la terna di matrici (Φ, G, H) relative allo stato $x(t)$ è stabilizzabile e rivelabile. Esiste quindi ed è unica la soluzione $(E(d), X, Y)$ del problema LQ. Posto allora

$$[s_{n_a}, \dots, s_0, r_{n_b-1}, \dots, r_1] := X^{-1}Y$$

la legge di controllo LQ a 2-GDL risulta essere

$$R(d)\delta u(t) = -S(d)y(t) + \frac{X^{-1}B^*(d)}{E^*(d)}r(t+i) \quad (3.24)$$

e quindi la legge di controllo (3.16) può essere riscritta nella forma

$$R(d)\delta u(t) = -S(d)y(t) + X^{-1}K(\lambda)y(t) + X^{-1}[K(1) - K(\lambda)]w(t) \quad (3.25)$$

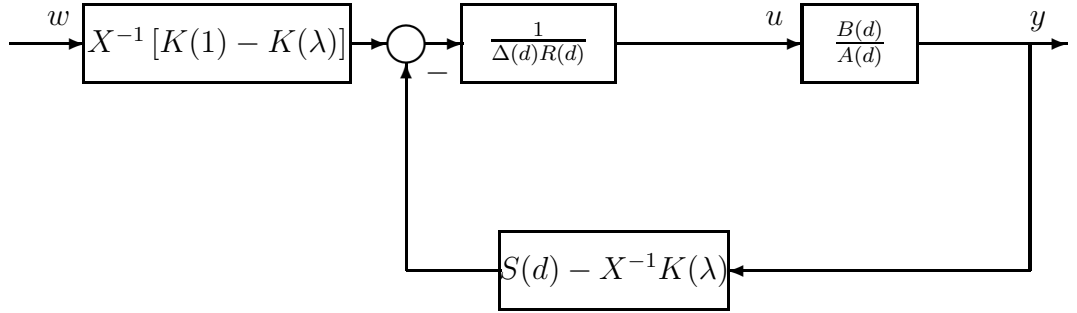


Figura 3.13: regolazione LQ 2-GDL in forma I/O

dove

$$R(d) := r_{n_b-1}d^{n_b-1} + \dots + r_1d + 1$$

$$S(d) := s_{n_a}d^{n_a} + \dots + s_1d + s_0$$

In figura (3.13) riportiamo il diagrammi a blocchi corrispondente.

Con tale legge di controllo la funzione di trasferimento dal set-point $w(t)$ all'uscita $y(t)$ diventa

$$H_{yw} = \frac{[K(1) - K(\lambda)] B(d)}{X [\Delta(d)A(d)R(d) + B(d)S(d)] - K(\lambda)B(d)} \quad (3.26)$$

Confrontando la (3.26) con la (3.19) del par. 3.4, si conclude che i polinomi $R(d)$ e $S(d)$ soddisfano l'equazione diofantina

$$\Delta(d)A(d)R(d) + B(d)S(d) = X^{-1}E(d) \quad (3.27)$$

Per la (3.8) si ottiene

$$XA_2(0) + YB_2(0) = E(0)$$

e quindi, ricordando le (3.5),

$$X = E(0). \quad (3.28)$$

Facciamo alcune considerazioni sulla essenzialità della ipotesi (3.12). Per poter risolvere la (3.27) occorre che $E(d)$ abbia $MCD[A(d), B(d)]$ come fattore. Possiamo quindi ripetere quanto detto nell'osservazione 3.1. Possiamo inoltre osservare che l'ipotesi (3.12) significa semplicemente escludere la presenza di dinamiche non raggiungibili e/o non osservabili instabili che la legge di controllo (3.25) non riuscirebbe a stabilizzare.

Risulta utile trasformare l'equazione (3.27) in z . Definendo

$$\begin{aligned} n &:= \max(n_a, n_b) \\ n_{RS} &:= \max(n_a, n_b - 1) \geq \max(\partial R, \partial S) \\ n_E &:= \max(n_a + 1, n_b) = n_{RS} + 1 \end{aligned}$$

e i polinomi

$$\begin{aligned} \bar{R}(z) &:= z^{n_{RS}} R(z^{-1}) \\ \bar{S}(z) &:= z^{n_{RS}} S(z^{-1}) \\ \bar{B}(z) &:= z^n B(z^{-1}) \\ \bar{A}(z) &:= z^n A(z^{-1}) \\ \bar{E}(z) &:= z^{n_E} E(z^{-1}) \end{aligned}$$

possiamo moltiplicare la (3.27) per $z^{n_{RS}+n+1}$ ed ottenere l'equazione diofantina

$$\left[(z-1)\bar{A}(z) \right] \bar{R}(z) + \left[z\bar{B}(z) \right] \bar{S}(z) = z^n \left[X^{-1}\bar{E}(z) \right] \quad (3.29)$$

L'equazione (3.29), ponendo il vincolo $\partial S \leq n$, ammette una ed una sola soluzione $(\bar{R}(z), \bar{S}(z))$, da cui ricaviamo

$$R(d) = d^{n_{RS}} \bar{R}(d^{-1})$$

$$S(d) = d^{n_{RS}} \bar{S}(d^{-1})$$

Risulta utile notare che la (3.29) equivale alla risoluzione di un problema di posizionamento dei poli (*pole-placement*) per l'impianto descritto dalla funzione di trasferimento

$$H_{y\delta u} = \frac{z\bar{B}(z)}{(z-1)\bar{A}(z)} = \frac{B(d)}{\Delta(d)A(d)}$$

in cui il polinomio osservatore è z^n , dove n è proprio l'ordine dell'impianto meno 1 (ordine minimo che può avere un ricostruttore dello stato ¹). Ciò corrisponde ad avere i modi nascosti del ricostruttore nilpotenti, cosa perfettamente coerente con l'averne preso come stato dell'impianto ingressi e uscite passate.

3.6.2 Comportamento in presenza di disturbi

Consideriamo che l'impianto da controllare sia affetto da disturbi sull'ingresso e sull'uscita. Chiameremo i primi *disturbi di coppia*, gli altri *disturbi di posizione*.

² Lo schema considerato è indicato in figura (3.14).

Le grandezze indicate in figura rappresentano

$w(t)$ set-point (o in generale la traiettoria da inseguire)

$m(t)$ disturbo di coppia

$n(t)$ disturbo di posizione

$u(t)$ ingresso complessivo ricevuto dall'impianto

¹[AW84, pag. 289]

²Tali termini traggono origine dai modelli di tipo meccanico in cui gli ingressi sono coppie e le uscite sono angoli o velocità. I disturbi di coppia possono essere ad esempio gli attriti statici.

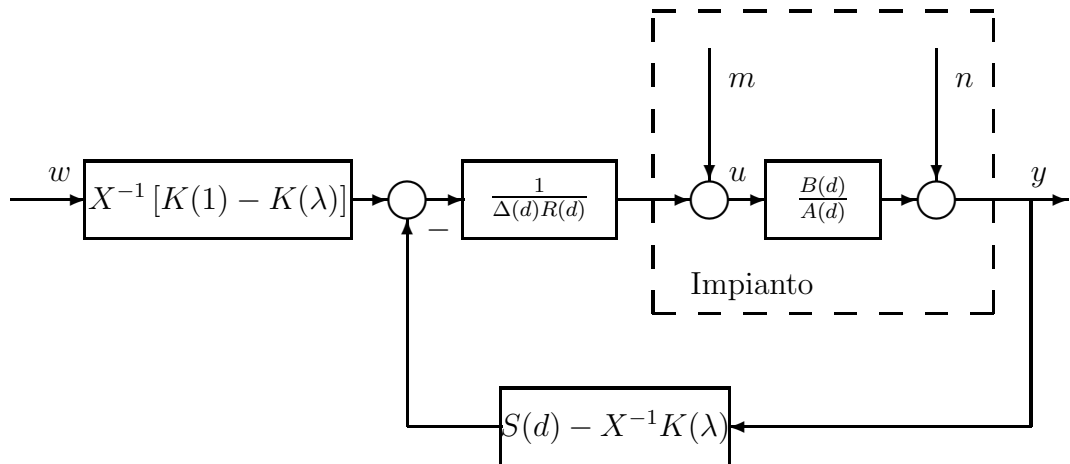


Figura 3.14: regolazione LQ 2-GDL in forma I/O in presenza di disturbi

$u_1(t)$ ingresso dato all'impianto calcolato tramite la legge di controllo

$y(t)$ uscita disturbata dell'impianto

Valutiamo le funzioni di trasferimento dai disturbi $m(t)$ e $n(t)$ alle grandezze $u(t)$ e $y(t)$ caratterizzanti l'impianto da controllare. Per semplicità di scrittura definiamo

$$S_1(d) := S(d) - X^{-1}K(\lambda).$$

Data la linearità del sistema possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti:

1. $m(t) \equiv w(t) \equiv 0$. Si ottiene

$$y(t) = n(t) + \frac{B(d)}{A(d)\Delta(d)R(d)} [-S_1(d)y(t)]$$

$$\left[1 + \frac{B(d)S_1(d)}{\Delta(d)A(d)R(d)} \right] y(t) = n(t)$$

$$H_{yn} = \frac{X\Delta(d)A(d)R(d)}{E(d) - K(\lambda)B(d)} \quad (3.30)$$

$$H_{un} = \frac{[K(\lambda) - XS(d)]A(d)}{E(d) - K(\lambda)B(d)} \quad (3.31)$$

2. $n(t) \equiv w(t) \equiv 0$. Si ha

$$H_{ym} = \frac{X\Delta(d)B(d)R(d)}{E(d) - K(\lambda)B(d)} \quad (3.32)$$

$$H_{um} = \frac{X\Delta(d)A(d)R(d)}{E(d) - K(\lambda)B(d)} \quad (3.33)$$

Poniamo in evidenza che grazie all'azione integrale inserita nella legge di controllo a regime si ha la completa reiezione di disturbi costanti sia sull'ingresso che sull'uscita.

3.7 Miglioramento delle prestazioni nei confronti dei disturbi

3.7.1 Introduzione al problema

Analizzando le funzioni di trasferimento (3.30)–(3.33) ottenute controllando l'impianto con la legge di controllo (3.25), si nota un pessimo comportamento nei confronti disturbi aventi componenti armoniche a frequenze elevate. L'introduzione dell'integratore nella catena di controllo, sebbene elimini *offset* a regime, introduce un derivatore $\Delta(d)$ nelle funzioni di trasferimento H_{yn} , H_{ym} e H_{um} che amplifica evidentemente eventuali alte frequenze contenute nei disturbi $n(t)$ e $m(t)$. La prestazione peggiore riguarda però la risposta dell'ingresso $u(t)$ al disturbo di uscita $n(t)$; abbiamo infatti riscontrato che

- si hanno valori di $u(t)$ molto elevati non appena sopraggiunge un gradino $n(t)$ sull'uscita
- rumori bianchi sull'uscita di intensità anche modesta provocano ingressi di valore assai elevato e altrettanto rumorosi.

Provando a tracciare i diagrammi di Bode della $H_{un}(e^{j\omega})$ per diversi impianti, abbiamo osservato comportamenti di tipo passa-alto e addirittura derivativo con valori del guadagno dell'ordine delle decine di *db* praticamente su tutto lo spettro. Riportiamo in figura (3.15) un diagramma di Bode tipico.

Abbiamo provato a modificare lo schema di controllo introducendo un filtro passa-basso $F(d)$ sull'uscita e riformulando la legge di controllo per il nuovo impianto costituito dalla cascata di questo e dell'impianto originale,

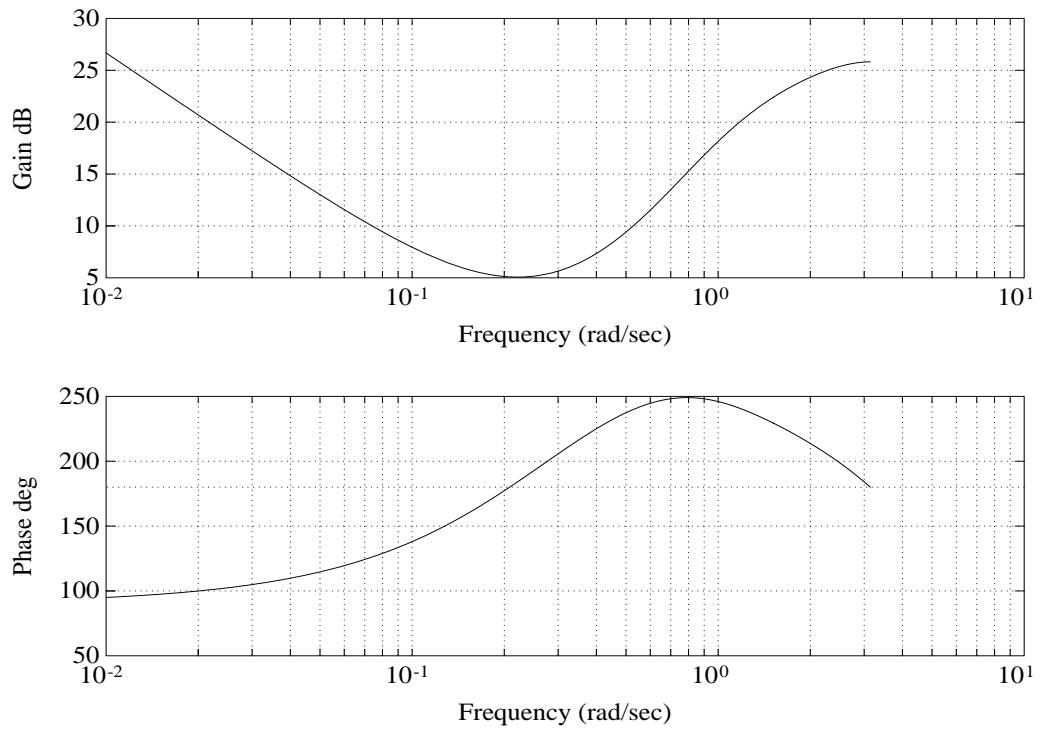


Figura 3.15: Diagrammi di bode di una tipica $H_{un}(e^{j\omega})$

con l'idea che in tal modo la nuova uscita presentasse un disturbo filtrato $F(d)n(t)$ impoverito dunque delle componenti ad alta frequenza. I risultati sono però stati del tutto deludenti essendo qualitativamente identici a quelli che si avevano prima della modifica.

Abbiamo però risolto il problema modificando la catena di controllo come in figura (3.16) agendo sul polinomio osservatore, ovvero, come vedremo in seguito, introducendo pesi dinamici nel funzionale di costo.

3.7.2 Approccio "posizionamento dei poli dell'osservatore"

Modifichiamo l'equazione diofantina(3.27) introducendo un polinomio strettamente hurwitziano $P_0(d)$ corrispondente ai modi (nascosti) di un ipotetico ricostruttore dello stato [AW84]:

$$\Delta(d)A(d)R(d) + B(d)S(d) = X^{-1}P_0(d)E(d) \quad (3.34)$$

dove, senza perdere in generalità, supponiamo che

$$P_0(0) = 1$$

A livello di schema di controllo modifichiamo quello originale (riportato in figura (3.13)) nella forma riportata in figura (3.16) la quale corrisponde alla legge di controllo

$$R(d)\Delta(d)u(t) = -[S(d) - P_0(d)X^{-1}K(\lambda)]y(t) + X^{-1}[K(1) - K(\lambda)]P_0(d)w(t) \quad (3.35)$$

Notiamo che con tale modifica della struttura del controllore le funzioni di trasferimento da w a y e da w a u rimangono immutate rispetto alle (3.19)–

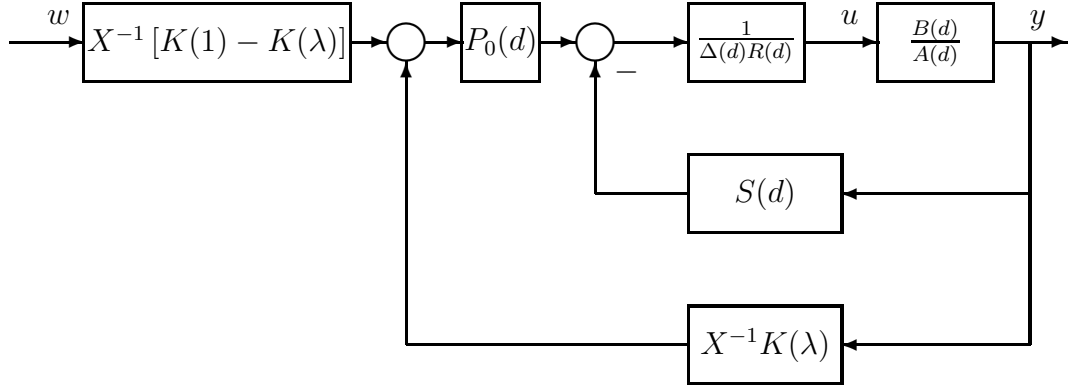


Figura 3.16: schema di regolazione 2-GDL con gestione del riferimento.

(3.20). Viceversa è facile verificare che

$$H_{yn} = \frac{X\Delta(d)A(d)R(d)}{P_0(d)[E(d) - K(\lambda)B(d)]} \quad (3.36)$$

$$H_{un} = \frac{[P_0(d)K(\lambda) - XS(d)]A(d)}{P_0(d)[E(d) - K(\lambda)B(d)]} \quad (3.37)$$

$$H_{ym} = \frac{X\Delta(d)B(d)R(d)}{P_0(d)[E(d) - K(\lambda)B(d)]} \quad (3.38)$$

$$H_{um} = \frac{X\Delta(d)A(d)R(d)}{P_0(d)[E(d) - K(\lambda)B(d)]} \quad (3.39)$$

Pertanto, conoscendo il contenuto spettrale dei disturbi, è possibile dare opportune caratteristiche in frequenza alle (3.36)–(3.39) agendo liberamente sul polinomio $P_0(d)$ senza peraltro alterare le caratteristiche delle funzioni di trasferimento da w a y e u . Nel caso in cui i disturbi siano di tipo stocastico e caratterizzate da opportune densità di probabilità (ad es. gaussiana), esistono criteri per scegliere ottimalmente $P_0(d)$.³

³In letteratura il problema è noto come *Controllo LQG* (Lineare Quadratico Gaussiano). Cfr. [?] oppure [AW84]

3.7.3 Approccio "pesi dinamici"

Vogliamo generalizzare il risultato del paragrafo precedente affrontando il problema da un altro punto di vista. Modifichiamo il costo (3.6) nella forma

$$J(x(t), \delta u_{[t, \infty)}) = \sum_{i=0}^{\infty} [H_y(d)\epsilon(t+i)]^2 + \rho [H_u(d)\delta u(t+i)]^2 \quad (3.40)$$

dove H_y e H_u sono polinomi strettamente hurwitziani nell'operatore d . Definiamo le variabili

$$y_H(t) := H_y(d)y(t)$$

$$\delta u_H(t) := H_u(d)\delta u(t)$$

$$w_H(t) := H_y(d)w(t)$$

$$r_H(t+i) := \lambda^i y_H(t) + (1 - \lambda^i) w_H(t+i)$$

e consideriamo il nuovo impianto

$$y_H(t) = \frac{B(d)H_y(d)}{\Delta(d)A(d)H_u(d)} \delta u_H(t)$$

Supponendo $w_H(t)$ costante come abbiamo fatto nel paragrafo 3.2, possiamo scrivere che

$$r_H(t+i) = \lambda^i y_H(t) + (1 - \lambda^i) w_H$$

e quindi applicare al nuovo impianto la legge di controllo (3.25) ottenendo

$$R_H(d)\delta u_H(t) = - [S_H(d) - X_H^{-1}K_H(\lambda)] y_H(t) + X_H^{-1} [K_H(1) - K_H(\lambda)] w_H \quad (3.41)$$

dove

$$K_H(\lambda) = \frac{B(\lambda)Hy(\lambda)}{E_H(\lambda)}$$

e

$$\Delta AH_u R_H + BH_y S_H = \frac{E_H}{X_H} \quad (3.42)$$

$$E_H^* E_H = \rho(\Delta AH_u)^*(\Delta AH_u) + (BH_y)^*(BH_y) \quad (3.43)$$

Si ottiene quindi

$$\hat{R}(d)\delta u(t) = -\hat{S}(d)y(t) + X_H^{-1}K_H(\lambda)H_y(d)y(t) + X_H^{-1}[K_H(1) - K_H(\lambda)]H_y(d)w(t) \quad (3.44)$$

dove

$$\begin{cases} \hat{R}(d) & := R_H(d)H_u(d) \\ \hat{S}(d) & := S_H(d)H_y(d) \end{cases}$$

Poniamo adesso

$$H_u(d) = H_y(d) = P_0(d).$$

Dalla (3.43) ricaviamo che $E_H(d) = P_0(d)E(d)$ e quindi che $X_H = E_H(0) = P_0(0)E(0) = X$ e $K_H(\lambda) = K(\lambda)$. La equazione diofantina (3.42) assume invece la forma

$$\Delta(d)A(d)\hat{R}(d) + B(d)\hat{S}(d) = X^{-1}P_0(d)E(d).$$

Confrontando quest'ultima equazione con la (3.34) e confrontando la (3.44) con la (3.35) possiamo concludere che i pesi dinamici $H_u(d) = H_y(d) = P_0(d)$ danno lo stesso effetto dell'introduzione del polinomio osservatore $P_0(d)$.

Nel caso più generale in cui $H_u(d)$ è diverso da $H_y(d)$ vale il seguente teorema:

Teorema 3.2 *Siano $H_u(d)$ e $H_y(d)$ polinomi strettamente hurwitziani. Sotto le ipotesi (3.12) oppure (3.13) la legge di controllo (3.41) porta ad una funzione di trasferimento*

$$H_{yw}(d) = \frac{X^{-1} [K(1) - K(\lambda)] H_y(1) B(d)}{E_H(d) - K(\lambda) H_y(d) B(d)} \quad (3.45)$$

asintoticamente stabile $\forall \lambda \in [0, 1)$.

Dimostrazione. Sostituendo $B(d)$ con $H_y(d)B(d)$, $A(d)$ con $H_u(d)A(d)$, $K(d)$ con $K_H(d)$ e $E(d)$ con $E_H(d)$ possiamo ripetere gli stessi ragionamenti fatti nel teorema (3.1) nel paragrafo 3.3. \square

Inoltre la funzione di trasferimento da w a y diventa

$$H_{yw}(d) = \frac{[K_H(1) - K_H(\lambda)] B(d) H_y(d)}{E_H(d) - K_H(\lambda) H_y(d) B(d)}$$

3.8 Legge di controllo con conoscenza del futuro del set–point $w(t)$

3.8.1 Introduzione

Nelle applicazioni esistono numerosi casi in cui l'evoluzione temporale della traiettoria da inseguire è nota a priori. Basti pensare ad esempio ad un manipolatore meccanico la cui testa debba compiere determinati spostamenti con assegnate velocità, oppure ad un processo biochimico in cui il profilo temporale che la temperatura deve assumere sia prefissato, ad esempio da un'operazione di ottimizzazione. Con sufficiente realismo possiamo quindi supporre che la traiettoria da inseguire $w(t)$ sia data *da programma*, cioè sia nota con un certo anticipo. Tale conoscenza può essere sfruttata per migliorare le prestazioni modificando la legge di controllo predittivo trovata nei paragrafi precedenti. Definiamo allora sull'orizzonte di predizione⁴ un nuovo riferimento $r(t+i)$ che raccordi l'uscita attuale $y(t)$ con la traiettoria $w(t+i)$.

3.8.2 La legge di controllo

Definiamo N come il numero di campioni futuri di $w(t)$ disponibili, campione presente incluso: al tempo t supponiamo cioè noti i $w(t+i)$ per $i = 0, 1, \dots, N-1$. Sorge quindi un quesito: come conciliare una conoscenza necessariamente *finita* di $w(t)$ con una legge di controllo predittivo che invece considera un costo definito su un orizzonte seminfinito? Abbiamo risolto il problema facendo l'approssimazione che $w(t)$ resti costante dall'ultimo

⁴Orizzonte sul quale viene valutato il funzionale di costo J , definito nella (3.6)

campione noto in poi:

$$r(t+i) = \lambda^i y(t) + (1-\lambda^i)w^a(t+i) \quad (3.46)$$

dove

$$w^a(t+i) := \begin{cases} w(t+i) & \text{per } i = 0, 1, \dots, N-1 \\ w(t+N-1) & \text{per } i \geq N \end{cases} \quad (3.47)$$

Possiamo giustificare questa approssimazione osservando che

- I termini $r(t+i)$ intervengono nella legge di controllo (3.24) con peso sempre minore per i crescente
- In molte applicazioni $w(t)$ è costante a tratti⁵ e quindi la approssimazione non sussiste.

Proposizione 3.1 *La legge di controllo LQ in forma di stato corrispondente al riferimento (3.46) è data da*

$$\begin{aligned} \delta u(t) = & X^{-1} [-Yx(t) + K(\lambda)y(t)] + \\ & X^{-1} \sum_{j=0}^{N-2} k_j (1-\lambda^j) [w(t+j) - w(t+N-1)] + \\ & X^{-1} w(t+N-1) [K(1) - K(\lambda)] \end{aligned} \quad (3.48)$$

dove $K(d)$ e $\{k_j\}$ sono definite come in (3.14) e (3.15)

⁵Ad esempio nelle applicazioni in cui il controllore viene progettato per mantenere una qualche grandezza ad un livello che viene variato di tanto in tanto. Conoscere il futuro di $w(t)$ significa informare il controllore con un certo anticipo del nuovo livello a cui si vuole portare l'uscita $y(t)$.

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che, per come è definito $r(t + i)$, rispetto alla legge di controllo (3.16) cambia soltanto il termine di feedforward. Facendo la trasformata sull'orizzonte di predizione si ha

$$\hat{w}_t^a(d) = \sum_{i=0}^{\infty} w^a(t + i)d^i = \sum_{i=0}^{N-1} w(t + i)d^i + d^N w(t + N - 1) \sum_{i=0}^{\infty} d^i$$

e

$$\hat{r}_t(d) = \frac{1}{1 - \lambda d} y(t) + \hat{w}_t^a(d) - \hat{w}_t^a(\lambda d);$$

inoltre

$$\prec \hat{v}_t(d) \succ = \prec K^*(d) [\hat{w}_t^a(d) - \hat{w}_t^a(\lambda d)] \succ$$

Essendo

$$\begin{aligned} \prec K^*(d) \hat{w}_t^a(\lambda d) \succ &= \prec K^*(d) \sum_{i=0}^{N-1} w(t + i) \lambda^i d^i \succ + \\ &\prec K^*(d) \sum_{i=N}^{\infty} w(t + N - 1) \lambda^i d^i \succ \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} k_j \lambda^j w(t + j) + w(t + N - 1) \sum_{i=N}^{\infty} k_i \lambda^i \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\prec \hat{v}_t(d) \succ &= \sum_{j=0}^{N-1} k_j(1 - \lambda^j)w(t + j) + w(t + N - 1) \sum_{i=N}^{\infty} k_i(1 - \lambda^i) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} k_j(1 - \lambda^j)w(t + j) + \\
&\quad w(t + N - 1) \left[\sum_{j=0}^{\infty} k_j(1 - \lambda^j) - \sum_{j=N}^{\infty} k_j(1 - \lambda^j) \right] \\
&= \sum_{j=0}^{N-2} k_j(1 - \lambda^j) [w(t + j) - w(t + N - 1)] + \\
&\quad w(t + N - 1) [K(1) - K(\lambda)]
\end{aligned}$$

□

Osserviamo che se $w(t + i)$ è costante per $i = 0, 1, \dots, N - 1$ oppure se $N = 1$ la (3.48) degenera nella (3.16).

3.8.3 Risultati simulativi

Abbiamo eseguito alcune simulazioni in ambiente MATLAB di cui riportiamo i risultati nelle figure (3.17)–(3.22). L'impianto considerato è descritto dalla funzione di trasferimento (3.22) a pagina 42.

Nelle figure (3.17)–(3.18) confrontiamo le risposte dell'impianto nel caso in cui si faccia uso del futuro di $w(t)$ e nel caso in cui non se ne faccia uso. Abbiamo considerato che $w(t)$ abbia una transizione da +1 a -1 e abbiamo

scelto

$$\rho = 1$$

$$\lambda = 0.6$$

$$N = 10$$

Ricordiamo poi che le leggi di controllo (3.16) e (3.48) prevedono una formulazione incrementale: nella catena di controllo è presente un integratore e la scelta del funzionale di costo J è volta a minimizzare le variazioni $\delta u(t)$ dell'ingresso.

Possiamo notare che quando si fa uso del futuro di $w(t)$

- Il controllore impone all'uscita $y(t)$ del sistema di compiere la transizione con un anticipo rispetto a $w(t)$.
- La somma dei quadrati degli errori di inseguimento è minore.
- L'intensità delle variazioni $\delta u(t)$ dell'ingresso viene diminuita.

In definitiva possiamo dire che il funzionale di costo J definito come nella (3.6) viene doppiamente ridotto.

Nelle figure (3.19)–(3.20) abbiamo modificato N portandolo a 30. Possiamo notare la presenza di *overshoot* immediatamente prima della transizione. Qualitativamente li abbiamo spiegati considerando che minimizzare $|\delta u(t)|$ significa minimizzare la pendenza della $u(t)$ e conseguentemente dell'uscita $y(t)$. Tenendo conto che gli errori di inseguimento sono pesati al quadrato e quindi che è indifferente che essi siano positivi o negativi,

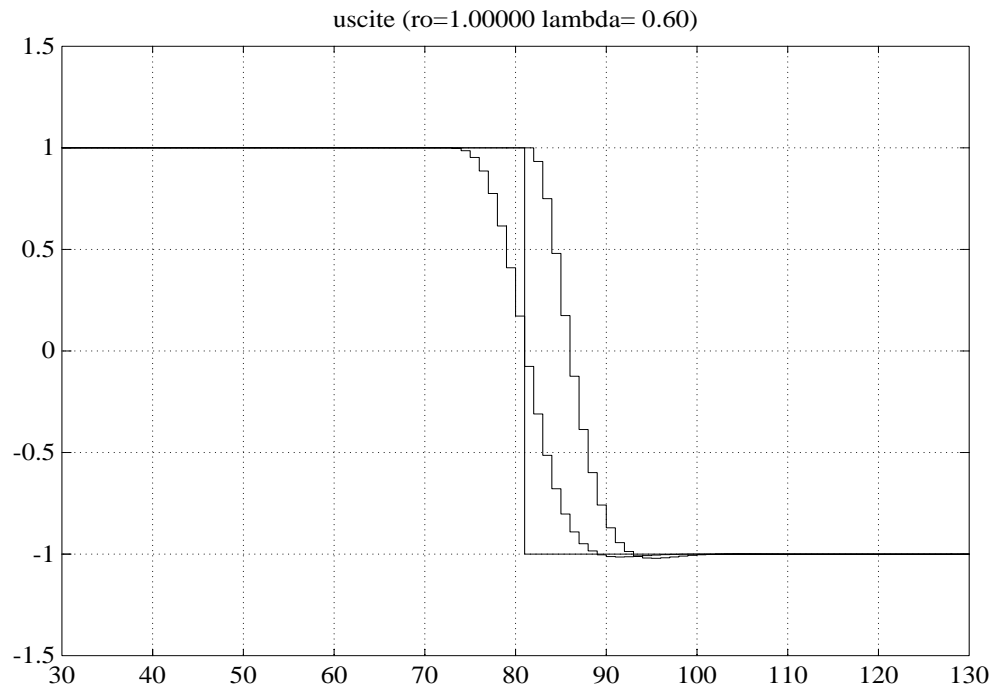


Figura 3.17: Confronto delle risposte per $N = 10$ e in assenza di conoscenza del futuro del riferimento ($N = 1$)

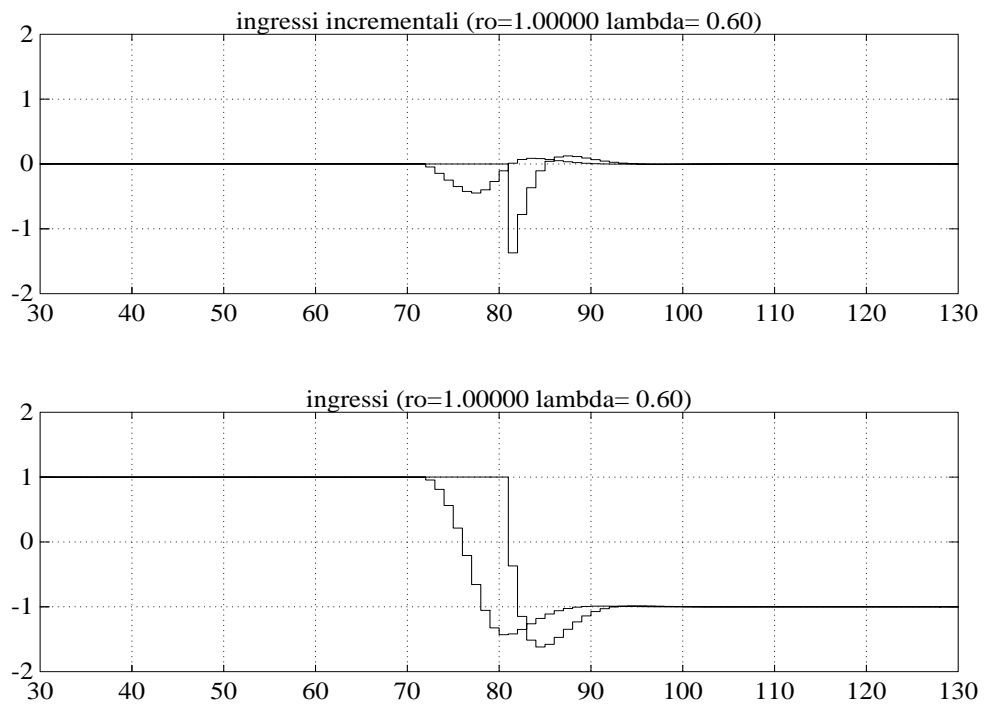


Figura 3.18: Confronto delle risposte per $N = 10$ e in assenza di conoscenza del futuro del riferimento ($N = 1$)

il risultato è che la manovra *ottimale* (secondo il funzionale di costo J) risulta essere prendere una leggera rincorsa nella direzione opposta prima di effettuare il cambio di livello. Inoltre, come vedremo più avanti, nella funzione di trasferimento ad anello chiuso $H_{yw}(z)$ compare al numeratore un polinomio $T(z, \lambda)$ dovuto al termine di feedforward: si può vedere che in generale, all'aumentare di N , le radici di tale polinomio escono fuori dal cerchio unitario facendo sì che la H_{yw} diventi a fase non minima. Rispetto ai risultati delle figure (3.17)–(3.18) osserviamo che l'aver cambiato N non comporta apprezzabili variazioni sulle forme dell'ingresso $u(t)$ e dell'ingresso incrementale $\delta u(t)$. Nelle figure (3.21)–(3.22) abbiamo poi variato λ dal valore 0.6 al valore 0.9. Osserviamo soltanto che gli unici effetti di tale variazione sono quelli di aumentare l'inerzia del sistema e attenuare $\delta u(t)$ e $u(t)$.

3.8.4 Legge di controllo in forma I/O

Analogamente a quanto fatto nel par. 3.6 riformuliamo il problema in forma ingresso/uscita, in modo da ottenere una legge di controllo dipendente dall'uscita $y(t)$ e dal set-point $w(t)$. Rispetto a quanto ricavato nel par. 3.6, l'aver definito un riferimento come nella (3.46) comporta soltanto una variazione del termine di feedforward. Definendo

$$T(z, \lambda) = t_0 + t_1 z + \dots + t_{N-1} z^{N-1}$$

con

$$t_j := \begin{cases} X^{-1} k_j (1 - \lambda^j) & \text{per } 0 \leq j \leq N - 2 \\ X^{-1} [K(1) - K(\lambda)] - \sum_{i=0}^{N-2} t_i & \text{per } j = N - 1 \end{cases}$$

si ha che

$$R(d)\delta u(t) = - [S(d) - X^{-1}K(\lambda)] y(t) + T(z, \lambda)w(t) \quad (3.49)$$

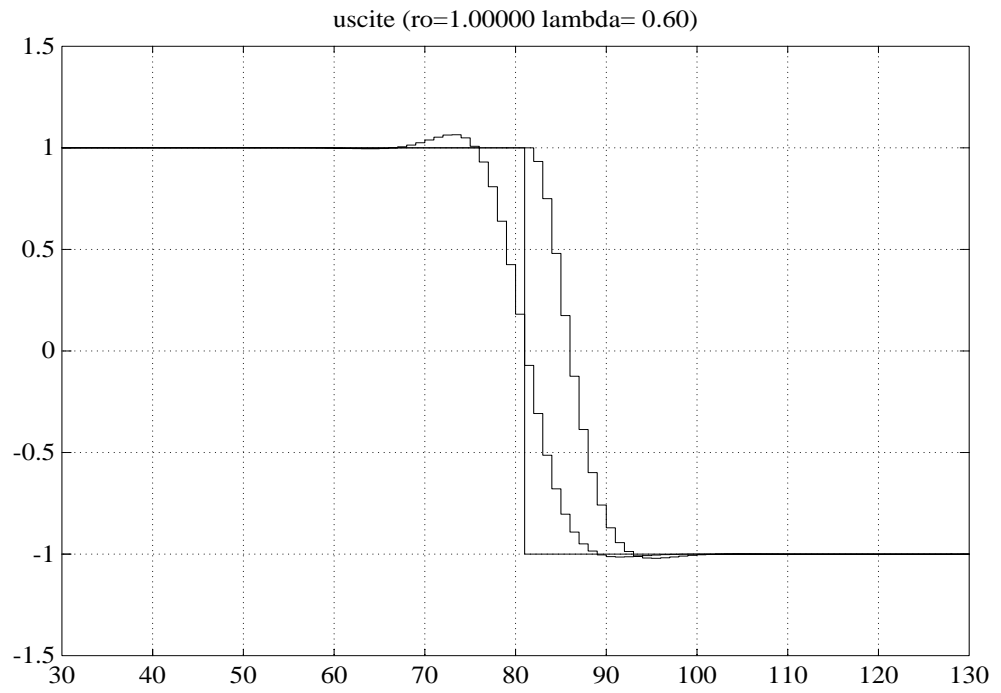


Figura 3.19: Confronto delle risposte per $N = 30$ e in assenza di conoscenza del futuro del riferimento ($N = 1$)

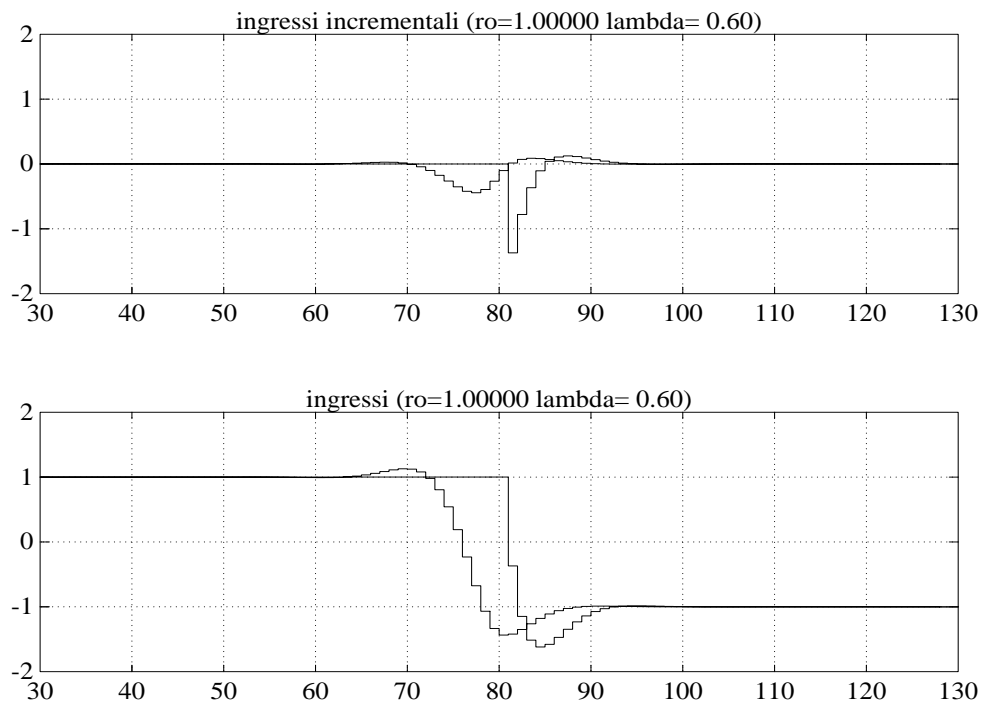


Figura 3.20: Confronto delle risposte per $N = 30$ e in assenza di conoscenza del futuro del riferimento ($N = 1$)

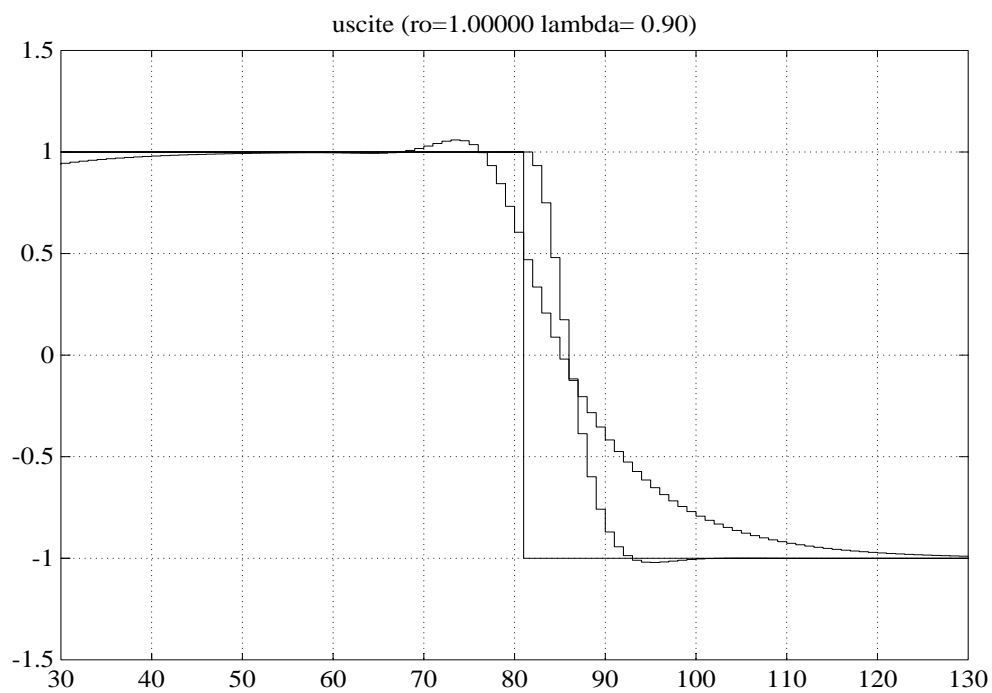


Figura 3.21: Risposte in presenza e in assenza di conoscenza del futuro del riferimento

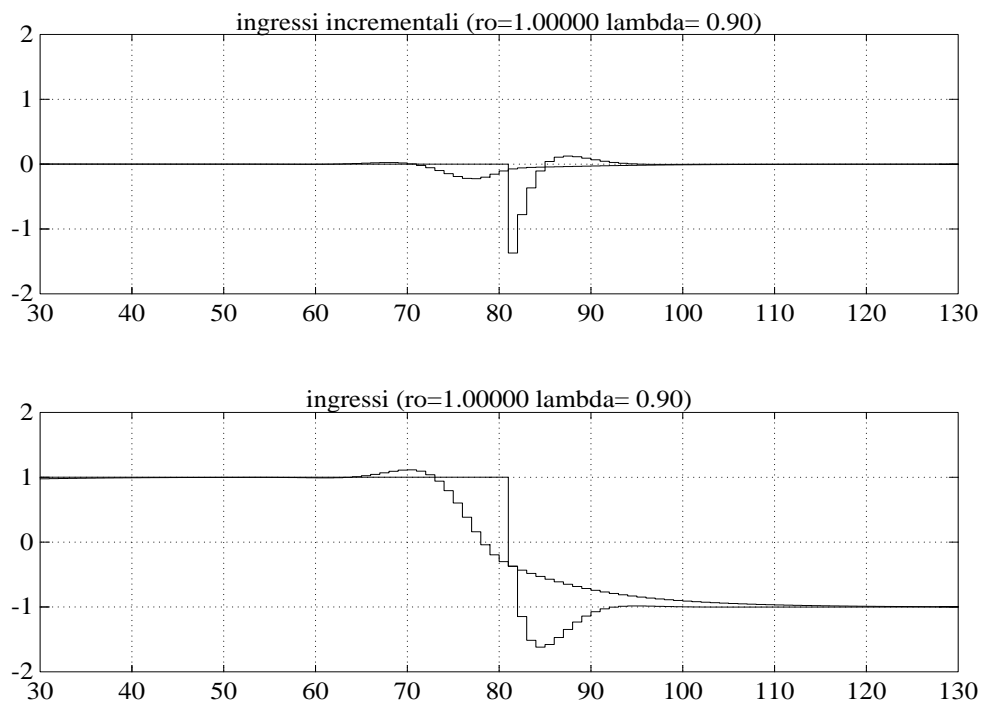


Figura 3.22: Risposte in presenza e in assenza di conoscenza del futuro del riferimento

dove $R(d)$ e $S(d)$ soddisfano la (3.27) [cfr. par. 3.6].

3.8.5 Simulazioni

Abbiamo implementato la (3.49) in ambiente SIMULAB [Cfr. par. 6.2] effettuando alcune simulazioni su un impianto a fase non minima con ritardo di trasporto. La funzione di trasferimento di tale impianto è

$$\bar{H}_{yu}(s) = \frac{1-s}{(1+s)(1+\frac{1}{15}s)^2} e^{-0.2s}$$

la cui discretizzazione con introduzione di ZOH (*Zero Order Hold*) e con un tempo di campionamento $T = 0.25$ è data da

$$H_{yu}(z) = \frac{-0.166911z^3 - 0.324578z^2 + 0.683178z + 0.0192282}{z^4 - 0.825836z^3 + 0.0371844z^2 - 0.000430743z}; \quad (3.50)$$

In figura (3.23) riportiamo una simulazione effettuata con

$$\lambda = 0.6$$

$$\rho = 0.1$$

$$N = 1$$

Si possono osservare i tipici andamenti dei sistemi a fase non minima eccitati da gradini: dopo una transizione dell'eccitazione esogena $w(t)$ l'uscita $y(t)$

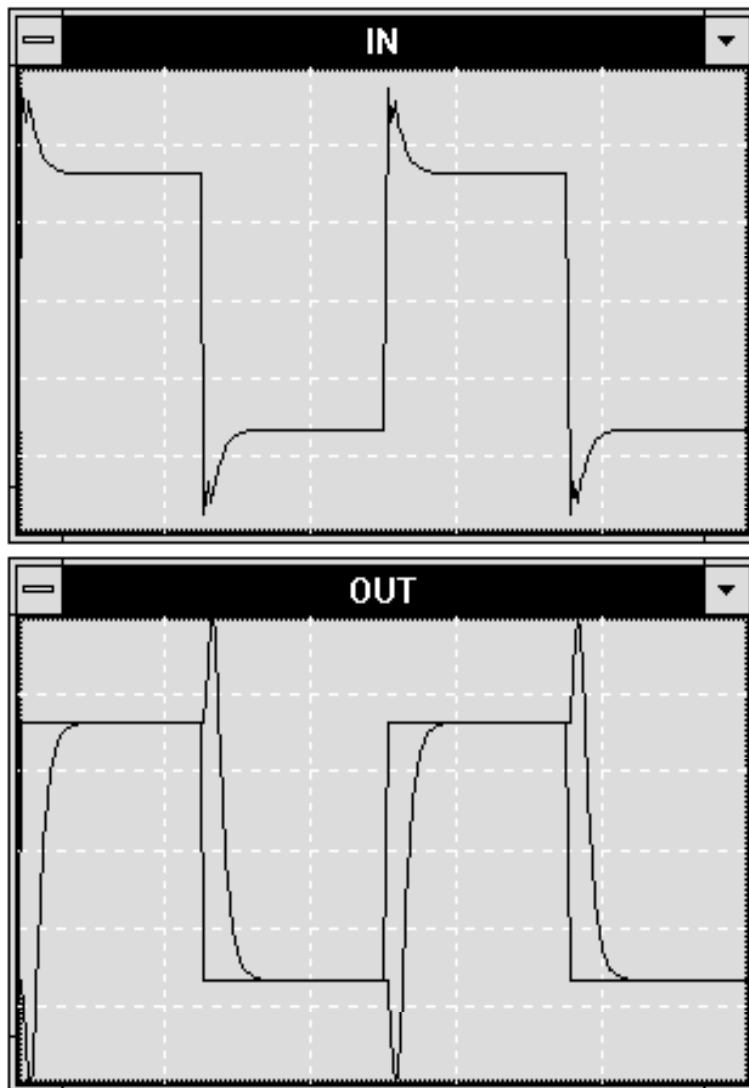


Figura 3.23: Comportamento del sistema in assenza di conoscenza del futuro ($N = 1$)

inizialmente si sposta dalla parte opposta.⁶ La funzione di trasferimento ad anello chiuso mantiene infatti gli zeri dell'impianto da controllare, che in questo caso giacciono (in parte) fuori dal cerchio unitario del piano complesso. Introducendo un valore di N maggiore di 1 (dando cioè al controllore una conoscenza del futuro di $w(t)$) si ha una pressoché totale rimozione di tali picchi. In figura (3.24) riportiamo una simulazione effettuata per $N = 30$.

3.8.6 Riduzione dell'effetto dei disturbi

Possiamo estendere i risultati trovati nel par. 3.7 alla legge di controllo (3.49), la quale, come già osservato, differisce dalla (3.25) soltanto per il termine di feedforward $T(z, \lambda)$. Anche in questo caso si presentano due diversi approcci

⁶In generale possiamo dire che data una funzione di trasferimento asintoticamente stabile

$$G(d) = d^\tau K \frac{\prod(1 - z_i d)}{\prod(1 - p_j d)}$$

la trasformata della risposta al gradino unitario é data da

$$F(d) = \frac{1}{1-d} G(d) = f_\tau d^\tau + f_{\tau+1} d^{\tau+1} + \dots$$

dove f_τ è il primo campione non nullo della risposta. Analizziamo il segno di $\frac{G(1)}{f_\tau}$, dove $G(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ è il valore di regime. Con semplici passaggi algebrici si può verificare che

$$\frac{G(1)}{f_\tau} = \frac{\prod(1 - z_i)}{\prod(1 - p_j)}$$

e quindi, essendo $|p_j| < 1$ per ipotesi di asintotica stabilità, si ha che la risposta al gradino parte in direzione opposta qualora

$$\prod(1 - z_i) < 0$$

il che è verificato ad esempio se l'impianto ha zeri reali di cui uno ed uno solo maggiore di 1. Osserviamo che gli zeri reali minori di -1, sebbene fuori dal cerchio di stabilità, non influiscono sull'andare o meno in direzione opposta della risposta al gradino.

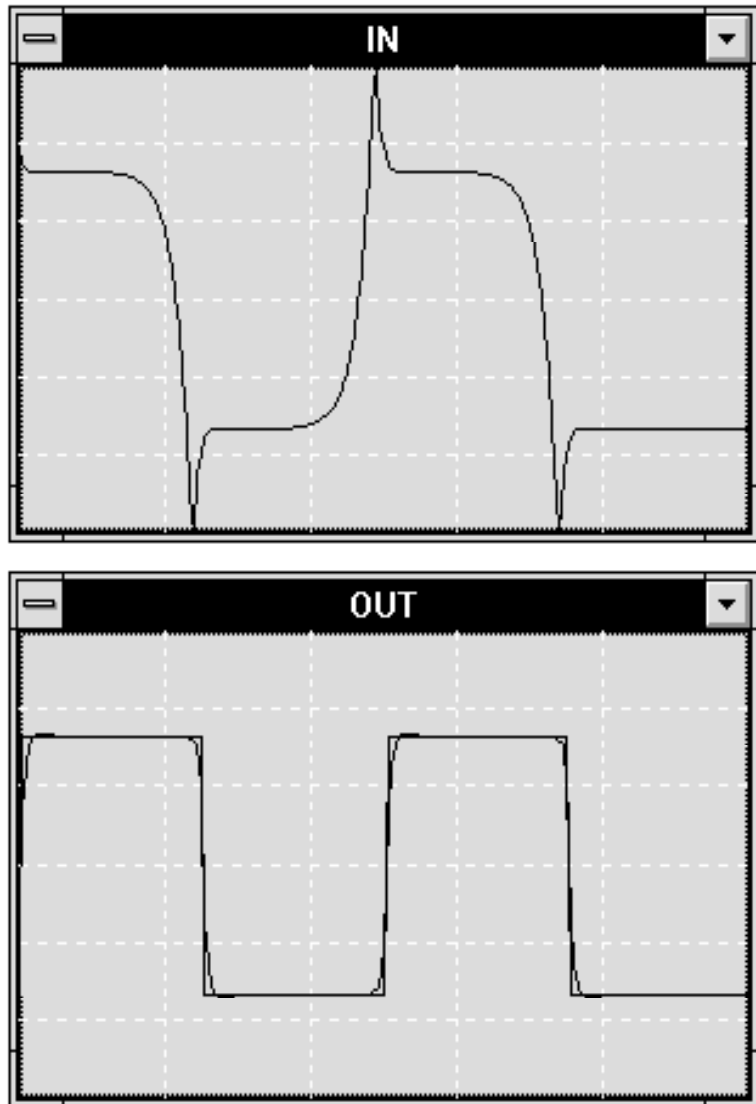


Figura 3.24: Comportamento del sistema con $w(t)$ noto $N = 40$ passi in anticipo

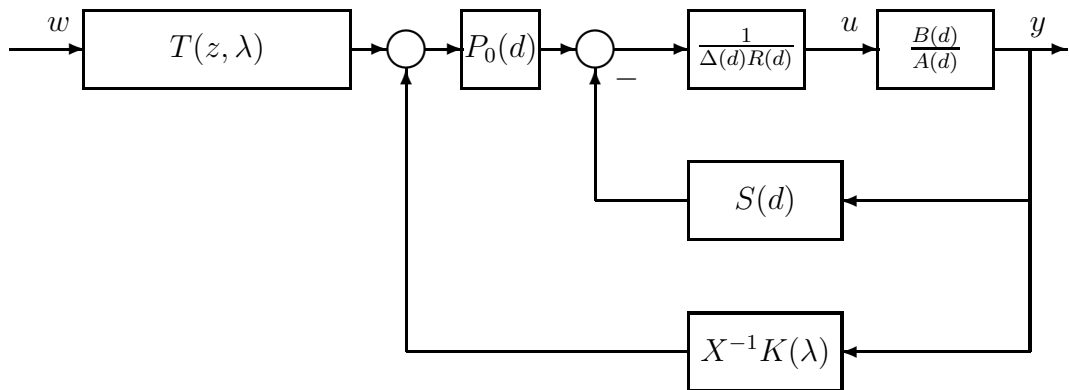


Figura 3.25: schema di regolazione 2-GDL con gestione del riferimento. Conoscenza di N campioni futuri di $w(t)$ e introduzione del polinomio $P_0(d)$

al problema.

Approccio "posizionamento dei poli". Modifichiamo i polinomi $R(d)$ e $S(d)$ in maniera tale che essi soddisfino la equazione diofantina

$$\Delta(d)A(d)R(d) + B(d)S(d) = X^{-1}P_0(d)E(d)$$

dove, senza perdere in generalità, supponiamo che

$$P_0(0) = 1$$

In figura (3.25) riportiamo il diagramma a blocchi corrispondente alla legge di controllo così modificata.

È immediato verificare che la funzione di trasferimento da w a y è

$$H_{yw} = \frac{T(z, \lambda)B(d)}{E(d) - K(\lambda)B(d)}$$

mentre le funzioni di trasferimento H_{yn} , H_{un} , H_{ym} , H_{um} rimangono immutate rispetto alle (3.36)–(3.39).

Approccio "pesi dinamici". Riprendiamo il funzionale di costo esattamente come nella (3.40):

$$J(x(t), \delta u_{[t, \infty)}) = \sum_{i=0}^{\infty} [H_y(d)\epsilon(t+i)]^2 + \rho [H_u(d)\delta u(t+i)]^2$$

Definiamo ancora le variabili

$$y_H(t) := H_y(d)y(t)$$

$$\delta u_H(t) := H_u(d)\delta u(t)$$

e il nuovo impianto

$$y_H(t) = \frac{B(d)H_y(d)}{\Delta(d)A(d)H_u(d)}\delta u_H(t)$$

dove questa volta abbiamo leggermente modificato la definizione di $w^a(t)$ ponendo

$$\begin{aligned} w_H^a(t+i) &= \begin{cases} H_y(d)w(t+i) & \text{per } 0 \leq i \leq N-1 \\ w_H(t+N-1) & \text{per } i \geq N \end{cases} \\ &=: H_y(d)w^a(t+i) \end{aligned}$$

Il riferimento per l'impianto modificato risulta pertanto essere

$$r_H(t+i) = \lambda^i y_H(t) + (1 - \lambda^i) w_H^a(t+i)$$

mentre la legge di controllo assume la forma

$$R_H(d)H_u(d)\delta u(t) = - [S_H(d) - X^{-1}K_H(\lambda)] H_y(d)y(t) + T(z, \lambda)w_H^a(t) \quad (3.51)$$

che per $H_u(d) = H_y(d) = P_0(d)$ porta ancora allo schema di figura (3.25).

3.9 Assegnazione di un grado prestabilito di stabilità

3.9.1 Legge di controllo

Consideriamo ancora un problema di controllo LQ per un generico impianto lineare tempo invariante a dati campionati descritto dalla equazione alle differenze (3.1). Vogliamo sintetizzare un controllore tale da garantire che i poli del sistema ad anello chiuso giacciono dentro a un cerchio di raggio $\frac{1}{\sigma}$, $\sigma > 1$ del piano complesso $\{z \in \mathbb{C}\}$. In termini più qualitativi vogliamo determinare una legge di controllo che renda l'impianto sufficientemente "pronto" e con un margine di stabilità più elevato. Per imporre allora che le variabili $\epsilon(t)$ e $\delta u(t)$ vadano a 0 almeno come $\frac{1}{\sigma^x}$ modifichiamo il funzionale di costo (3.6) nella forma

$$J_\sigma(x(t), \delta u_{[t, \infty)}) := \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^{2i} [\epsilon(t+i)^2 + \rho \delta u(t+i)^2]$$

$$\rho \geq 0$$

$$\sigma > 1$$

Supponiamo inoltre che l'impianto da controllare sia descrivibile con la rappresentazione di stato

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + G \delta u(k) \\ y(k) = H x(k) \end{cases}$$

Definiamo le seguenti variabili:

$$y_\sigma(k) := \sigma^k y(k)$$

$$\delta u_\sigma(k) := \sigma^k \delta u(k)$$

$$r_\sigma(k) := \sigma^k r(k)$$

$$x_\sigma(k) := \sigma^k x(k)$$

dove $r(k)$ è definito come nella (3.11). È facile verificare che tali y_σ , δu_σ e x_σ soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x_\sigma(k+1) = \Phi_\sigma x_\sigma(k) + G_\sigma \delta u_\sigma(k) \\ y_\sigma(k) = H x_\sigma(k) \end{cases}$$

dove

$$\Phi_\sigma := \sigma \Phi$$

$$G_\sigma := \sigma G$$

Possiamo quindi risolvere un problema LQ tradizionale [Cfr. par. (3.2)] per il nuovo impianto ottenendo per esso una soluzione

$$\delta \hat{u}_\sigma(t+i) = F_{LQ\sigma} x_\sigma(t+i) \quad \forall i = 0, 1, \dots$$

e quindi

$$\sigma^i \delta \hat{u}(t+i) = \sigma^i F_{LQ\sigma} x(t+i) \quad \forall i = 0, 1, \dots$$

$$\delta u(t) = F_{LQ\sigma} x(t)$$

ricavabile dalle relazioni

$$F_{LQ\sigma} = -X^{-1}Y$$

e

$$\begin{aligned} E_\sigma^*(d)E_\sigma(d) &= A_2^*(\sigma d)\rho A_2(\sigma d) + B_2^*(\sigma d)H'HB_2(\sigma d) \\ &= \rho A^*(\sigma d)A(\sigma d) + B^*(\sigma d)B(\sigma d) \end{aligned}$$

con X e Y rispettivamente uno scalare ed un vettore che risolvono l'equazione diofantina

$$XA_2(\sigma d) + YB_2(\sigma d) = E_\sigma(d)$$

Per il lemma (3.1) per $\lambda = 0$ si ha un polinomio ad anello chiuso dato da

$$\begin{aligned} E(d) &:= XA_2(d) + YB_2(d) \\ &= XA_{2\sigma}\left(\frac{d}{\sigma}\right) + YB_{2\sigma}\left(\frac{d}{\sigma}\right) \\ &= E_\sigma\left(\frac{d}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{3.52}$$

Essendo per costruzione $E_\sigma(d)$ hurwitziano, $E(d)$ non ha poli per $|d| < \sigma$. Risolvendo il problema LQ 2-GDL in maniera del tutto analoga a quanto effettuato nel par. 3.2 si ottiene la legge di controllo

$$\delta u(t) = -X^{-1} \left[Y - \frac{B(\lambda\sigma^2)}{E(\lambda\sigma^2)}H \right] x(t) + X^{-1} \left[\frac{B(\sigma^2)}{E(\sigma^2)} - \frac{B(\lambda\sigma^2)}{E(\lambda\sigma^2)} \right] w(t) \tag{3.53}$$

che porta ad un polinomio ad anello chiuso

$$\chi_{cl}(d) = E(d) - \frac{B(\lambda\sigma^2)}{E(\lambda\sigma^2)}B(d)$$

3.9.2 Analisi della stabilità

Teorema 3.3 *Sia il MCD* $[A(d), B(d)]$ *strettamente hurwitziano. La legge di controllo (3.53) rende l'impianto (3.1) asintoticamente stabile* $\forall \lambda \in [0, \frac{1}{\sigma})$ *e* $\forall \rho > 0$. *Per* $\rho = 0$ *il risultato continua a valere purché* $B(e^{j\omega}) \neq 0 \forall \omega \in [0, 2\pi)$

Dimostrazione. Il polinomio ad anello chiuso $\chi_{cl}(d)$ può essere riscritto come

$$\chi_{cl}(d) = E_\sigma \left(\frac{d}{\sigma} \right) - \frac{B_\sigma(\lambda\sigma)}{E_\sigma(\lambda\sigma)} B_\sigma \left(\frac{d}{\sigma} \right)$$

Possiamo ripercorrere gli stessi ragionamenti fatti nel par. (3.3). Sia $\Omega = \{s \in \mathbb{C} : |s| \leq \sigma\}$. Per il lemma (3.2) la funzione di variabile complessa

$$K(s) := \frac{B_\sigma\left(\frac{s}{\sigma}\right)}{E_\sigma\left(\frac{s}{\sigma}\right)}$$

è analitica per $|\frac{s}{\sigma}| \leq 1$ e quindi in Ω . Inoltre

$$\left| K(\sigma e^{j\omega}) \right|^2 = \frac{|B_\sigma(e^{j\omega})|^2}{|B_\sigma(e^{j\omega})|^2 + \rho |A_\sigma(e^{j\omega})\Delta(e^{j\omega})|^2} \leq 1.$$

Per il Principio di Massimo [Ahl53, pag. 134], la funzione $|K(s)|$ assume massimo su $\partial\Omega$, e quindi

$$\forall s \in \overset{\circ}{\Omega} \quad |K(s)| < \sup_{s \in \partial\Omega} |K(s)| \leq 1.$$

In particolare $\forall \alpha \in [0, \sigma)$

$$|K(\alpha)| = \left| \frac{B_\sigma\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)}{E_\sigma\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)} \right| < 1$$

Posto $\alpha := \lambda\sigma^2$ si può scrivere che

$$\left| \frac{B_\sigma(\lambda\sigma)}{E_\sigma(\lambda\sigma)} \right| < 1$$

Applicando il lemma di Rouché (3.3) si conclude che il polinomio $\chi_{cl}(d)$ non ha radici per $|d| < \sigma$ □

Osserviamo che per $\lambda \in (\frac{1}{\sigma}, 1)$ l'impianto può anche diventare instabile.

3.9.3 Guadagno in continua

Proposizione 3.2 *Il sistema (3.1) regolato mediante la legge di controllo (3.53) ha guadagno in continua unitario $\forall \sigma > 1$ e $\forall \lambda \in [0, \frac{1}{\sigma})$.*

Dimostrazione. La funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta essere

$$H_{yw}(d) = \frac{B(d) [K(\sigma^2) - K(\lambda\sigma^2)]}{E(d) - K(\lambda\sigma^2)B(d)}$$

dove $E(d)$ è definito nella (3.52). Poiché

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\sigma}{s}\right) E(\sigma s) &= E_{\sigma}^*(s) E_{\sigma}(s) \\ &= A_2^*(\sigma s) \rho A_2(\sigma s) + B_2^*(\sigma s) H' H B_2(\sigma s) \\ &= \rho A_2\left(\frac{\sigma}{s}\right) A_2(\sigma s) + B\left(\frac{\sigma}{s}\right) B(\sigma s) \end{aligned}$$

sostituendo $s = \frac{d}{\sigma}$ si ottiene

$$E(\sigma d^{-1}) E(d) = \rho A_2(\sigma^2 d^{-1}) A_2(d) + B(\sigma^2 d^{-1}) B(d)$$

$$E(\sigma^2) E(1) = B(\sigma^2) B(1)$$

e quindi

$$\begin{aligned} H_{yw}(1) &= \frac{B(1) \left[\frac{B(\sigma^2)}{E(\sigma^2)} - \frac{B(\lambda\sigma^2)}{E(\lambda\sigma^2)} \right]}{E(1) - \frac{B(\lambda\sigma^2)}{E(\lambda\sigma^2)} B(1)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Capitolo 4

Approccio alla gestione in linea del riferimento con variabili vincolate

4.1 Introduzione

Nel capitolo 3 si è visto come costruire un riferimento che eviti brusche variazioni e quindi forti escursioni delle variabili di sistema, tipicamente gli ingressi. Tale riferimento dipendeva da un parametro che veniva mantenuto costante durante tutta l'evoluzione dell'impianto. In questo capitolo viceversa daremo le principali idee e problematiche relative ad una gestione *in linea* di tale parametro o più in generale del riferimento stesso. L'idea trainante è quella di operare una scelta in linea basata su una predizione dell'evoluzione del sistema (che eventualmente può essere nonlineare e tempo-variante) comprendente l'impianto e un regolatore primario stabilizzante. Questo ci permetterà di soddisfare dei vincoli imposti su variabili di sistema (ad esempio limitare gli ingressi, impedire *overshoot* delle uscite, ecc.). Mostreremo i vari metodi di scelta predittiva del riferimento che abbiamo studiato nel corso del lavoro di tesi nell'ordine cronologico in cui sono stati concepiti, mettendone in evidenza dove necessario i difetti. Questo permetterà di giungere alla formulazione di un metodo che ha dato ottime prestazioni in termini di inseguimento e rispetto dei vincoli e che sarà descritto nel capitolo 5.

4.2 Algoritmo di scelta di λ : Metodo n. 1

4.2.1 Formulazione della legge di controllo

Alla luce dei risultati sviluppati nel capitolo 3 il primo metodo di gestione in linea del riferimento che abbiamo sperimentato consiste nello scegliere ad ogni passo nella legge di controllo (3.25) oppure (3.49) il valore λ che quindi diventa

un parametro $\lambda(t)$. Possiamo riassumere i due casi ponendo

$$r(t+i) := \lambda^i(t)y(t) + [1 - \lambda^i(t)]w^a(t+i) \quad (4.1)$$

dove $w^a(t+i)$ è una approssimazione di $w(t+i)$ ed è definita nella (3.47)

Sia $v(t)$ la variabile che vogliamo vincolare definita come

$$v(t) = \frac{B_v(d)}{A_v(d)}u(t)$$

Possiamo rappresentare la (3.25) e la (3.49) nella forma generica

$$R(d)\delta u(t) = - [S(d) - X^{-1}K(\lambda)]y(t) + T(z, \lambda)w(t) \quad (4.2)$$

con

$$\partial T(z, \lambda) = N - 1$$

corrispondente allo schema di figura (4.1)

È immediato verificare che la funzione di trasferimento da γ a u è data da

$$H_{u\gamma}(d) = \frac{XA(d)}{E(d)}$$

e che

$$\left[X^{-1}E(d) - X^{-1}K(\lambda)B(d) \right] v(t) = T(z, \lambda) \frac{B_v(d)}{A_v(d)} A(d) w(t)$$

Posto

$$w_3(t) := \frac{B_v(d)A(d)}{A_v(d)}w(t)$$

e ricordando che $X = E(0)$ si ha la equazione ricorsiva

$$v(t+i) = - \left[\left(\frac{E(d)}{E(0)} - 1 \right) - X^{-1}K(\lambda)B(d) \right] v(t+i) + T(z, \lambda)w_3(t+i).$$

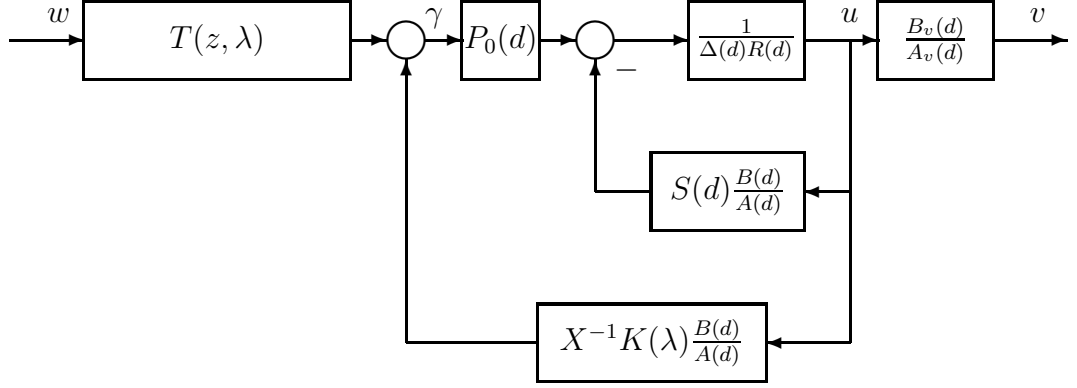


Figura 4.1: Controllo LQ 2-GDL con gestione del riferimento

Supponiamo che al tempo t siano disponibili $v(t-1)$ e $w(t+N)$. Definiamo inoltre

$$v(t+i|t, \lambda) :=$$

$$\begin{cases} v(t+i|t+i) & \text{per } i < 0 \\ X^{-1} \left[K(\lambda) \sum_{j=1}^{n_b} b_j v(t+i-j|t, \lambda) \right] - \\ X^{-1} \left[\sum_{j=1}^{n_e} e_j v(t+i-j|t, \lambda) \right] + T(z, \lambda) w_3(t+i) & \text{per } i \geq 0 \end{cases}$$

dove abbiamo ipotizzato $B(0) = 0$.

Definiamo poi con M il numero di passi sul quale viene effettuata la predizione che verifica il soddisfacimento dei vincoli. Verrà selezionato un valore $\lambda(t)$ tale che $v(t+i)$ soddisfa i vincoli per $i = 0, 1, \dots, M$.

L'algoritmo di scelta del parametro $\lambda(t)$ può essere così descritto:

1. Acquisisci $w_3(t + M)$ e $v(t - 1)$

2. $\lambda \leftarrow 0$

3. $i \leftarrow 0$

4. $v(t + i|t, \lambda) =$

$$X^{-1} \left[K(\lambda) \sum_{j=1}^{n_b} b_j v(t + i - j|t, \lambda) - \sum_{j=1}^{n_e} e_j v(t + i - j|t, \lambda) \right] + T(z, \lambda) w_3(t + i)$$

5. $v(t + i|t, \lambda)$ soddisfa il vincolo ?

NO: Cambia λ e vai a 3

SI: $i \leftarrow i + 1$

6. $i = M + 1$?

NO: Vai a 4

SI: $\lambda(t) \leftarrow \lambda$

7. Stop

L'algoritmo prevede la possibilità di mettere qualsiasi tipo di vincolo sulla variabile $v(t)$. La nostra scelta è stata quella di porre

$$|v(t + i)| \leq V_{max} \quad \forall i = 0, 1, \dots, M$$

Poniamo in evidenza il fatto che viene selezionato il più piccolo valore di λ che permette il soddisfacimento dei vincoli in modo da avere una risposta del sistema più veloce possibile.

Notiamo inoltre che è immediato generalizzare l'algoritmo al caso in cui le variabili vincolate siano più di una. Dette $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ tali variabili sarà sufficiente modificare i passi n. 4 e 5 ponendo

4. Calcola $v_k(t + i|t, \lambda) \forall k = 1, 2, \dots, n$
5. $v_k(t + i|t, \lambda)$ soddisfa il vincolo $\forall k$?

Per quanto riguarda la scelta di λ abbiamo definito un insieme finito di valori che esso può assumere. In questo modo si può avere una stima del tempo massimo che l'algoritmo può impiegare nella scelta del parametro e quindi dell'ingresso $u(t)$. Tale tempo è interessante perché pone un limite superiore alla frequenza di campionamento dell'impianto fisico oggetto della regolazione. Inizialmente si è scelta una griglia G di valori distribuita linearmente sull'intervallo $[0,1)$:

$$\lambda \in G := \{0, \mu, 2\mu, \dots, m\mu\}, (\text{es : } \mu = 0.08)$$

con la condizione di porre $\lambda = 1$ qualora nessuno dei valori della griglia produca un riferimento ammissibile.

Nel capitolo 3 abbiamo visto come variano le risposte al gradino al variare del parametro λ fra 0 e 1, e si è notato come la sensibilità rispetto a λ cresca quando esso è in prossimità del valore 1. Si è quindi visto essere più proficuo porre, a parità di numero di elementi costituenti la griglia,

$$G = \{0, 1 - \mu, 1 - \mu^2, \dots, 1 - \mu^{m_1}\}$$

cioè una griglia di tipo esponenziale che quindi risulta molto fitta in prossimità del valore 1 e molto grossolana vicino a 0. Per quanto riguarda la scelta della variabile $v(t)$ abbiamo considerato tre casi:

- $B_v(d) = 1, A_v(d) = 1$: vincoli su $u(t)$
- $B_v(d) = 1 - d, A_v(d) = 1$: vincoli su $\delta u(t)$
- $B_v(d) = B(d), A_v(d) = A(d)$: vincoli su $y(t)$

Dalle simulazioni è risultato che più i vincoli sono stringenti meno questi vengono rispettati. Il motivo di questo è da ricercarsi nel fatto che solo partendo da uno stato nullo (o almeno di regime costante) porre λ molto vicino o uguale a 1 provoca debolissime variazioni delle variabili dell'impianto; in condizioni dinamiche, come ad esempio durante i transitori, questo non è più vero. Basti pensare ad esempio ad un sistema la cui uscita $y(t)$ stia crescendo (ad esempio $y(t)$ potrebbe essere la posizione di una massa in movimento): il porre $\lambda = 1$ significa assumere $r(t + i) \equiv y(t)$ e quindi chiedere all'uscita dell'impianto di rimanere dov'è, il che potrebbe richiedere ingressi troppo elevati per i vincoli stabiliti (fermare la massa in movimento può richiedere l'applicazione di forze troppo intense).

Un altro aspetto riguarda la scelta del parametro M . Porre M troppo piccolo significa in qualche modo "vivere alla giornata", nel senso che si rischia di portare lo stato dell'impianto in regioni da cui dopo pochi passi è impossibile muoversi senza violare i vincoli. Viceversa porre M troppo elevato è dannoso per due motivi. Il primo è che si ottiene un controllore troppo "cauto", cioè che mantiene $v(t)$ molto lontana dai vincoli al prezzo di prestazioni assai scadenti nell'inseguimento della traiettoria. La seconda è che la predizione procede nel futuro usando un λ costante su tutti i passi $t + i$, mentre nella realtà è assai probabile che λ cambierà; più in là si va allora nella predizione più questa si discosterà da ciò che avverrà di fatto, con la conseguenza che diventa assurdo andare a verificare il rispetto dei vincoli su grandezze fasulle.

Facciamo adesso alcune considerazioni sulla scelta del parametro ρ e più in generale sulla legge di controllo costituente il primo anello di regolazione. Questa viene calcolata prima della messa in funzione effettiva del controllore e quindi non è più modificabile *on line*. Scegliendo una legge di controllo che rende il sistema troppo pronto con conseguenti valori elevati delle variabili vincolate fa sì che le escursioni del parametro λ siano tutte concentrate in prossimità del valore 1, rendendo meno versatile la scelta del parametro e richiedendo una griglia più fine verso tale valore. Oltre a ciò possiamo osservare che quando λ si avvicina a 1 la legge di controllo primaria viene in qualche modo "snaturata", cioè perde le caratteristiche per la quale era stata progettata.

Viceversa una legge di controllo primaria che rende il primo anello troppo lento provoca un *tracking* eccessivamente scadente. Il parametro λ si mantiene costantemente a 0 o comunque su valori molto piccoli perdendo quindi il suo ruolo principale che è quello di aumentare l'inerzia del primo anello di regolazione solo quando è necessario. Tutti i vantaggi derivanti dall'aver un regolatore con gestione in linea del riferimento vanno quindi perduti.

In definitiva la regola da seguire è quella di progettare una legge di controllo primaria che, con i vincoli imposti, faccia in modo che il parametro λ abbia una escursione che abbraccia il più possibile l'intervallo $[0, 1)$.

Nello studiare il comportamento della legge di controllo testè determinata si sono prese in considerazioni due casi:

- $y(t)$ si suppone nota al tempo t per il calcolo di $\lambda(t)$ e quindi di $u(t)$.
- Al tempo t si suppone nota soltanto $y(t - 1)$.

Nel secondo caso si può supporre che non ci sia sfasamento tra l'istante in cui

si misura l'uscita $y(t)$ (che in genere richiede una conversione A/D) e l'istante in cui si fornisce all'impianto l'ingresso $u(t)$ calcolato durante l'intero intervallo di campionamento appena trascorso. In assenza di incertezze sul modello e di disturbi sulle variabili del sistema i due casi sono evidentemente equivalenti.

4.2.2 Simulazioni

Le simulazioni sono state effettuate in ambiente SIMULAB [cfr. par. 6.2], nel quale è stato possibile implementare l'algoritmo di scelta di λ con una funzione scritta in linguaggio MATLAB. In generale vengono fatti due tipi di simulazione. La prima è in assenza di vincoli (e conseguentemente $\lambda(t) \equiv 0$) e serve per capire che tipo di vincoli possano essere imposti. Poniamo in evidenza il fatto che l'aver $\lambda = 0$ significa regolare l'impianto H_{yu} con un controllo LQ a 2 GDL. La seconda simulazione viene effettuata attivando dei vincoli che in generale per $\lambda(t) \equiv 0$ sarebbero stati ecceduti.

Esempio 4.1

Abbiamo considerato l'impianto (3.22) scegliendo

$$M = 4$$

$$N = 1$$

$$\rho = 1$$

$$v(t) = u(t)$$

$w(t)$ =onda quadra di pulsazione 0.08 rad/s e ampiezza 1

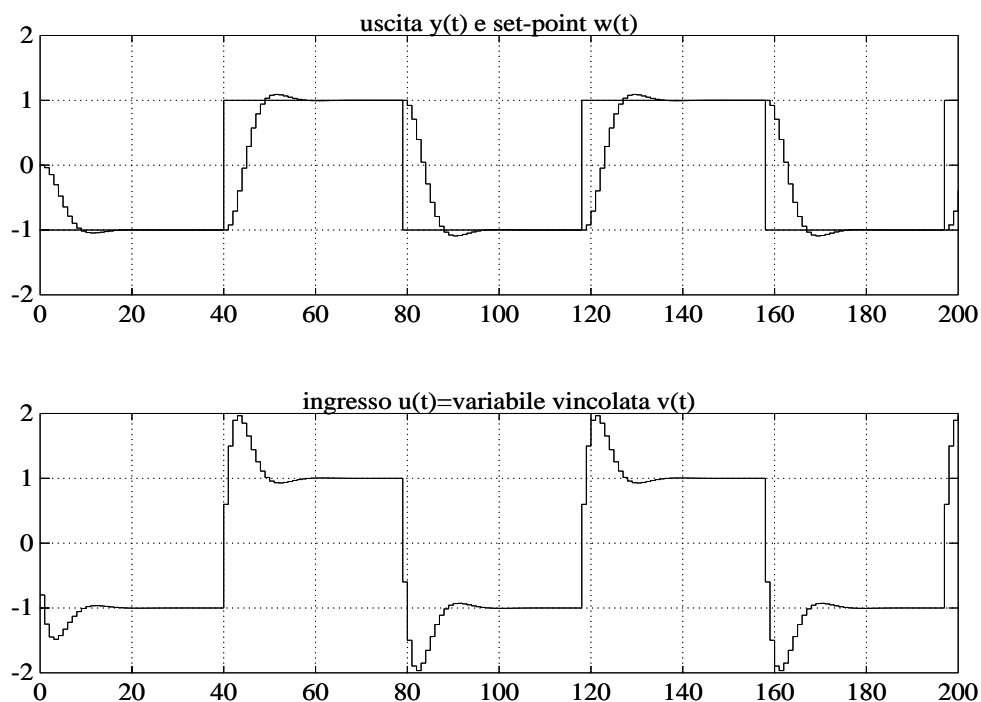


Figura 4.2: Simulazione esempio 4.1. $y(t)$, $u(t)$ in assenza di vincoli

In figura (4.2) e (4.3) riportiamo i risultati simulativi in assenza di vincoli, mentre in figura (4.4) e (4.5) si può osservare come variano le forme d'onda ponendo

$$V_{max} = 1.05$$

Si può notare come lo stringere i vincoli provochi un degrado delle prestazioni nell'inseguimento. Questo è un concetto del tutto generale e naturale: minori sono i gradi di libertà che ha l'ingresso peggiore è l'inseguimento.

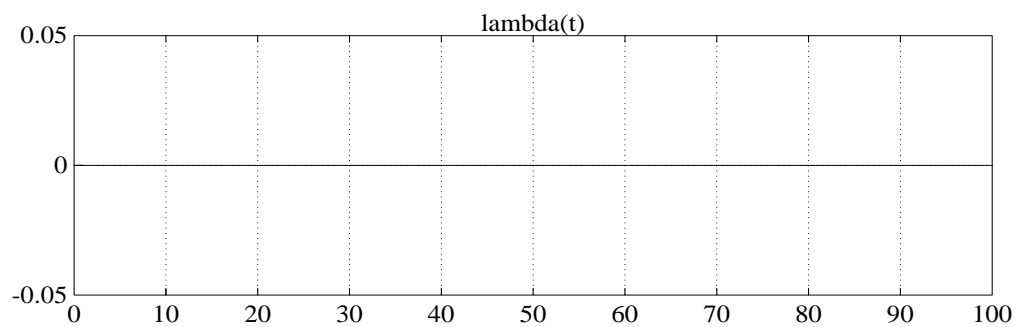


Figura 4.3: Simulazione esempio 4.1. $\lambda(t)$ in assenza di vincoli

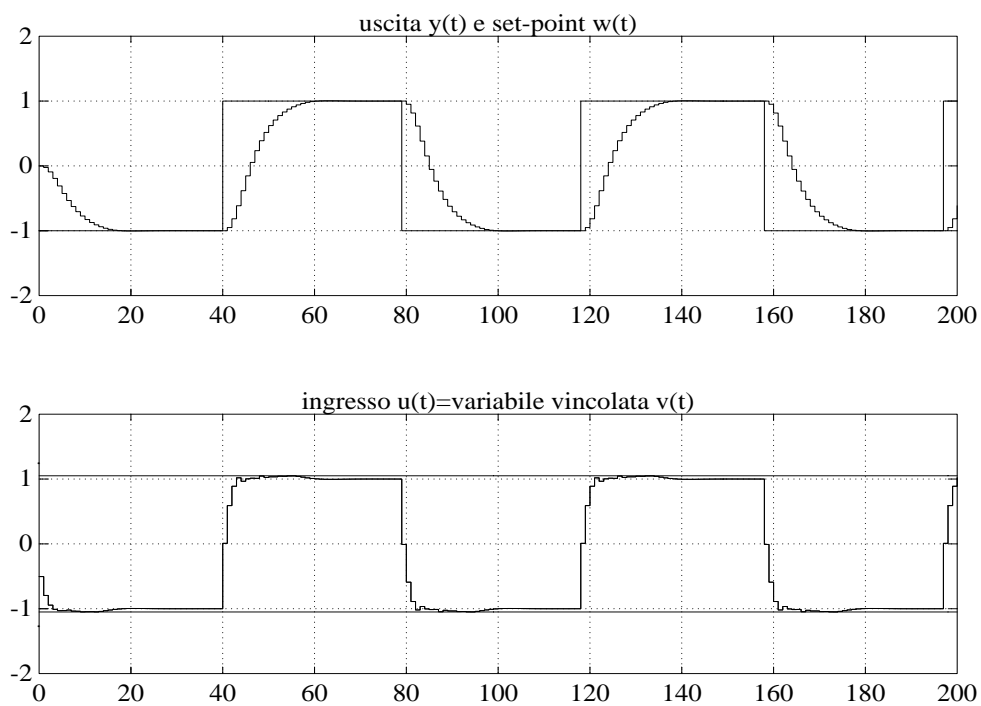


Figura 4.4: Simulazione esempio 4.1. $y(t)$, $u(t)$ in presenza del vincolo $|u(t)| \leq 1.05$

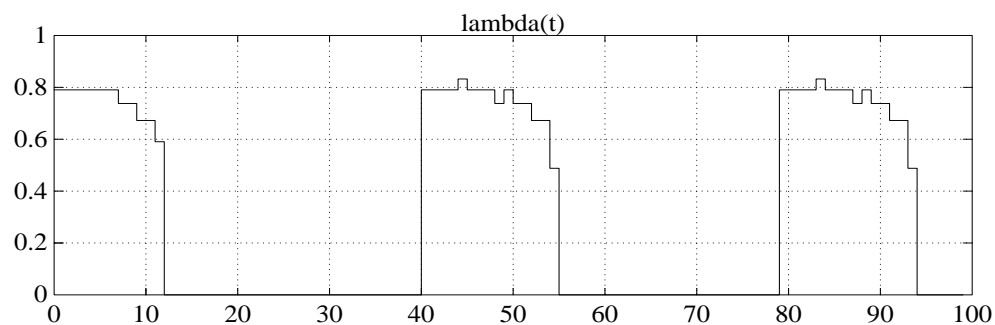


Figura 4.5: Simulazione esempio 4.1. $\lambda(t)$ in presenza del vincolo $|u(t)| \leq 1.05$

Esempio 4.2

Abbiamo considerato un impianto con poli instabili descritto dalla funzione di trasferimento

$$H_{yu}(d) = \frac{d}{1 - 2.3d^{-1} + 1.32d^{-2}} \quad (4.3)$$

per il quale abbiamo scelto

$$M = 10$$

$$N = 1$$

$$\rho = 0.1$$

$$v(t) = u(t)$$

$w(t)$ =onda quadra di pulsazione 0.1579 rad/s e ampiezza 14

In figura (4.6) e (4.7) riportiamo i risultati simulativi in assenza di vincoli; in

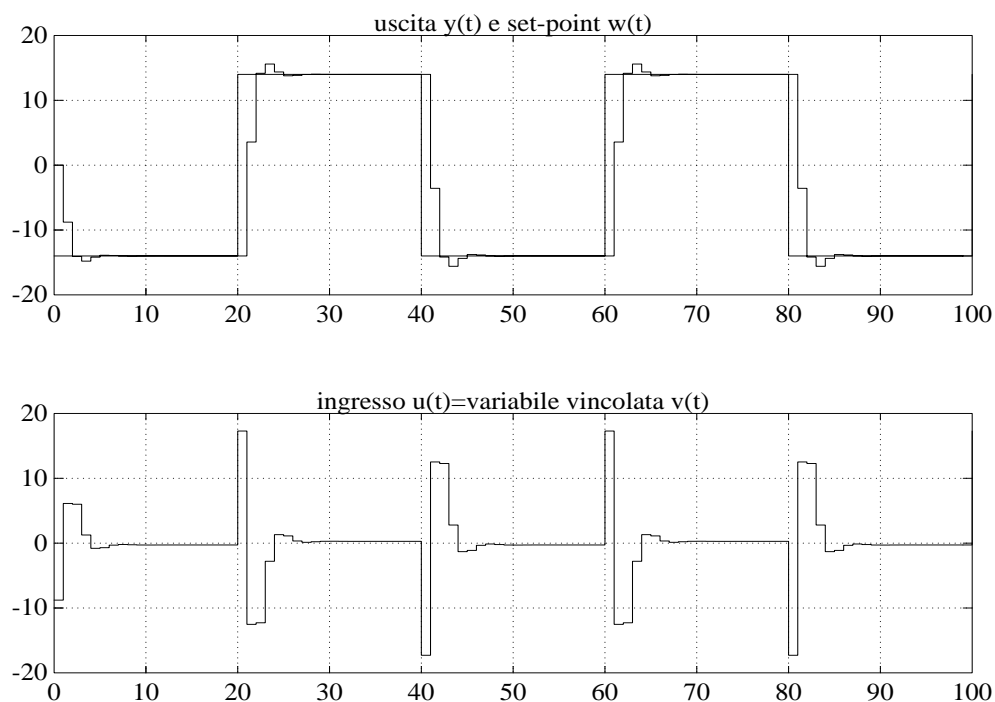


Figura 4.6: Simulazione esempio 4.2. $y(t)$, $u(t)$ in assenza di vincoli

figura (4.8) e (4.9) si può osservare come variano le forme d'onda ponendo

$$V_{max} = 6$$

e in figura (4.10) e (4.11) ponendo

$$V_{max} = 0.3$$

Come risulta dalle figure (4.8)–(4.11), stringendo il vincolo la qualità dell'inseguimento degrada. Questa tecnica inoltre non riesce ad evitare che i vincoli siano violati qualora risultino troppo stringenti, come in figura (4.10), sebbene riesca a ridurre notevolmente l'intensità degli ingressi.

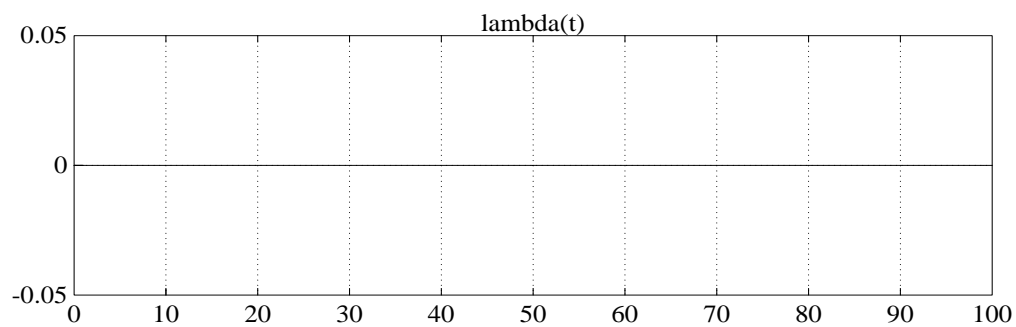


Figura 4.7: Simulazione esempio 4.2. $\lambda(t)$ in assenza di vincoli

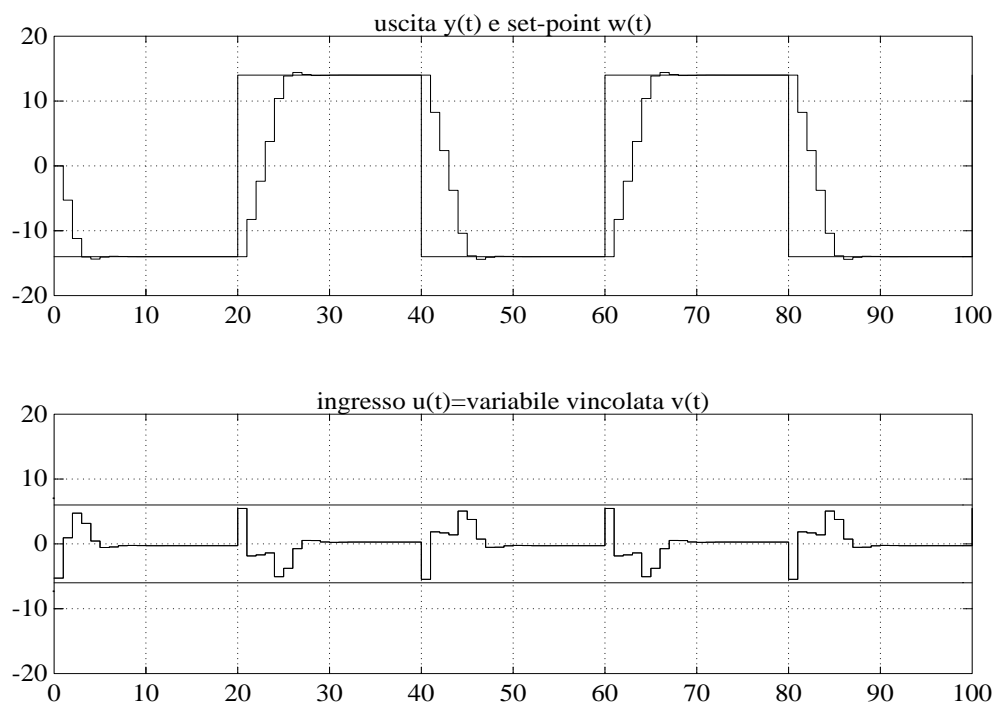


Figura 4.8: Simulazione esempio 4.2. $y(t)$, $u(t)$ in presenza del vincolo $|u(t)| \leq 6$

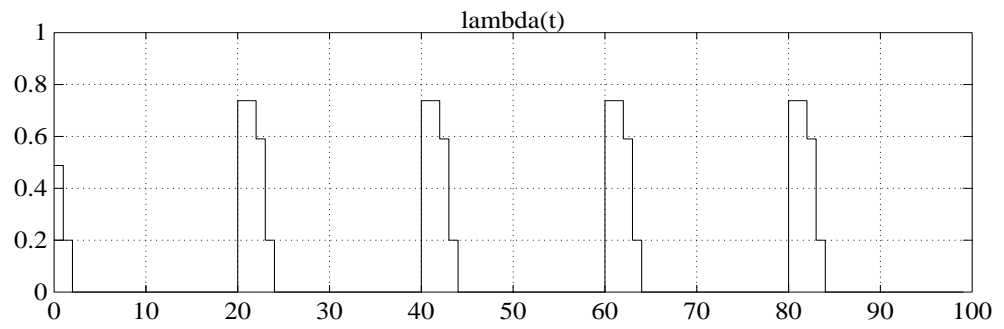


Figura 4.9: Simulazione esempio 4.2. $\lambda(t)$ in presenza del vincolo $|u(t)| \leq 6$

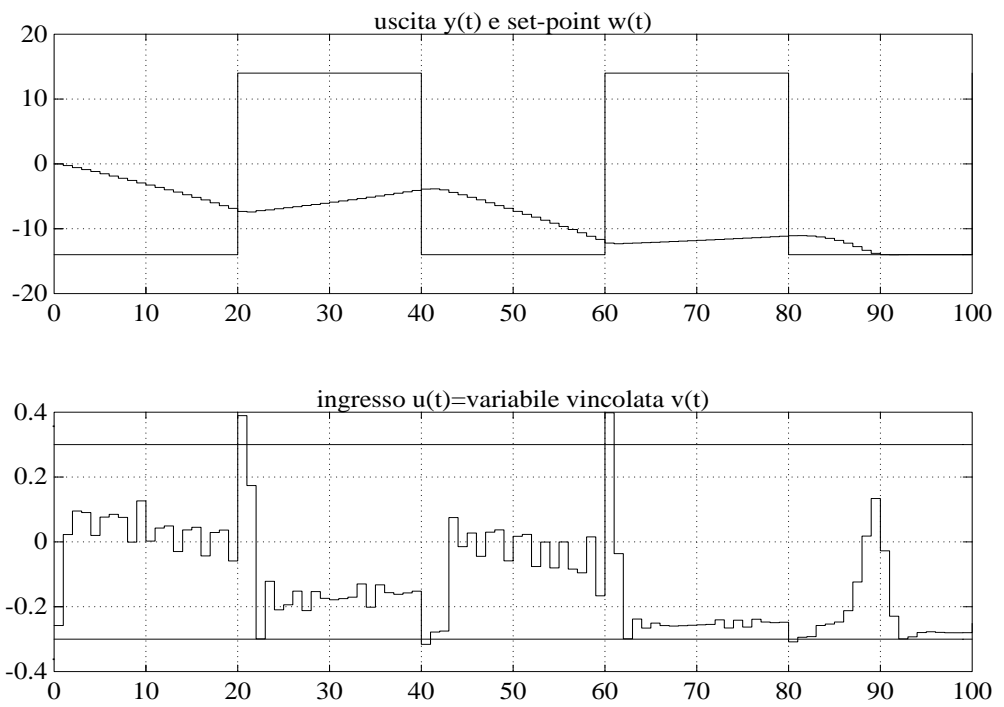


Figura 4.10: Simulazione esempio 4.2. $y(t)$, $u(t)$ in presenza del vincolo $|u(t)| \leq 0.3$

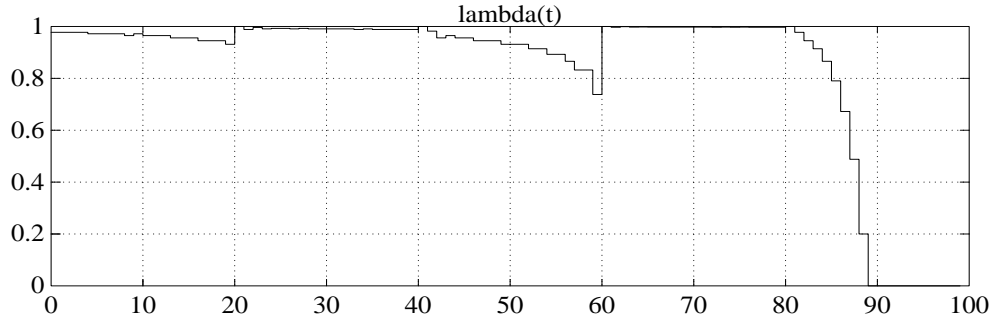


Figura 4.11: Simulazione esempio 4.2. $\lambda(t)$ in presenza del vincolo $|u(t)| \leq 0.3$

4.3 Algoritmo di scelta di λ : Metodo n. 2

Rispetto al metodo precedente viene mutato il meccanismo di predizione. Anziché iterare la legge di controllo (4.2) nella quale il riferimento

$$r(t+i) := \lambda^i(t)y(t) + (1 - \lambda^i(t))w^a(t+i)$$

non compare esplicitamente, si è ripresa la legge di controllo LQ 2-GDL (3.24) che riscriviamo nella forma

$$R(d)\delta u(t) = -S(d)y(t) + X^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} k_i r(t+i|t, \lambda(t)) \quad (4.4)$$

nella quale la sommatoria viene arrestata ad un indice $N-1$ ¹ (in realtà la sommatoria potrebbe partire da $i=1$, essendo per ipotesi $B(d)=1$ e quindi $k_0=0$). Definendo

$$f(t, \lambda(t)) := \frac{\sum_{i=0}^{N-1} k_i r(t+i, \lambda(t))}{K(1) \sum_{i=0}^{N-1} k_i}$$

la legge di controllo usata diventa essere

$$R(d)\delta u(t) = -S(d)y(t) + X^{-1}f(t, \lambda(t)) \quad (4.5)$$

¹Ad esempio si può prendere N tale che K_N è minore della precisione di macchina

dove la normalizzazione per $K(1) \sum_{i=0}^{N-1} k_i$ è stata apportata in modo che il guadagno in continua continui ad essere unitario ². La differenza sostanziale con il metodo n.1 è quindi che là si sceglieva un $\lambda(t)$ ammissibile, qui si sceglie un riferimento $r(t+i|t, \lambda(t))$ ammissibile nel senso che la sequenza degli

$$f(t+j) = \sum_{i=0}^{N-1} k_i r(t+i+j, \lambda(t))$$

, inserita nella legge di controllo (4.5), dà luogo ad una predizione in cui i vincoli sulla variabile $v(t+i)$ sono rispettati. La differenza allora si evidenzia al momento della predizione: con il metodo n. 1 ad ogni passo di predizione

²A regime $y_\infty = r_\infty, \delta u_\infty = 0$. Ponendo

$$R(d)\delta u(t) = -S(d)y(t) + \frac{X^{-1}}{\alpha} \sum_{i=0}^{N-1} r(t+i)$$

si ha

$$0 = -S(1) + \frac{X^{-1}}{\alpha} \sum_{i=0}^{N-1} k_i$$

e quindi

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{X^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} k_i}{S(1)} \\ &= \frac{X^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} k_i B(1)}{S(1)B(1) + \Delta(1)A(1)R(1)} \\ &= \frac{X^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} k_i B(1)}{X^{-1}E(1)P_0(1)} \\ &= K(1) \sum_{i=0}^{N-1} k_i \end{aligned}$$

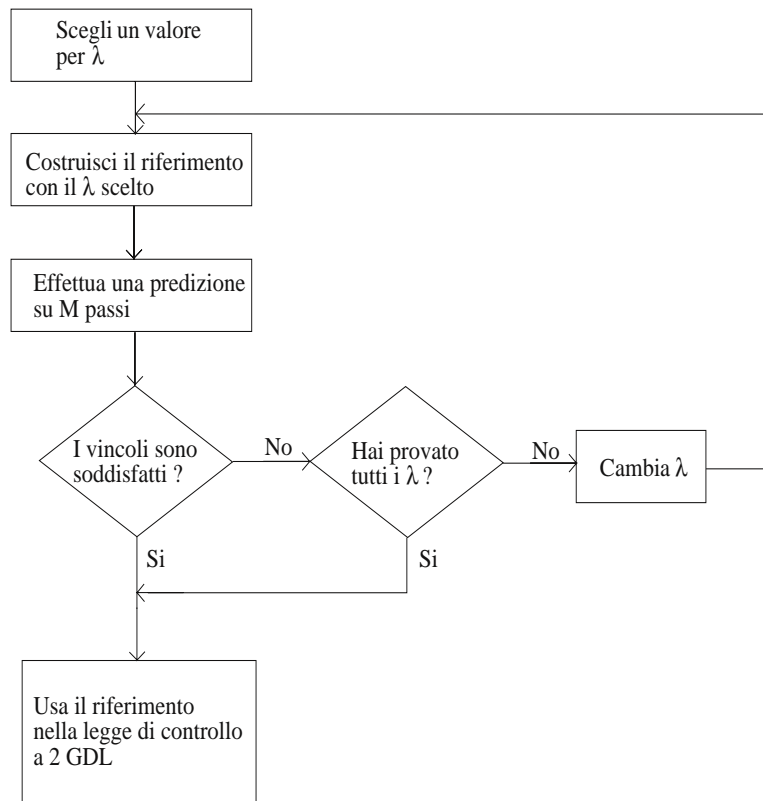


Figura 4.12: Scelta in linea del riferimento

$t + j$ si sceglie la sequenza

$$\left\{ r(t + j + i) = \lambda^i y(t + j) + (1 - \lambda^i) w^a(t + j + i) \right\}_{j=0}^{N-1}$$

qui si sceglie

$$\left\{ r(t + j + i) = \lambda^{i+j} y(t) + (1 - \lambda^{i+j}) w^a(t + j + i) \right\}_{i=0}^{N-1}$$

In figura (4.12) riportiamo il diagramma logico con cui viene effettuata la scelta in linea del riferimento.

Abbiamo distinto il caso in cui il futuro della variabile $w(t)$ sia noto in anticipo da quello in cui non lo sia. Per semplicità abbiamo posto

$$w^a(t+i) := \begin{cases} w(t+i) & \text{per } i = 0, 1, \dots, M+N-1 \\ w(t+M+N-1) & \text{per } i \geq M+N \end{cases}$$

nel caso si supponga noto e

$$w^a(t+i) \equiv w(t)$$

nel caso in cui non lo sia.

Anche per la legge di controllo qui trovata si possono ripetere la maggior parte delle osservazioni fatte nel paragrafo 4.2.

4.3.1 Simulazioni

Le simulazioni sono state effettuate in ambiente SIMULAB [cfr. par. 6.2], mentre la scelta di $f(t|t, \lambda(t))$ è stata realizzata con una funzione scritta in linguaggio MATLAB (riportato a pagina ??). Riassumiamo brevemente il significato dei parametri di simulazione:

- ρ = peso sulle variazioni dell'ingresso $\delta u(t+i)$ nel funzionale di costo J che definisce il problema LQ sottostante
- N = numero di coefficienti k_i della risposta all'impulso di $K(d) = \frac{B(d)}{E(d)}$ utilizzati nella legge di controllo LQ 2-GDL
- $P_0(d)$ = polinomio osservatore i cui modi, ininfluenti in ambito deterministico, intervengono soltanto nelle risposte nei confronti di disturbi sull'ingresso o sull'uscita.

- $\frac{Bv(d)}{Av(d)}$ = funzione di trasferimento da $u(t)$ a $v(t)$, variabile sulla quale vengono messi i vincoli
- M = lunghezza dell'orizzonte nel futuro predetto sul quale viene verificato il vincolo
- V_{max} = vincolo imposto su $v(t+i|t)$: $|v(t+i|t)| \leq V_{max}$ per $i = 0, 1, \dots, M$
- μ che definisce la scala discreta sulla quale puo' variare λ :

$$\lambda \in G = \{0, 1 - \mu, 1 - \mu^2, \dots, 1 - \mu^{m_1}\} \text{ con } \mu^{m_1} \leq \lambda_{max} < \mu^{m_1+1}$$

- λ_{max}

Esempio 4.3

Abbiamo considerato l'impianto (4.3) scegliendo

$$M = 10$$

$$N = 15$$

$$\rho = 0.1$$

$$v(t) = u(t)$$

$$V_{max} = 6$$

$$w^a(t+i) \equiv w(t) \quad \forall i = 0, \dots, M$$

$w(t)$ =onda quadra di pulsazione 0.1579 rad/s e ampiezza 14

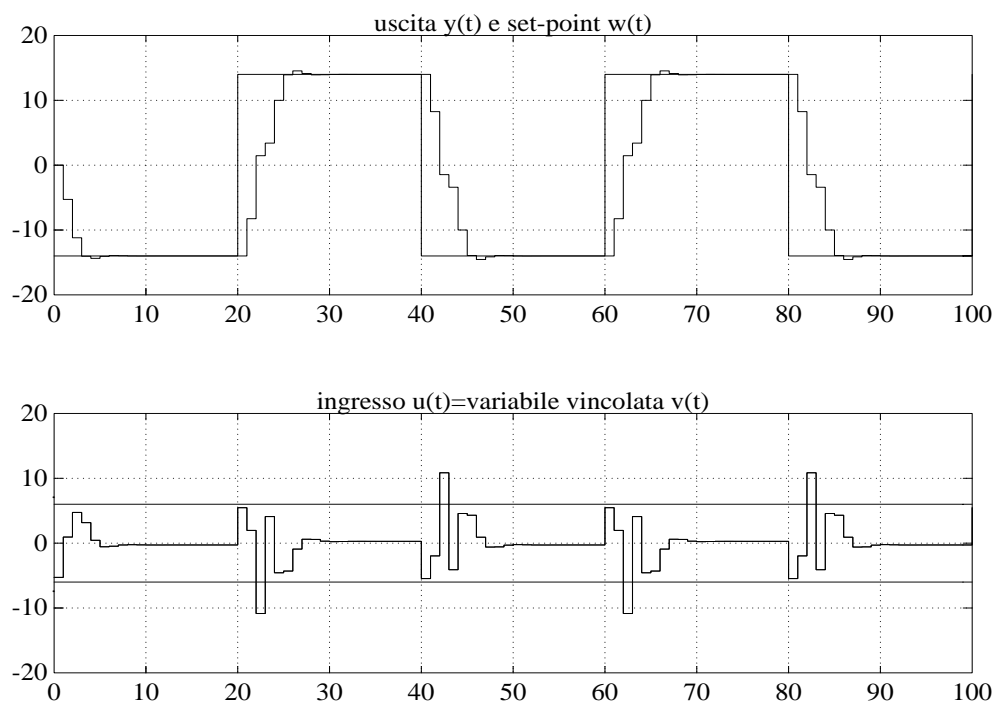


Figura 4.13: Simulazione esempio 4.3. $y(t)$, $u(t)$ con il vincolo $|u(t)| \leq 6$

analogamente all' esempio (4.2). In figura (4.13) e (4.14) riportiamo i risultati simulativi. Si può notare come il comportamento sia peggiore rispetto all' avere usato il metodo n.1, dove i vincoli non venivano violati. Anche provando con $M = 60$ si è visto che i vincoli continuano ad essere violati. Questa differenza è appunto nel ricercarsi nel fatto che il metodo n.1 effettua una previsione più aderente a quella che sarà la realtà (sebbene continui ancora ad usare un $\lambda(t + i) = \lambda(t) \forall i$, mentre in realtà λ varierà).

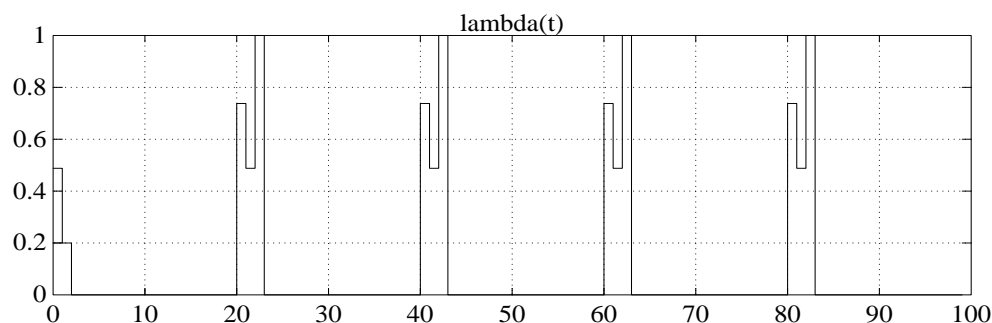


Figura 4.14: Simulazione esempio 4.3. $\lambda(t)$ con il vincolo $|u(t)| \leq 6$

4.4 Algoritmo di scelta di λ : Metodo n. 3

4.4.1 Introduzione

Il difetto maggiore riscontrato nei metodi n. 1 e n. 2 sviluppati nei paragrafi precedenti è il comportamento in presenza di vincoli molto stretti. L'idea di dare un riferimento che raccordi $y(t)$ attuale con una approssimazione $w^a(t+i)$ definita dalla (3.47) della traiettoria da inseguire $w(t)$ permette di ridurre a piacere le variazioni delle variabili vincolate soltanto quando si parte da una condizione di regime stazionario (eventualmente nullo), fino ad arrivare per $\lambda = 1$ alla completa stasi dell'impianto. Nei transitori questo ovviamente è tanto meno vero quanto meno il sistema si trova in condizioni quasi-statiche. In definitiva durante i transitori il metodo può fallire facendo sì che i vincoli vengano violati. Occorre però notare che la qualità dell'inseguimento non peggiora, addirittura alla luce delle simulazioni sembra quasi poter dire che i vincoli vengano violati perchè il sistema *vuole* inseguire la traiettoria $w(t)$. Nel caso in cui la variabile vincolata fosse l'ingresso $u(t)$ [o i suoi incrementi

$\delta u(t)$] abbiamo allora pensato che il sistema, nei casi critici, dovesse avere una evoluzione vicino a quella libera, cioè per $u(t)$ $[\delta u(t)] = 0$. Questo poteva essere fatto raccordando l'evoluzione libera $y_l(t+i) = H\Phi^i x(t)$ dell'impianto ad anello aperto con la traiettoria da inseguire:

$$r(t+i) := \lambda^i y_l(t+i) + (1 - \lambda^i) w^a(t+i) \quad (4.6)$$

Tale tecnica però pone seri problemi sulla stabilità del sistema ad anello chiuso qualora l'impianto da regolare sia instabile, ed è quindi stata abbandonata. Sullo stesso filone di pensiero si è quindi cercata una evoluzione "libera" sostitutiva.

Si è allora provato a porre $y_l(t+i) = H_{cl}\Phi_{cl}^i x_{cl}(t)$, dove $x_{cl}(t)$ è lo stato del sistema costituito dal primo anello di regolazione e a definire $r(t+i)$ come nella (4.6). Essendo per ipotesi la regolazione primaria stabilizzante, si sarebbe evitato il problema di avere una evoluzione libera instabile. Questo andrebbe bene se i vincoli fossero stati posti sull'ingresso del primo anello. Tuttavia nei casi di interesse pratico i vincoli sono sull'ingresso effettivo $u(t)$ che, andando ad essere uguale al *feedback* primario dall'uscita $y(t)$, può ugualmente violare i vincoli.

4.4.2 Formulazione della legge di controllo

In quello che abbiamo battezzato "Metodo n.3" si è pensato di porre come evoluzione "naturale" della uscita quella che si avrebbe continuando ad applicare la sequenza di riferimenti $r(t+i|t-1, \lambda(t-1))$ calcolata al passo precedente. La legge di controllo può essere così formulata:

1. Sia $r(t+i|t-1, \lambda(t-1))$ un riferimento *ammissibile*, mediante il quale

cioè nella predizione si ha il rispetto dei vincoli.

2. Sia $y^o(t+i|t-1)$ l'evoluzione di $y(t)$ che si avrebbe applicando l'intera sequenza $r(t+i|t-1, \lambda(t-1))$
3. Definiamo la struttura di un nuovo riferimento

$$r(t+i|t, \lambda(t)) := \lambda^i(t)y^o(t+i) + (1 - \lambda^i(t))w^a(t+i) \quad (4.7)$$

dove $w^a(t+i)$ è una approssimazione di $w(t+i)$ definito dalla (3.47)

4. Scegliamo $\lambda \in [0, 1)$ tale che i vincoli su un orizzonte di predizione di M passi i vincoli vengano rispettati

Anche con questo tipo di metodo non si ha la certezza che i vincoli saranno rispettati. Essendo però $y^o(t+i)$ un' uscita ammissibile, l'imporre che per $\lambda = 1$ $y(t)$ insegua tale traiettoria dà buone garanzie.

I difetti che questo metodo ha rivelato riguardano la inerzia del sistema complessivo. Infatti il porre come riferimento una traiettoria che *assomiglia* all'evoluzione libera fa sì che l'impianto regolato risulti eccessivamente lento nell'inseguire la traiettoria $w(t)$. Il fenomeno era assai meno pronunciato nel metodo n.2.

4.4.3 Simulazioni

Per implementare la legge di controllo trovata è stato necessario apportare la seguente approssimazione. Poiché la predizione viene fatta per M passi nel futuro, è necessario conoscere $r(t+M+N-1|t)$ e quindi $y^o(t+M+N-1|t-1)$, il quale viene calcolato con il riferimento $r(t+M+N-1+j|t-1)$ per

$j = 0, 1, \dots, N - 1$. Per calcolare esattamente $r(t + M + 2(N - 1))|t - 1$ sarebbe occorso disporre di $y^o(t + M + 2(N - 1))$, il quale avrebbe richiesto $r(t + M + 3(N - 1), \dots$. Poichè la sequenza $r(t + i)$ viene memorizzata in un vettore di lunghezza finita (per l'esattezza fino a $r(t + i + M + 2(N - 1))$, è stato necessario porre

$$r(t + i) = r(t + M + N - 1) \quad \text{per} \quad i = M + N, \dots, M + 2(N - 1)$$

Potremmo essere tentati a definire in alternativa

$$r(t + i) = w^a(t + M + N - 1) \quad \text{per} \quad i = M + N, \dots, M + 2(N - 1)$$

ma tale approssimazione risulterebbe valida soltanto per $\lambda^{M+N} \ll 1$, il che non è ovviamente vero per $\lambda = 1$.

Esempio 4.4

Abbiamo ripetuto gli esempi (4.2) e (4.3) usando la tecnica di controllo sviluppata in questo paragrafo. Riportiamo i risultati nelle figure (4.15)–(4.16)

Esempio 4.5

Abbiamo effettuato una simulazione con gli stessi parametri dell' esempio (4.2), e ne riportiamo i risultati nelle figure (4.17)–(4.18). Si può notare che rispetto all'esempio (4.2) qui i vincoli non vengono violati. Le prestazioni dell'inseguimento risentono ovviamente del vincolo troppo stretto imposto all'ingresso. Notiamo infatti che l'impianto in esame ha un guadagno in continua pari a 50, l'onda quadra $w(t)$ ha una ampiezza di 14 e quindi, se l'impianto fosse abbastanza pronto da raggiungere un regime stazionario durante un semiperiodo dell'onda, si avrebbe un valore a regime $u_{reg} = \frac{14}{50} = 0.28$. Essendo $A(d)$ con zeri entrambi maggiori di 1 ed avendo (per λ costante)

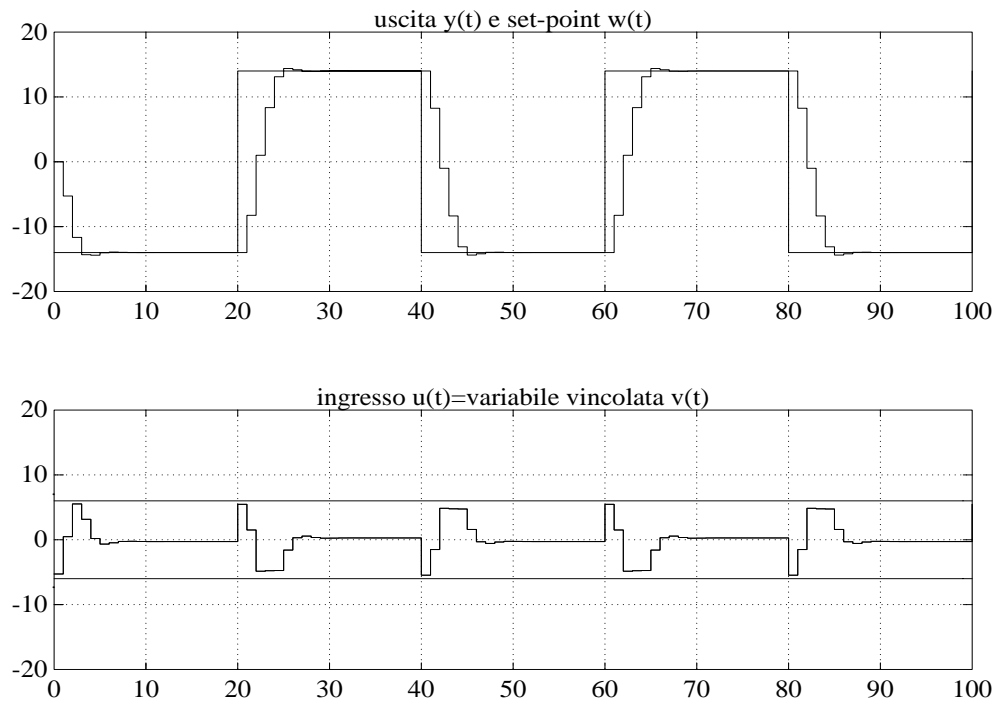


Figura 4.15: Simulazione esempio 4.4. $y(t)$, $u(t)$ con il vincolo $|u(t)| \leq 6$

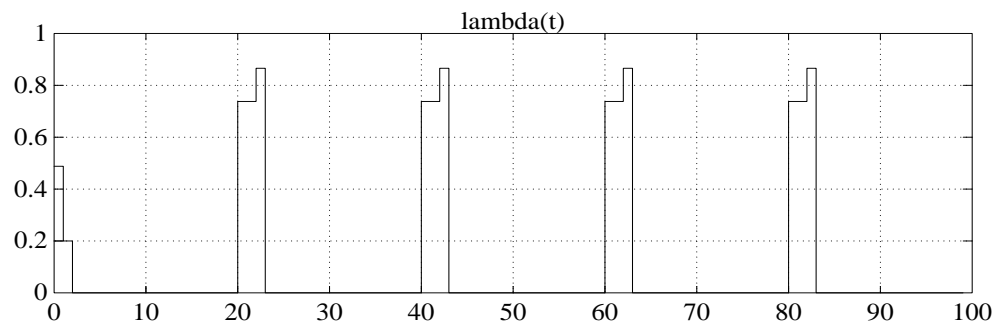


Figura 4.16: Simulazione esempio 4.4. $\lambda(t)$ con il vincolo $|u(t)| \leq 6$

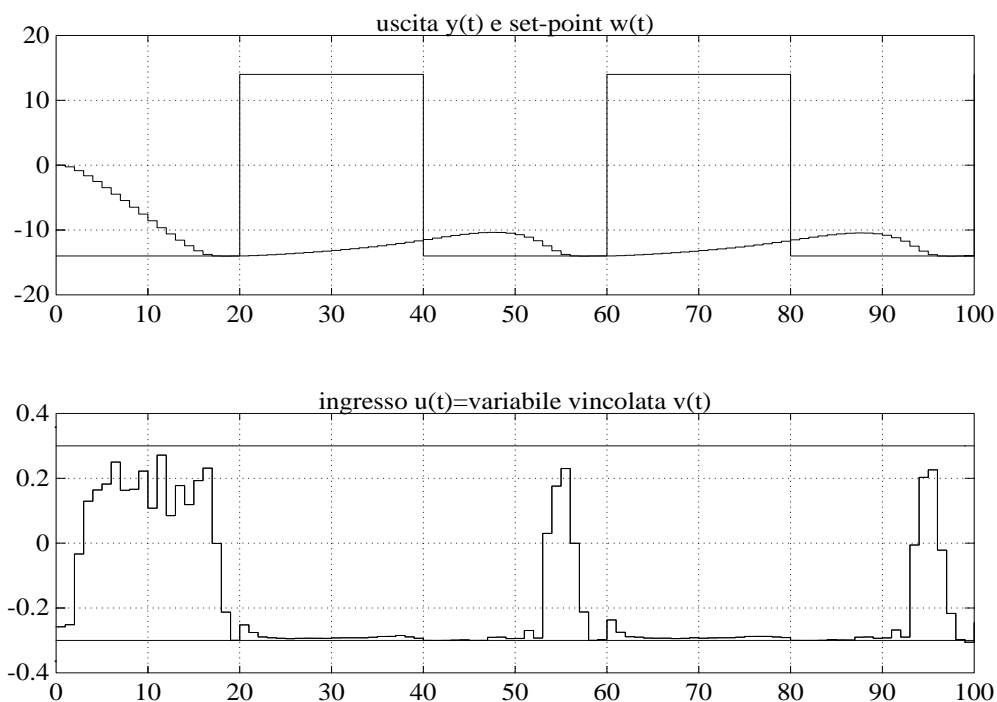


Figura 4.17: Simulazione esempio 4.5. $y(t)$, $u(t)$ con il vincolo $|u(t)| \leq 0.3$

la funzione di trasferimento da w a u al numeratore $A(d)$, segue che la risposta di u dovuta ad una variazione a gradino di w è quella tipica degli impianti a fase non minima. Poichè l'ingresso si trova ad un valore 0.28 , cioè vicinissimo al valore massimo consentitogli dal vincolo, non c'è un margine sufficiente per consentire all'uscita di compiere la transizione.

Esempio 4.6

Proviamo ad invertire i poli all'impianto instabile (4.3) e osserviamo nelle figure (4.19)–(4.20) come varia l'inseguimento rispetto all'esempio (4.5). Notiamo che invertire i poli significa invertire l'ordine dei coefficienti di $A(d)$ e quindi ottenere un impianto con il medesimo guadagno in continua.

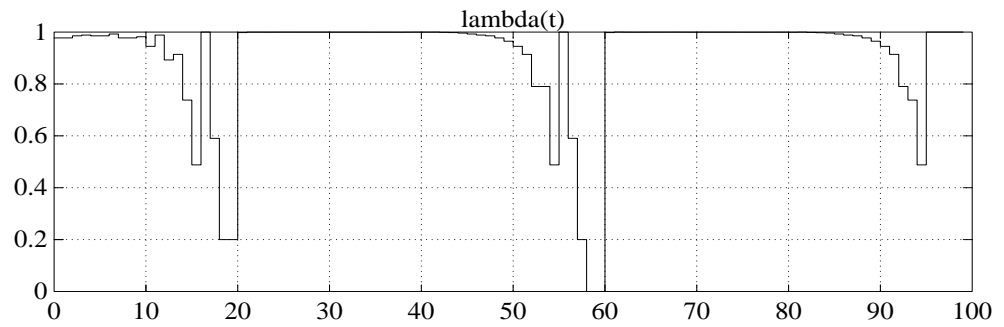


Figura 4.18: Simulazione esempio 4.5. $\lambda(t)$ con il vincolo $|u(t)| \leq 0.3$

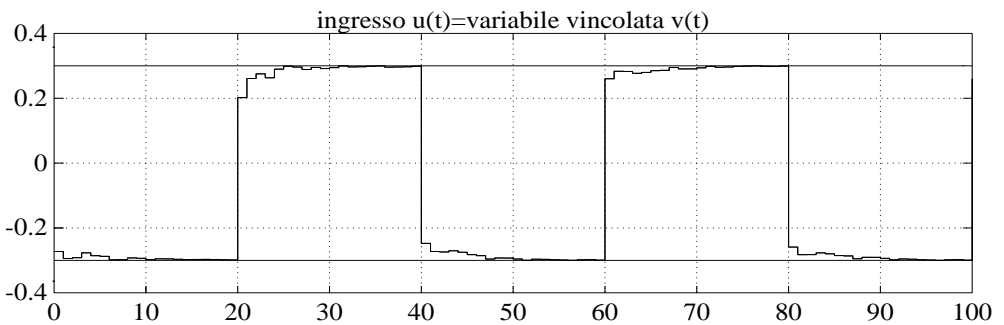
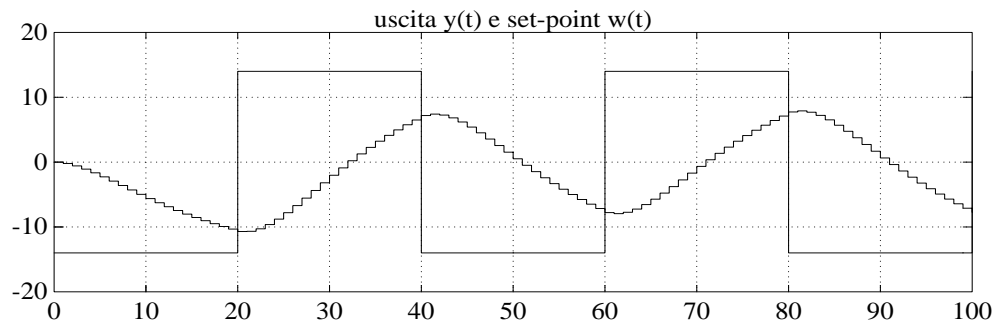


Figura 4.19: Simulazione esempio 4.6. $y(t)$, $u(t)$ con il vincolo $|u(t)| \leq 0.3$

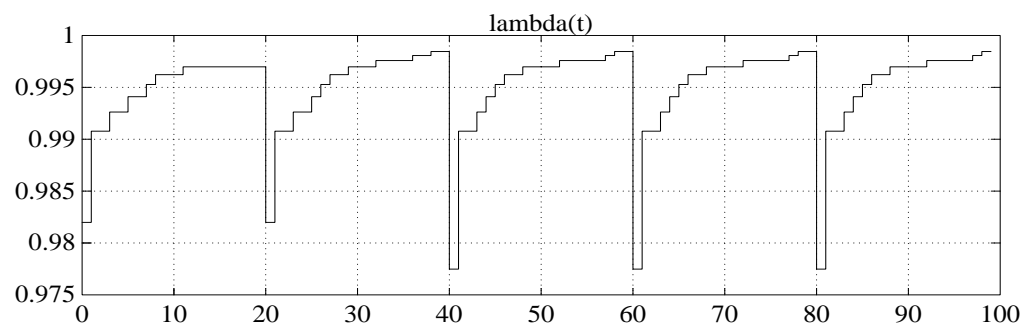


Figura 4.20: Simulazione esempio 4.6. $\lambda(t)$ con il vincolo $|u(t)| \leq 0.3$

Esempio 4.7

Consideriamo nuovamente l'impianto (4.3) e analizziamo il comportamento nel caso il futuro di $w(t)$ sia noto. Poniamo:

$$N = 10$$

$$\rho = 0.1$$

$$v(t) = u(t)$$

$$\lambda_{max} = 0.999999$$

Nelle figure (4.21)–(4.22) osserviamo i risultati simulativi per

$$M = 10$$

mentre nelle figure (4.23)–(4.24) per

$$M = 100$$

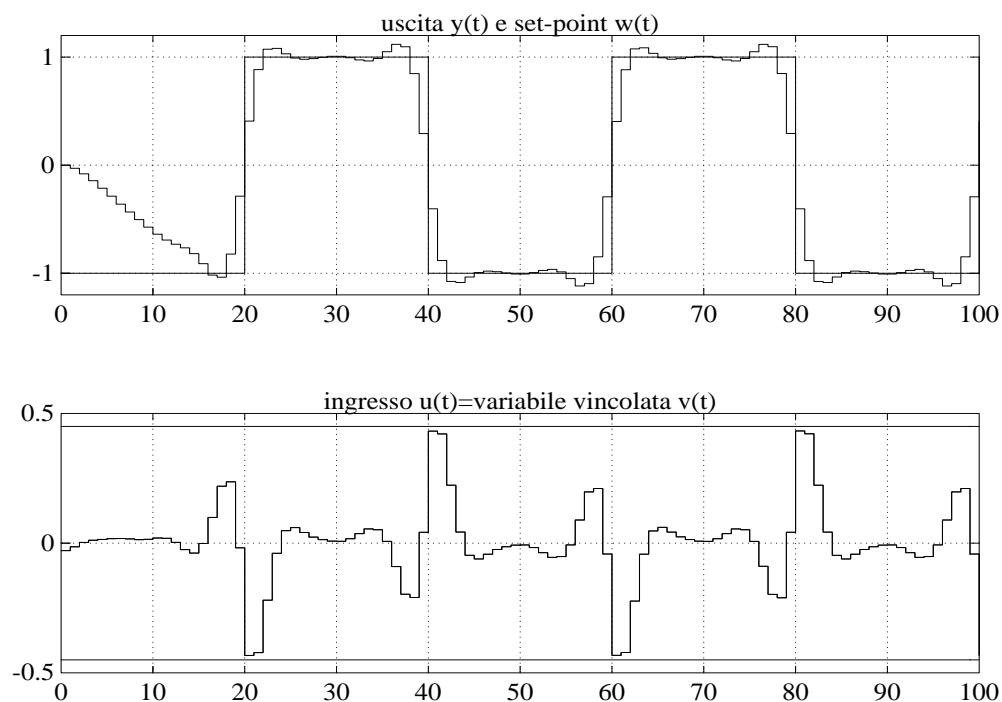


Figura 4.21: Simulazione esempio 4.7. $y(t)$, $u(t)$ ($M=10$)

Confrontando i due risultati si nota come con un valore di M molto elevato il controllore diventi eccessivamente cauto, tanto che gli ingressi si tengono abbastanza lontani dal valore massimo permesso e quindi il *tracking* viene deteriorato. In figura (4.25) abbiamo riportato la predizione fatta sulla variabile vincolata $v(t + i|t)$. Effettivamente si vede che nella predizione i vincoli vengono avvicinati al punto che un valore di λ minore ne avrebbe comportato l'infrazione. Oltre a ciò occorre ricordarsi che il numero di operazioni richieste dipende proporzionalmente da M . In definitiva M deve essere scelto effettuando un compromesso fra velocità di calcolo, qualità del *tracking*, garanzia del rispetto dei vincoli.

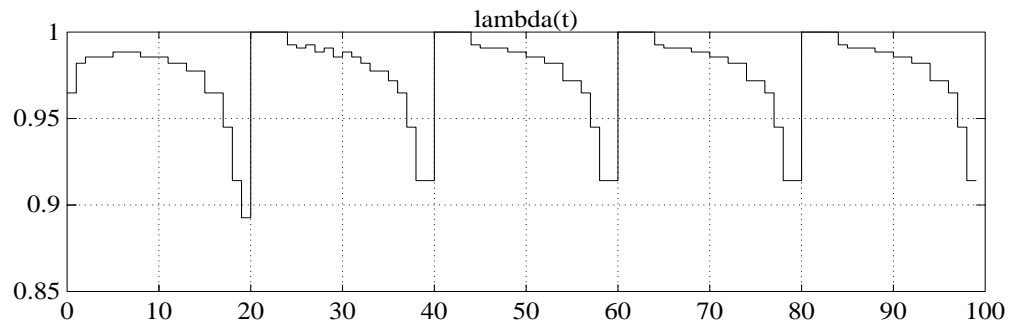


Figura 4.22: Simulazione esempio 4.7. $\lambda(t)$ ($M=10$)

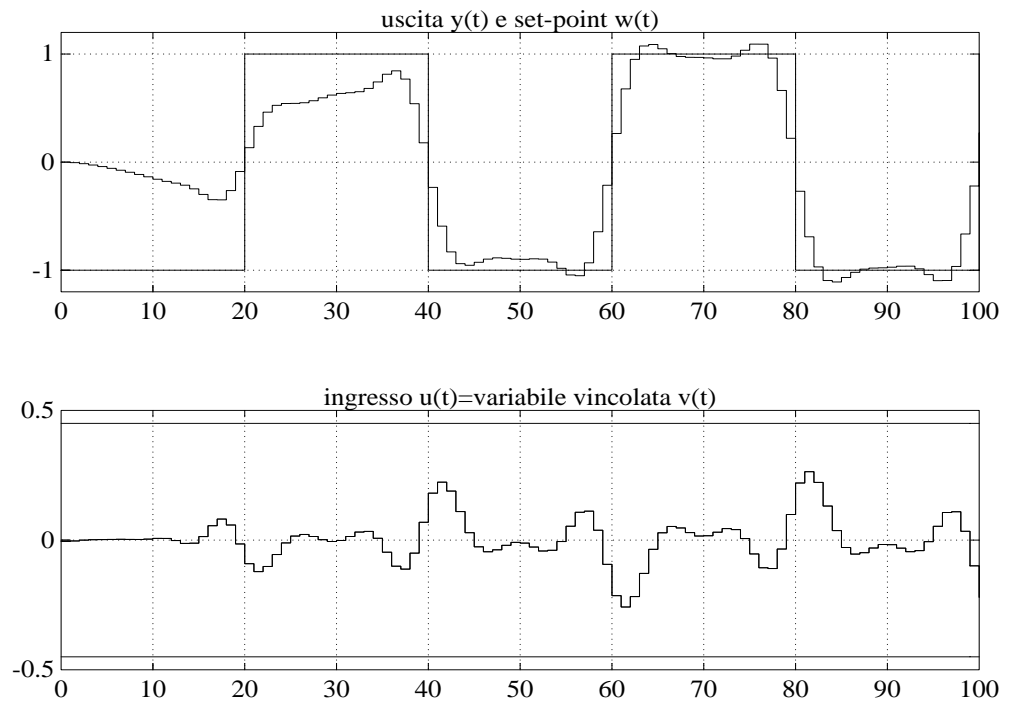


Figura 4.23: Simulazione esempio 4.7. $y(t)$, $u(t)$ ($M=100$)

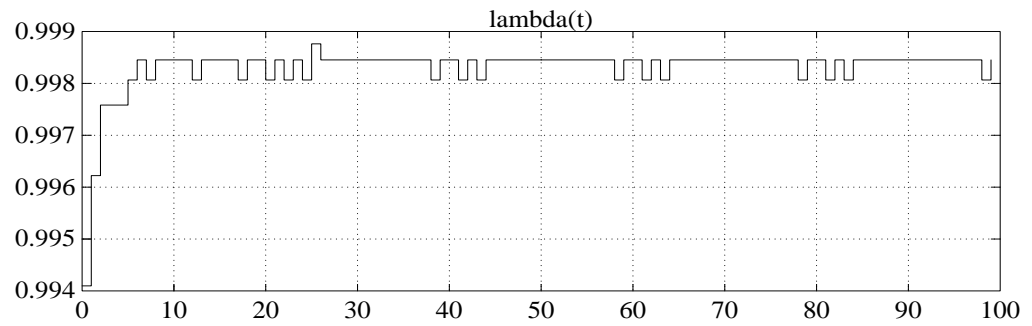


Figura 4.24: Simulazione esempio 4.7. $\lambda(t)$ ($M=100$)

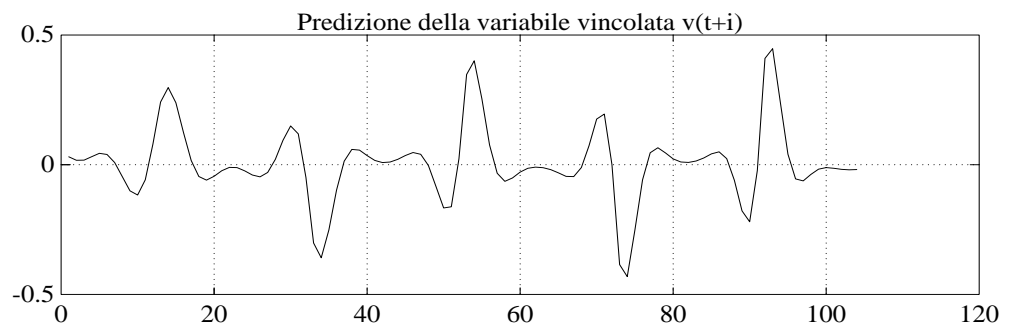


Figura 4.25: Simulazione esempio 4.7. Predizione $v(t+i|t)$ ($M=100$)

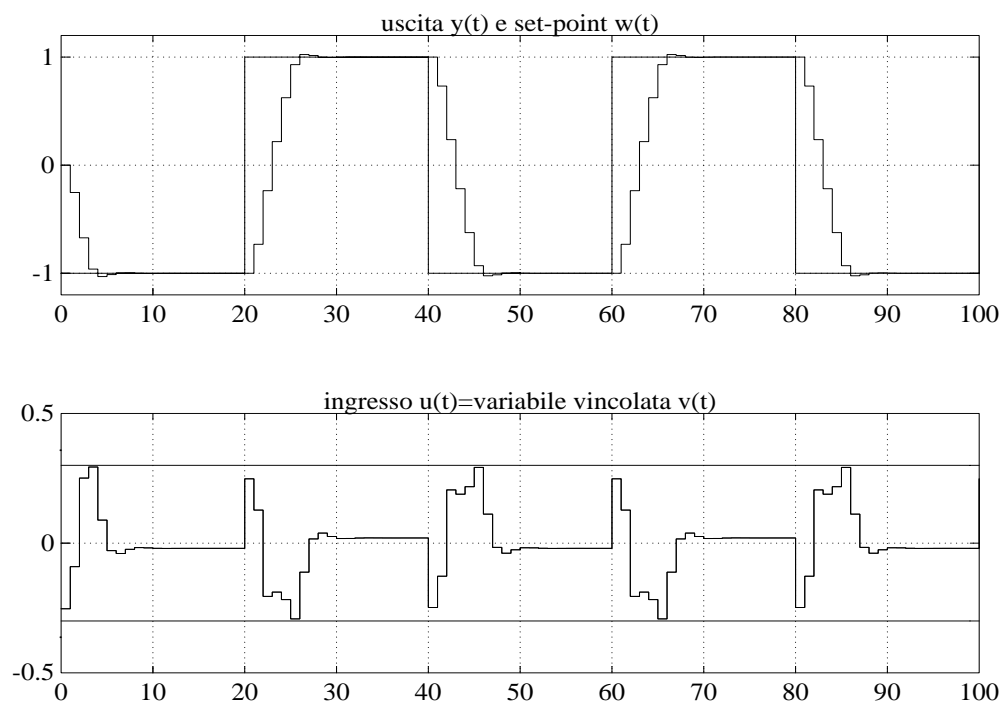


Figura 4.26: Simulazione esempio 4.8. $y(t)$, $u(t)$

Esempio 4.8

Consideriamo ancora l'esempio (4.7) con $M = 100$ e togliamo al controllore la conoscenza del futuro della traiettoria $w(t + i)$. Nelle figure (4.26)–(4.27) possiamo osservare i risultati simulativi. Si può notare come rispetto alla figura (4.24) i valori di λ risultino completamente differenti: qui vengono attivati valori di λ maggiori di 0 solo quando sopraggiunge la necessità di effettuare una transizione. In questo caso, allora, non conoscere in anticipo la traiettoria da inseguire $w(t)$ dà dei vantaggi.

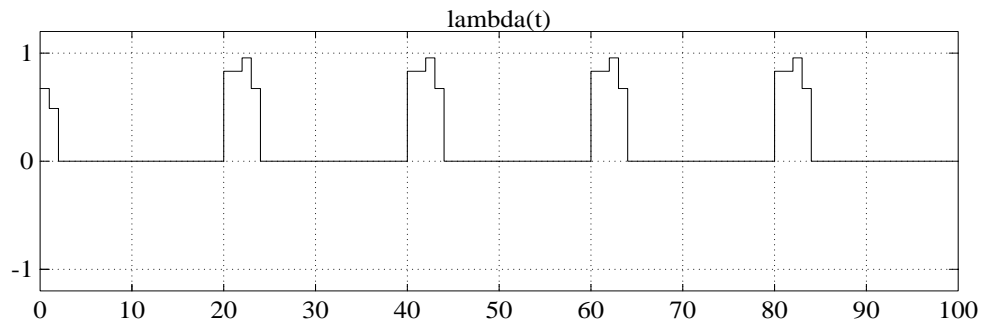


Figura 4.27: Simulazione esempio 4.8. $\lambda(t)$

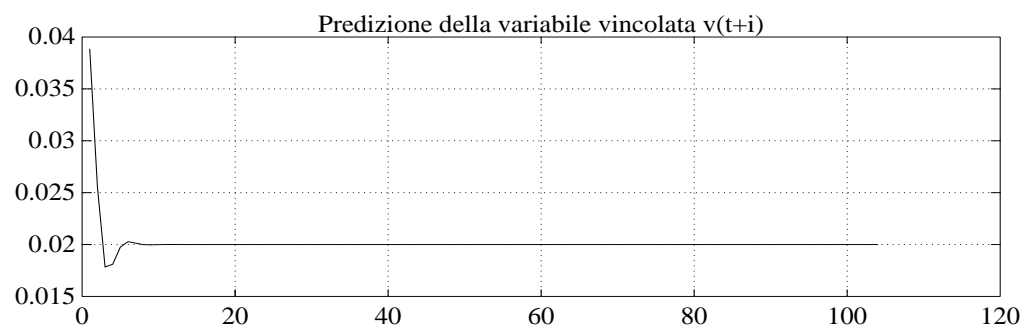


Figura 4.28: Simulazione esempio 4.8. Predizione $v(t + i|t)$

4.5 Algoritmo di scelta di λ : Metodo n. 4

4.5.1 Formulazione della legge di controllo

La tecnica che andiamo a descrivere in questo paragrafo abbina il buon comportamento del metodo n.2 per valori di λ bassi al buon comportamento del metodo n.3 per valori di λ alti. Quest'ultimo infatti, se dà maggiori garanzie del rispetto dei vincoli, dà anche luogo a sistemi ad anello chiuso eccessivamente lenti, come notato a pag. (109). Definiamo allora

$$r(t+i|t, \lambda(t)) = \begin{cases} \lambda(t)^i y(t) + (1 - \lambda(t)^i) w^a(t+i) & \text{per } \lambda < 1 \\ y^o(t+i|t-1) & \text{per } \lambda = 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

Notiamo inoltre che rispetto alla tecnica n.3 il numero di operazioni mediamente viene quasi dimezzato, in quanto il calcolo della sequenza finita delle $y^o(t+i)$ viene calcolata solo nel caso in cui $\lambda = 1$.

4.5.2 Simulazioni

Esempio 4.9

Abbiamo considerato nuovamente l'impianto instabile (4.3) scegliendo

$$M = 10$$

$$N = 10$$

$$\rho = 0.1$$

$$v(t) = u(t)$$

$$\lambda_{max} = 0.9999$$

$w(t)$ =onda quadra di pulsazione 0.03 rad/s e ampiezza 14

Nelle figure (4.29)–(4.30) possiamo osservare come i vincoli siano perfettamente rispettati quantunque siano molto stretti. Ricordiamo che le numerose oscillazioni compiute dall'ingresso prima che l'uscita effettui la transizione sono dovute al fatto che la $u(t)$ risponde a $w(t)$ in maniera analoga ad un sistema a non minimalità di fase.

Esempio 4.10

Abbiamo provato ad imporre dei vincoli ancora più stretti, al punto tale che

$$V_{max} < \frac{\max |w(t)|}{H_{yu}(1)}$$

Come traiettoria $w(t)$ abbiamo scelto un gradino di ampiezza -14 e come vincolo si è scelto $V_{max} = 0.2 < 0.28 = \frac{\max |w(t)|}{H_{yu}(1)}$. Nelle figure (4.31)–(4.32) si può notare come i vincoli vengano violati. Vediamo di capire come mai. Analizzando l'andamento di $\lambda(t)$ si vede che esisterà un tempo t_1 tale che $\lambda(t_1) < 1$ e $\lambda(t) = 1 \forall \lambda > t_1$. Al tempo t_1 , tuttavia, $r(t + i|t_1, \lambda(t_1))$ è

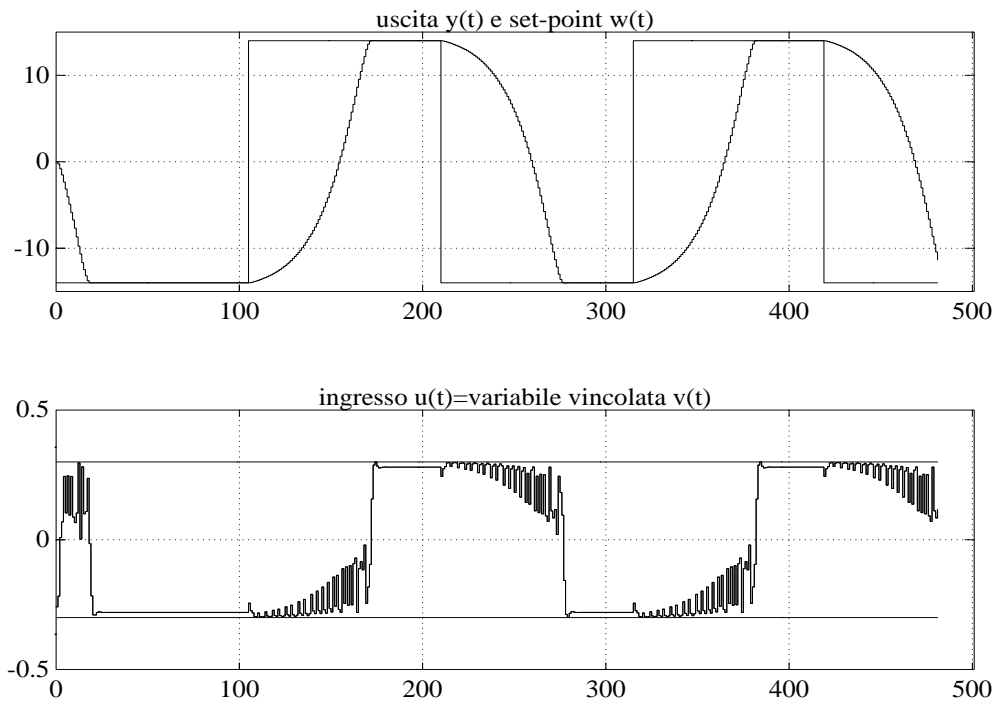


Figura 4.29: Simulazione esempio 4.9. $y(t)$, $u(t)$

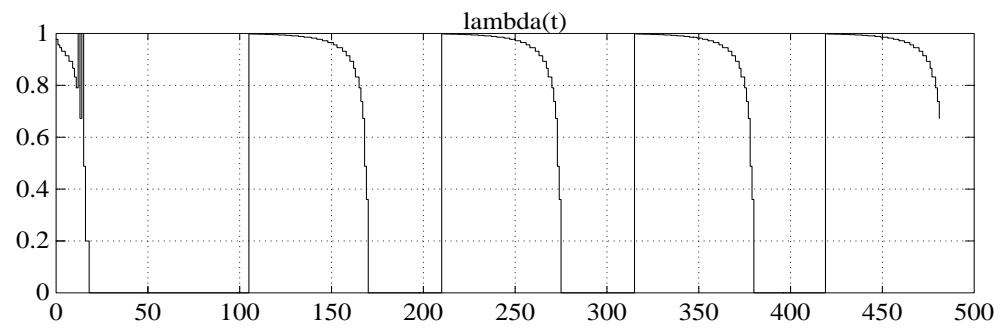


Figura 4.30: Simulazione esempio 4.9. $\lambda(t)$

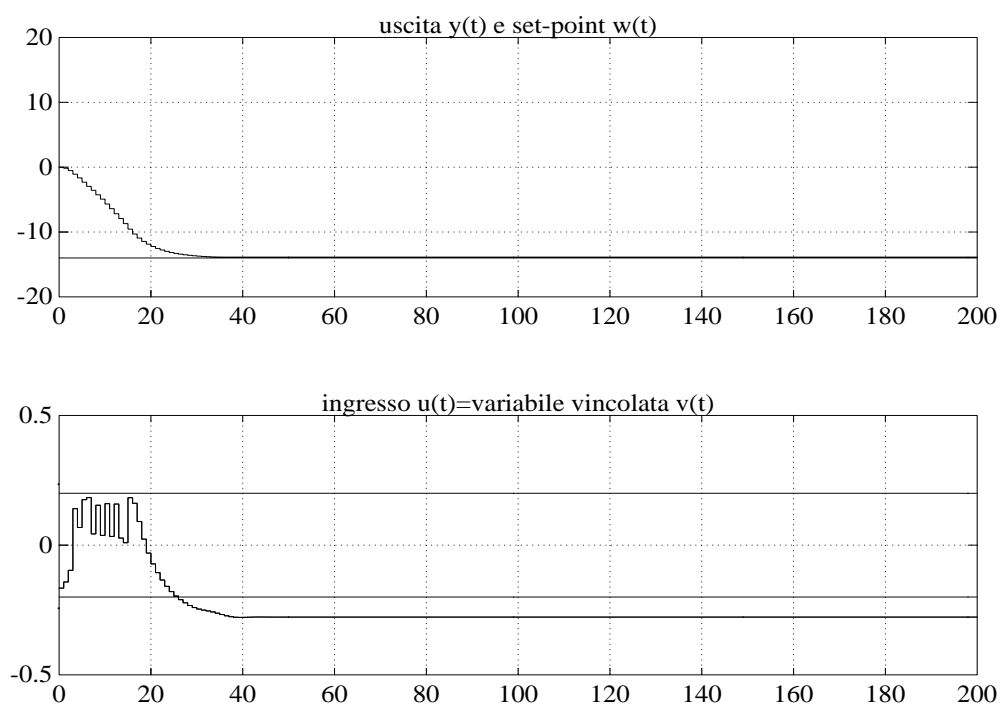


Figura 4.31: Simulazione esempio 4.10. $y(t)$, $u(t)$

ammissibile in quanto per i successivi M passi i vincoli sono soddisfatti. Da $r(t+i|t_1, \lambda(t_1))$ scaturisce allora una $y^o(t+i)$ che tende a -14 in quanto $\lambda_1 < 1$; quindi non è ammissibile sull'intero futuro, ma solo su M passi. Per $t > t_1$ $r(t+i|t) \equiv y^o(t+i|t_1)$ e quindi per $t \rightarrow \infty$ $y(t) \rightarrow -14$, $u(t) \rightarrow -\frac{14}{50} > V_{max}$.

4.6 Algoritmo di scelta di λ : Metodo n.5

Alla luce di tutte le osservazioni emerse nello sviluppo dei metodi riportati nei paragrafi precedenti siamo giunti ad individuare una strategia di gestione in

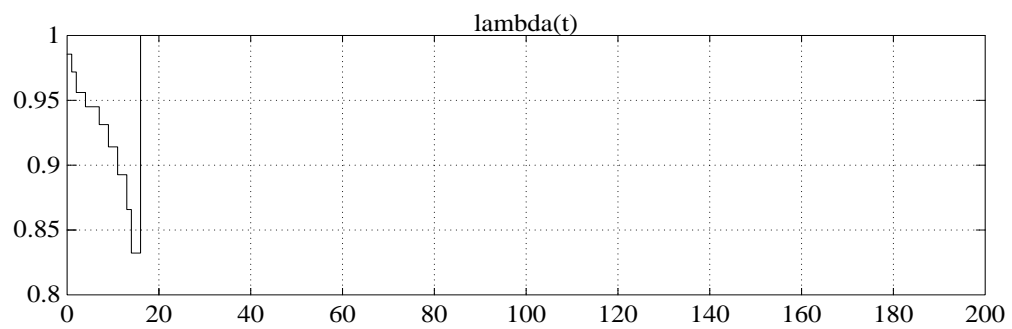


Figura 4.32: Simulazione esempio 4.10. $\lambda(t)$

linea del riferimento che ha dato ottimi risultati. Descriveremo tale tecnica di controllo nel capitolo 5.

Capitolo 5

Gestione in linea del riferimento con variabili vincolate

5.1 Introduzione

In questo capitolo formuleremo un metodo che, gestendo in linea il riferimento dato ad un controllore primario di tipo LQ 2–GDL, consente di regolare un generico impianto SISO lineare e tempo–invariante rispettando dei vincoli imposti sulle variabili di sistema. La legge di controllo risultante, facendo determinate assunzioni, verrà dimostrata essere stabilizzante e tale da garantire il rispetto dei vincoli. Va però sottolineato che a livello simulativo si è riscontrata una globale asintotica stabilità per ogni tipo di impianto provato, buone prestazioni in termini di inseguimento (ad esempio errori nulli in condizione di regime stazionario) e un rispetto dei vincoli imposti anche in situazioni assai "critiche". Confrontandosi con algoritmi di controllo predittivo a orizzonte recessivo che risolvono una minimizzazione di un funzionale di costo vincolato mediante programmazione matematica, verrà evidenziato come le prestazioni di tali leggi di controllo siano pressoché identiche a quelle determinate dalla legge sviluppata in questo capitolo, la quale offre in aggiunta un minore carico computazionale. Sebbene lo studio verrà limitato al caso lineare, la filosofia di controllo sviluppata in questo capitolo sarà estendibile a sistemi MIMO (*Multi Input Multi Output*) eventualmente non lineari e tempo–varianti.

5.2 Formulazione della legge di controllo

Si supponga di essere in un contesto puramente deterministico, in cui quindi il modello predittivo coincide esattamente con l'impianto fisico che genera i dati. Definiamo una variabile $v(t)$ sulla quale vogliamo imporre dei vincoli, legata

all'ingresso $u(t)$ dalla relazione

$$v(t) = \frac{B_v(d)}{A_v(d)}u(t) \quad (5.1)$$

Tali vincoli possono essere del tutto generici¹; li indichiamo con nella forma

$$v(t+i) \in \Omega_i(t) \quad \forall i = 0, 1, \dots, M \quad (5.2)$$

Definizione 5.1 Una sequenza finita $\{v(t+i)\}_{i=0}^M$ si dice ammissibile se

$$v(t+i) \in \Omega_i(t) \quad \forall i = 0, \dots, M$$

Definizione 5.2 Una successione di riferimento $r(t+i|t)_{i=0}^{\infty}$ si dice ammissibile su M passi se la predizione

$$v(t+j|t, \{r(t+i|t)\}_{i=0}^{\infty})$$

è ammissibile

Definizione 5.3 Un valore di set-point \bar{w} si dice ammissibile se

$$\bar{v} := \frac{\bar{w}}{H_{vw}(1)}$$

è ammissibile

In altre parole quindi dire che un livello di set-point è ammissibile significa asserire che in condizioni di regime stazionario l'uscita si porta su tale livello e contemporaneamente i vincoli sono soddisfatti.

Supponiamo inoltre la traiettoria $w(t+i)$ nota con un anticipo di $N-1$ passi. Assumiamo cioè che

$$\begin{aligned} &\text{al passo } t \text{ sono noti al controllore i campioni } w(t+i) \text{ per} \\ &i = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

¹confronta quanto osservato a pagina 91 circa la scelta di $B_v(d)$ e $A_v(d)$.

dove eventualmente $N = 1$ nel caso in cui nessun campione futuro sia disponibile. Definiamo inoltre sull'orizzonte di predizione la successione

$$w_t^a(t+i) := \begin{cases} w(t+i) & \text{per } i \leq N-1 \\ w(t+N-1) & \text{per } i \geq N \end{cases}$$

che definisce al tempo t la traiettoria che l'uscita predetta $y(t+i|t)$ deve inseguire. Definiamo poi una successione di riferimento

$$r(t+i|t) = \begin{cases} \lambda^i(t)y(t) + (1-\lambda^i(t))w_t^a(t+i) & \text{per } \lambda(t) < 1 \\ r(t+i|t_h) & \text{per } \lambda(t) = 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

dove t_h è tale che

$$\lambda(t_h) < 1$$

$$\lambda(t_j) = 1 \quad \forall t_j = t_h + 1, \dots, t.$$

In altre parole $r(t+i|t_h)$ è il più recente riferimento ammissibile che si è riusciti a sintetizzare con un $\lambda < 1$, e quindi raccorda (eventualmente in maniera molto lenta in funzione del parametro λ_{max} che definiremo in seguito) l'uscita $y(t_h)$ con $w_{t_h}^a$. Più esattamente si ha che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} r(t+i|t_h) = w(t_h + N - 1)$$

e quindi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v(t+i|h) = \frac{w(t_h + N - 1)}{H_{vw}(1)}$$

che è ammissibile se e solo se $w(t_h + N - 1)$ è ammissibile. In figura (5.1) riportiamo un esempio di un possibile riferimento $r(t+i|t)$.

Notiamo che implicitamente abbiamo supposto che esista un t_h che gode della suddetta proprietà. Possiamo dire che questo è sicuramente vero se

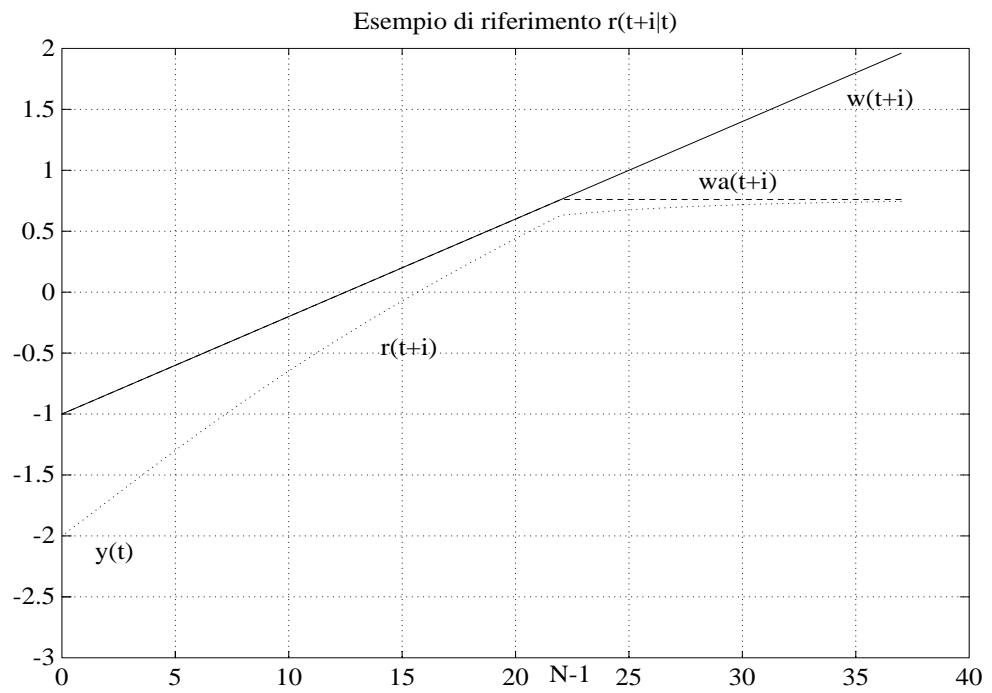


Figura 5.1: $r(t + i|t), w(t + i), w_t^a(t + i)$

$M < \infty$ (come è in tutte le applicazioni pratiche) e $x(0)$ è uno stato di regime stazionario ², eventualmente $x(0) = 0$, tale che $\exists \Delta v$ per il quale $v(0) + \Delta v$ è ammissibile $\forall \epsilon < \Delta v$ e $M < \infty$. In tal caso infatti, supposto che $\lambda(t)$ possa assumere valori arbitrariamente prossimi al valore 1, esisterà sempre un valore $\lambda(0) < 1$ tale che $r(0 + i|0, \lambda(0))$ è ammissibile su un qualsiasi numero M fissato di passi. In tale circostanza si avrà che al più $t_h = 0$. Poniamo allora

$$h := t - t_h$$

cioè il numero di passo trascorsi da quando si è costruito con un $\lambda < 1$ l'ultimo riferimento ammissibile su M passi.

È immediato verificare allora la seguente proposizione

Proposizione 5.1 *Sia $r(t + i|t - h, \lambda(t - h))$ ammissibile su M passi. Allora il riferimento $r(t + i|t)$ definito nella (5.3) è ammissibile su almeno $M - h$ passi.*

Osserviamo che non è ammissibile su più di $M - h$ passi se e solo se $\lambda(t - i) = 1 \forall i = 0, 1, \dots, h - 1$.

Per come è definito il riferimento nella (5.3) possiamo ulteriormente riscrivere che

$$r(t + i|t) = \lambda(t - h)^{h+i} y(t - h) + (1 - \lambda(t - h)^{h+i}) w_{t-h}^a(t - h + (h + i))$$

conglobando il caso in cui al passo t si trova un nuovo riferimento ammissibile tale che $r(t + 0|t, \lambda(t)) = y(t)$ ($h = 0, \lambda(t) < 1$) ed il caso in cui il riferimento coincide con uno calcolato in precedenza ($h > 0, \lambda(t) = 1$).

²Questa ipotesi corrisponde al caso in cui la tecnica di controllo sviluppata nel presente capitolo voglia essere usata per far variare l'uscita da un set-point all'altro in modo che i vincoli imposti siano rispettati

Poniamo in evidenza che l'impostazione del problema vale per una generica legge di controllo primaria

$$u(t) = F(t, u_{(-\infty, t)}, y_{(-\infty, t)}, r_{(-\infty, +\infty)})$$

con F e/o l'impianto da regolare eventualmente non lineari.

Assumiamo però adesso come legge di controllo primaria la legge LQ 2-GDL (4.4). Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 4.3 definiamo

$$f(t) := \sum_{i=0}^{\infty} k_i r(t+i|t) \quad (5.4)$$

e quindi la legge di controllo LQ 2-GDL assume la forma

$$R(d)\delta u(t) = -S(d)y(t) + X^{-1}f(t) \quad (5.5)$$

dove implicitamente $f(t)$ dipende dal $\lambda(t)$ scelto ovvero da un passato $\lambda(t-h)$.

Data la struttura del riferimento (5.3) possiamo esprimere la (5.4) in funzione di

- $K(\cdot) = B(\cdot)/E(\cdot)$
- $\lambda(t)$
- $w(t+i)$ per $i = 0, 1, \dots, N-1$, cioè quelli noti al tempo t

La sequenza $\{f(t+i)\}_{i=0}^M$ serve per effettuare la predizione su M passi che verifica il soddisfacimento dei vincoli e quindi per scegliere $\lambda(t)$.

Possiamo dunque scrivere, ponendo per brevità $\lambda = \lambda(t - h)$,

$$\begin{aligned}
f(t + j|t - h) &= \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i+j+h} y(t - h) + \\
&\quad \left[(1 - \lambda^{i+j+h}) \begin{cases} w(t + i + j) & \text{per } j + i \leq N - 1 - h \\ w(t + N - 1 - h) & \text{per } j + i \geq N - h \end{cases} \right] \\
&= \lambda^{j+h} K(\lambda) y(t - h) + \\
&\quad \sum_{i=0}^{N-1-h-j} k_i (1 - \lambda^{i+j+h}) w(t + i + j) + \\
&\quad \sum_{i=N-h}^{\infty} k_i (1 - \lambda^{i+j+h}) w(t + N - 1 - h) \\
&= \lambda^{j+h} K(\lambda) y(t - h) + \\
&\quad \sum_{i=0}^{N-1-h-j} k_i (1 - \lambda^{i+j+h}) w(t + i + j) + \\
&\quad \left[K(1) - \lambda^{j+h} K(\lambda) \right] w(t + N - 1 - h) - \\
&\quad \sum_{i=0}^{N-h-1} k_i (1 - \lambda^{i+j+h}) w(t + N - 1 - h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{j+h} K(\lambda) y(t-h) + \sum_{i=0}^{N-2-h-j} k_i (1 - \lambda^{i+j+h}) w(t+i+j) + \\
&\quad [K(1) - \lambda^{j+h} K(\lambda) + k_{N-1-h-j} (1 - \lambda^{N-1-h}) - \\
&\quad \sum_{i=0}^{N-h-1} k_i (1 - \lambda^{i+j+h})] w(t+N-1-h)
\end{aligned}$$

In definitiva,

$$f(t+j|t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^{j+h}(t-h) K(\lambda(t-h)) y(t-h) + \sum_{i=0}^{N-2-h-j} k_i (1 - \lambda^{i+j+h}(t-h)) w(t+i+j) + \\
&\quad [K(1) - \lambda^{j+h}(t-h) K(\lambda(t-h)) - \\
&\quad \sum_{i=0}^{N-h-2} k_i (1 - \lambda^{i+j+h}(t-h))] w(t+N-1-h)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, M$$

$$\forall h = 0, 1, \dots, \infty$$

dove le sommatorie sono da intendersi nulle qualora l'estremo superiore risulti minore strettamente di 0.

L'algoritmo che ad ogni passo t descrive la scelta dell'ingresso $u(t)$ da dare all'impianto è rappresentato in figura (5.2) e può essere così enunciato:

1. Acquisisci $y(t)$, $w(t+N-1)$ e $v(t-1)$
2. $\lambda \leftarrow 0$

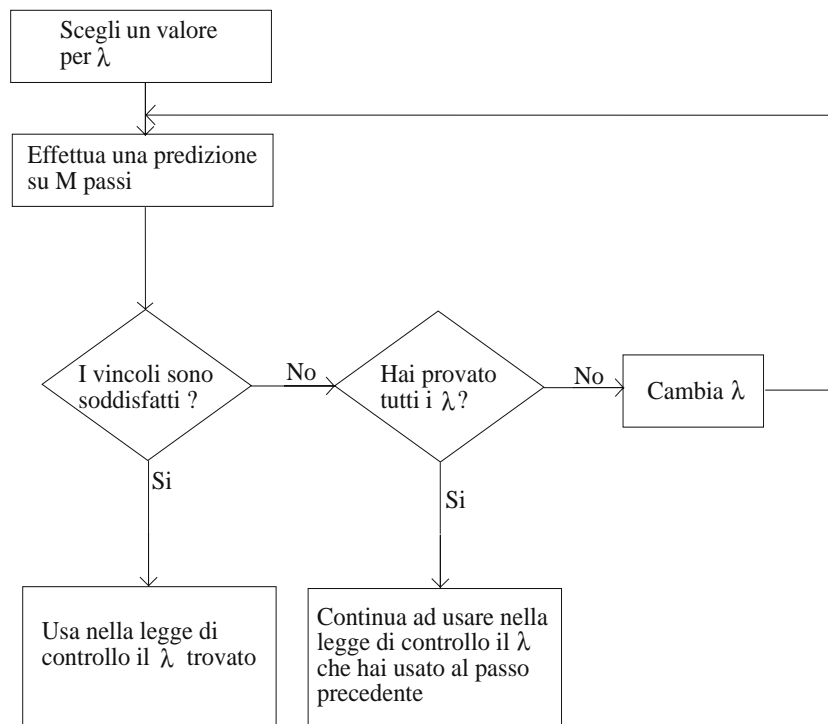


Figura 5.2: Scelta in linea del parametro λ

3. $i \leftarrow 0$

4. Sostituendo $h = 0$ e $\lambda(t - h) = \lambda$ poni $f(t + i)$ come nella (5.6)

5. Calcola $v(t + i|t, \lambda)$ mediante la (5.5) e la funzione di trasferimento (5.1)

6. $v(t + i|t, \lambda)$ soddisfa il vincolo ?

SI: $i \leftarrow i + 1$

NO: Hai provato tutti i $\lambda < 1$ che potevi provare?

NO : Cambia λ e vai a 3

SI : poni $h \rightarrow h + 1$, calcola $f(t + 0)$ come nella (5.6) e vai a 8

7. $i = M + 1$?

NO: Vai a 4

SI: $\lambda(t) \leftarrow \lambda$, $h \rightarrow 0$

8. Calcola $u(t)$ mediante la legge di controllo (5.5)

dove all'istante $t = 0$ abbiamo inizializzato con

$$h = 0$$

avendo supposto l'esistenza di un $\lambda(0)$ e quindi di un riferimento $r(0 + i|0)$ ammissibile.

5.3 Parametri di simulazione

Consideriamo qui di seguito i vari parametri che entrano in gioco nella legge di controllo descritta in questo capitolo, parametri da scegliere *prima* della messa in funzione del controllore stesso sull'impianto da regolare.

• **Parametri di regolazione primaria**

- ρ . Peso sugli incrementi dell'ingresso nel funzionale di costo J (3.6) che definisce il problema di regolazione primaria LQ. Deve essere tale che, con i vincoli imposti, si abbiano variazioni di λ il più possibile distribuite sull'intervallo $[0, 1)$. Confronta quanto osservato a pag. 93.
- N . Indica che al tempo t sono noti al controllore i campioni della traiettoria da inseguire $w(t+i)$ per $i=0, 1, \dots, N-1$. Dalle simulazioni risulta che per M abbastanza grande la conoscenza del futuro è nociva, in quanto rende il controllo eccessivamente cauto [Cfr. figure (4.23)–(4.28)].
- $P_0(\mathbf{d})$. Ininfluyente in ambito deterministico, agisce nei confronti di disturbi sull'ingresso e sull'uscita in maniera analoga a quanto descritto nella sezione (3.7).

• **Parametri di vincolo**

- $B_v(\mathbf{d}), A_v(\mathbf{d})$. Definisce la traiettoria $v(t+i)$ sulla quale saranno imposti i vincoli.

$$v(t) = \frac{B_v(\mathbf{d})}{A_v(\mathbf{d})}u(t)$$

- V_{max} . Definisce il vincolo imposto sul segnale $v(t+i)$:

$$|v(t+i)| \leq V_{max} \quad \forall i = 0, 1, \dots, M \quad (5.7)$$

É quasi superfluo ricordare che minore è V_{max} peggiori sono le caratteristiche di inseguimento. Nel caso in cui la traiettoria $w(t)$ abbia dei lunghi tratti costanti di valore W_k è opportuno scegliere

$$V_{max} > \frac{\max_k W_k}{H_{yv}(1)} H_{yw}(1)$$

cioè in modo che i set-point W_k siano raggiungibili.

• **Parametri per la scelta scelta in linea di λ**

– **G, μ .** Definiscono la scala discreta sulla quale puo' variare λ :

$$\lambda \in G = \{0, 1 - \mu, 1 - \mu^2, \dots, 1 - \mu^{m_1}\} \text{ con } \mu^{m_1} \leq \lambda_{max} < \mu^{m_1+1}$$

Occorre ricordarsi che nel caso peggiore il numero di operazioni per calcolare $u(t)$ dipende in maniera proporzionale dal numero di elementi di G e quindi da μ e dal parametro λ_{max} che definiamo qui sotto.

– **λ_{max} .** In molti casi non potere scegliere valori di λ molto vicini a 1 può causare l'infrazione dei vincoli. In fase di avvio di manovra, inoltre, non avere a disposizione un $\lambda < 1$ sufficientemente elevato può far sí che il controllore ponga $\lambda = 1$ e quindi che la manovra non abbia nemmeno inizio.

– **M .** È la lunghezza dell'orizzonte nel futuro di predizione sul quale viene verificato il soddisfacimento dei vincoli come nella (5.7). Ricordiamo [Cfr. pag. 115]) che

1. Il calcolo di $u(t)$ richiede un numero di operazioni proporzionali ad M .
2. Un valore di M troppo basso può portare lo stato del sistema in "vicoli ciechi" per uscire dai quali e continuare il *tracking* occorrerebbe violare i vincoli. Osservando la figura (5.1) e supponendo che $w(t) < H_{wv}(1)V_{max}$ si vede che una scelta di M che garantisce il rispetto dei vincoli è

$$M = N + T_a$$

dove T_a è il tempo di assestamento di $v(t)$ nel sistema ad anello chiuso per eccitazione $w(t)$ al gradino.

Osservazione 5.1

Occorre precisare cosa si intende per tempo di assestamento del sistema ad anello chiuso. Per $\lambda = 0$ esso dipende essenzialmente dai poli dominanti del fattore spettrale $E(d)$. Per $\lambda \neq 0$ ma fisso, dipende dai poli di $E(d) - \frac{B(\lambda)}{E(\lambda)}B(d)$. In realtà, non essendo il parametro $\lambda(t)$ costante, queste argomentazioni assumono soltanto validità come "regole di massima" e del tutto inutili se non si conosce la gamma di valori su cui varierà di fatto $\lambda(t)$. In generale occorrerà allora stimare sulla base dei vincoli imposti su $v(t)$ quale potrà essere il tempo di assestamento del sistema per eccitazione $w(t)$ al gradino (ad esempio per via simulativa o sperimentale), sommare a tale tempo N e quindi ottenere un buon valore per M . Questo potrà essere sintonizzato in maniera più fine a posteriori, cioè in seguito a prove sperimentali e/o simulazioni, tenendo sempre presente però il *trade-off* esistente essenzialmente fra garanzia del rispetto dei vincoli e tempo di calcolo di $u(t)$.

Osservazione 5.2

Una scelta altrettanto critica è quella che riguarda la griglia di valori G . Come già osservato la legge di controllo qui ottenuta dipende sostanzialmente da $K(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{E(\lambda)}$. Pertanto, una volta assegnato il tempo massimo T_{max} che può impiegare il calcolo di $u(t)$ (legato al tempo di campionamento del processo fisico da regolare) e ricavato quindi il numero massimo N_{max} di elementi che può costituire la griglia G , una buona scelta può essere quella di porre

$$G = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_{max}-1}\} \text{ tale che } K(\lambda_i) = \frac{i}{N_{max}}$$

Occorre sottolineare che una griglia eccessivamente grossolana può far sì che $v(t)$ non raggiunga i valori massimi consentitigli.

Osservazione 5.3

Una obiezione all'uso di questa tecnica, nel caso in cui i vincoli siano sulle ampiezze degli ingressi, potrebbe essere la seguente: perché non porre semplicemente un blocco di saturazione a monte dell'attuatore e usare un regolatore classico? Rispondiamo osservando che innanzitutto la presenza dell'azione integrale farebbe sì che si instauri un meccanismo di *wind-up* [AW84] con conseguente deterioramento dell'inseguimento; inoltre si aprirebbe l'anello di regolazione nel punto posto fra l'uscita del compensatore e l'ingresso dell'attuatore, in quanto l'ingresso calcolato non coinciderebbe più con quello effettivamente fornito all'impianto, e quindi il regolatore risulterebbe "mal informato", con conseguente deterioramento delle prestazioni. Con la nostra tecnica, invece, il regolatore tiene ben conto del vincolo imposto, organizzando di conseguenza una sequenza di ingressi $u(t)$ che lo rispetti mantenendo le prestazioni accettabili. Si potrebbe però ulteriormente obiettare che la tecnica qui sviluppata non garantisce al 100% il rispetto dei vincoli. Possiamo però replicare osservando che possiamo comunque inserire un saturatore fisico a monte dell'attuatore e tenerne conto nel modello predittivo usato per la verifica dei vincoli. Ricordiamo infatti che la tecnica qui proposta può funzionare anche in presenza di non linearità dell'impianto. In tal caso i vincoli sull'ingresso sarebbero ovviamente soddisfatti per ogni valore di λ , permettendo allora di porre ulteriori vincoli su altre grandezze dell'impianto (per esempio sull'uscita o sulle variazioni dell'ingresso), vincoli tuttavia il cui rispetto sarebbe solo assicurato "con buona probabilità".

Osservazione 5.4

Ricordiamo che prima di operare la scelta dei vincoli è opportuno effettuare una prova sperimentale e/o una simulazione in assenza di essi, onde capire che tipo di vincoli è ragionevole imporre e se è il caso, eventualmente, di variare la legge di controllo primaria.

5.4 Simulazioni

Esempio 5.1

Abbiamo considerato nuovamente l'impianto instabile (4.3) e gli stessi parametri dell'esempio (4.9). Nelle figure (5.3)–(5.4) riportiamo le forme d'onda che si sono trovate effettuando la simulazione con il metodo di gestione del riferimento sviluppato in questo capitolo.

Esempio 5.2

Abbiamo considerato l'impianto del secondo ordine sottosmorzato

$$H_{yu}(d) = \frac{0.11d + 0.09d^2}{1 - 1.4d + 0.6d^2}$$

imponendo dei vincoli sulla variabile

$$v(t) = \frac{0.2d}{1 - 1.6d + 0.8d^2}u(t)$$

In figura (5.5) riportiamo una simulazione effettuata in assenza di vincoli con i parametri

$$N = 1$$

$$\rho = 1$$

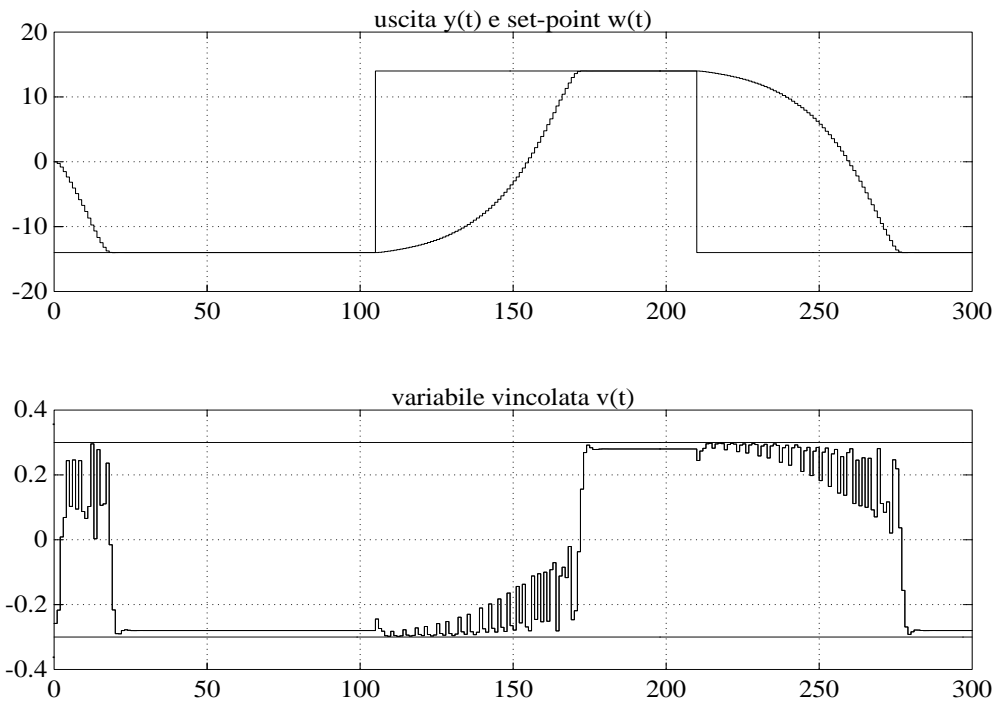


Figura 5.3: Simulazione esempio 5.1. $y(t)$, $u(t)$

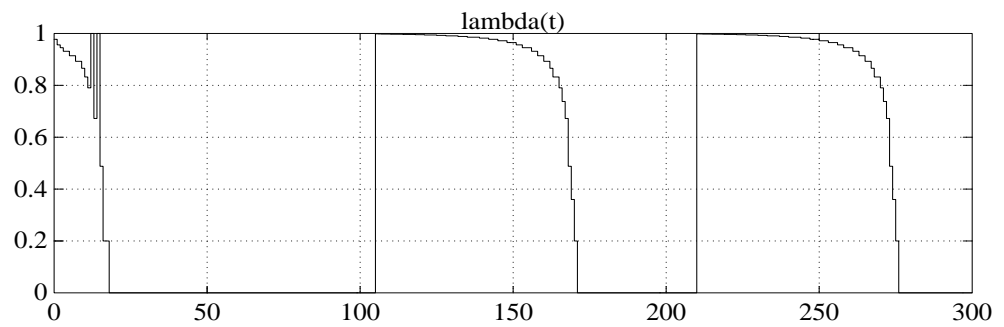


Figura 5.4: Simulazione esempio 5.1. $\lambda(t)$

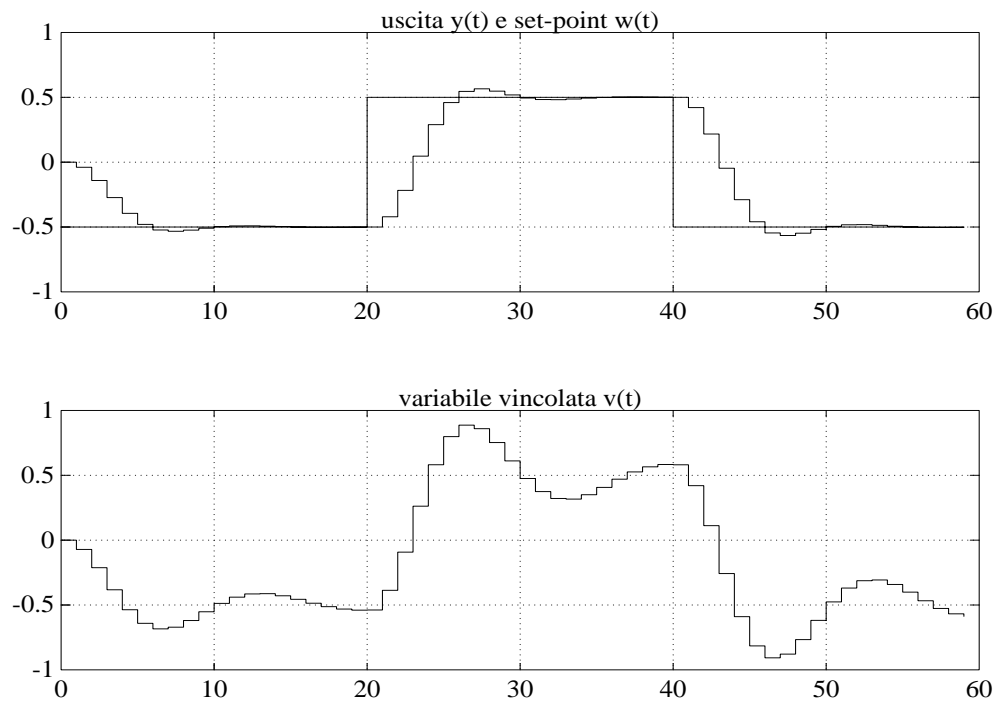


Figura 5.5: Simulazione esempio 5.2. Assenza di vincoli

$w(t)$ =onda quadra di pulsazione 0.1578 rad/s e ampiezza 0.5

Nelle figure (5.6)–(5.7) riportiamo invece i risultati che si hanno ponendo

$$M = 10$$

$$\lambda_{max} = 0.9999$$

$$V_{max} = 0.6$$

Esempio 5.3

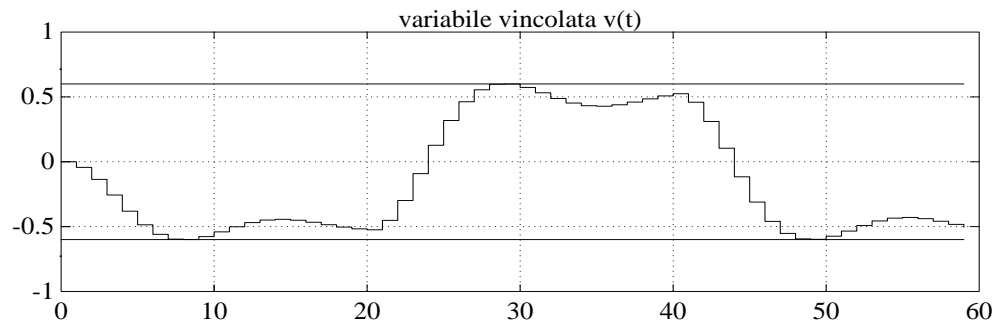
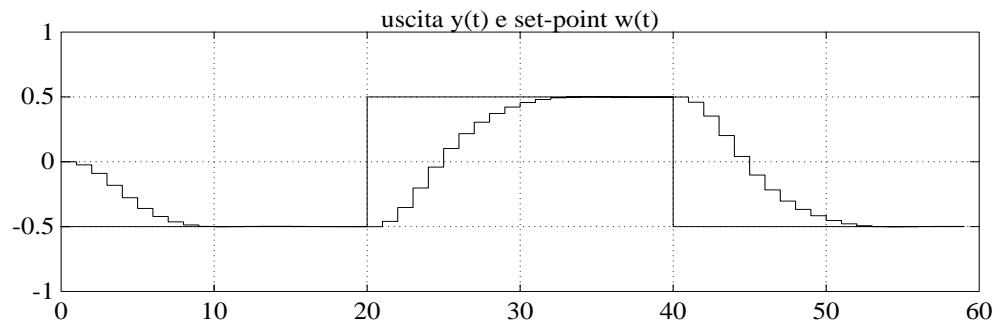


Figura 5.6: Simulazione esempio 5.2. Vincolo $|v(t)| \leq 0.6$

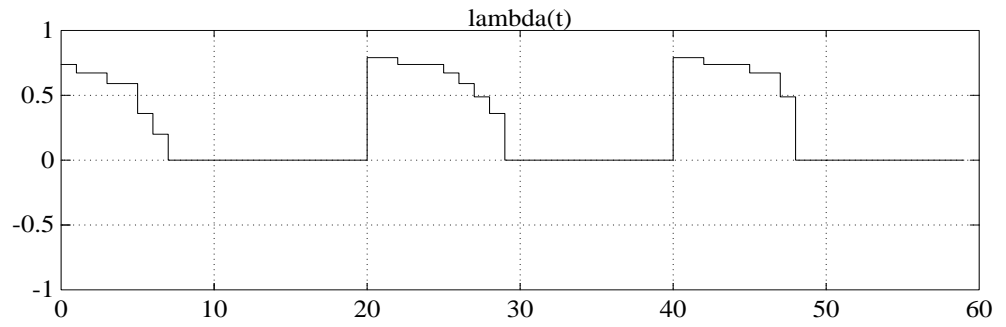


Figura 5.7: Simulazione esempio 5.2. Vincolo $|v(t)| \leq 0.6$

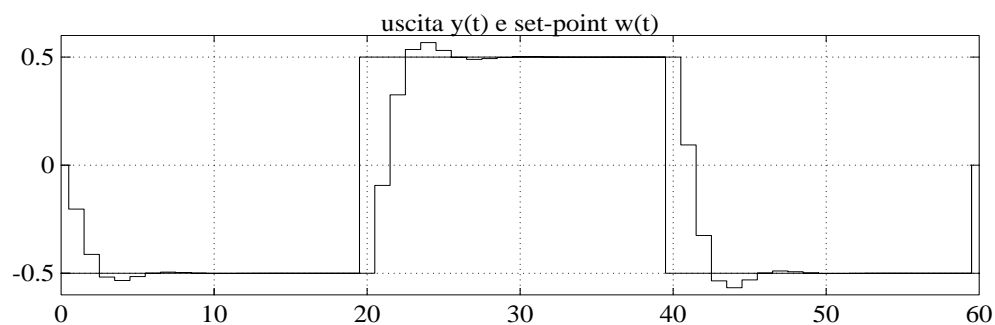


Figura 5.8: Simulazione esempio 5.3. Assenza di vincoli

Abbiamo considerato nuovamente l'impianto instabile (4.3) con i parametri di simulazione

$$M = 2$$

$$N = 1$$

$$\rho = 0.5$$

$w(t)$ = onda quadra di pulsazione 0.1578 rad/s e ampiezza 0.5

con il vincolo

$$|y(t)| \leq 0.5$$

per cercare di eliminare gli *overshoot* dovuti ad un ρ abbastanza basso. Nelle figure (5.8)–(5.9) confrontiamo i risultati che si hanno in assenza e in presenza dei vincoli.

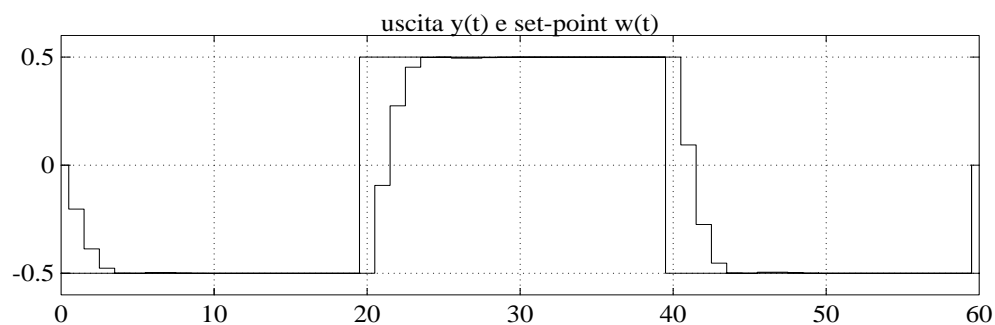


Figura 5.9: Simulazione esempio 5.3. Vincolo $|y(t)| \leq 0.5$

5.4.1 Paragone con i metodi ad orizzonte recessivo che non gestiscono il riferimento

È assai significativo confrontare i risultati ottenuti con quelli che si hanno, a parità di impianto e di vincoli, con una tecnica di controllo ad orizzonte recessivo che prevede ad ogni passo la minimizzazione per via iterativa di un funzionale di costo vincolato.

Esempio 5.4

Consideriamo nuovamente i risultati dell'esempio (5.2) e confrontiamoli con quelli ottenuti, a parità ovviamente di specifiche di progetto, da un controllore ad orizzonte recessivo del tipo studiato nel capitolo 2. In figura (5.10) riportiamo sopra i dati ottenuti con la gestione del riferimento, sotto quelli ricavati nell'altro modo³. Si vede che qualitativamente i risultati sono pressoché identici, sebbene la tecnica con gestione del riferimento, non avendo da effettuare ad ogni passo una minimizzazione iterativa, richiede un carico computazionale molto minore.

³Risultati ripresi dal rapporto tecnico [?]

Esempio 5.5

Consideriamo l'impianto (4.3) con un vincolo sulle variazioni dell' ingresso

$$|\delta u(t)| \leq 0.3$$

In figura (5.11) riportiamo sopra i risultati simulativi ottenuti con una regolazione tramite gestione in linea del riferimento, sotto quelli che si hanno applicando una tecnica del tipo sviluppato nel capitolo 2⁴.

⁴Risultati ripresi dal rapporto tecnico [?]

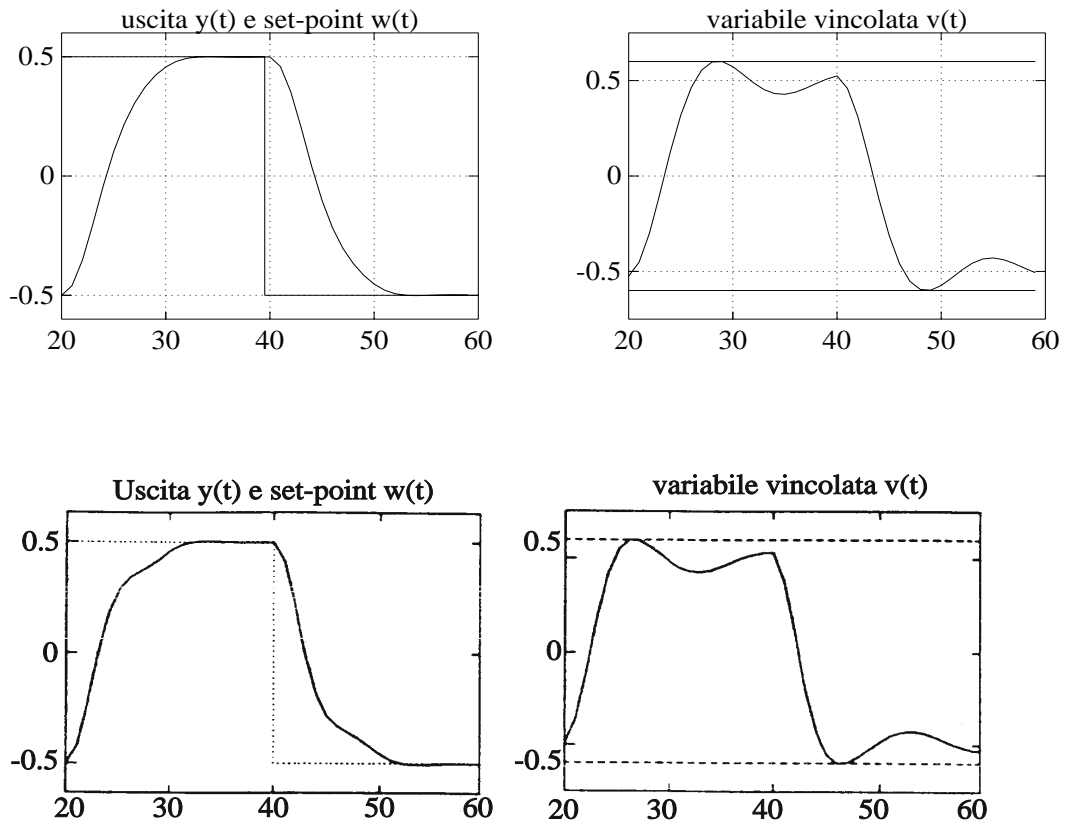


Figura 5.10: Confronto fra metodo con gestione del riferimento e tecnica RHR pura

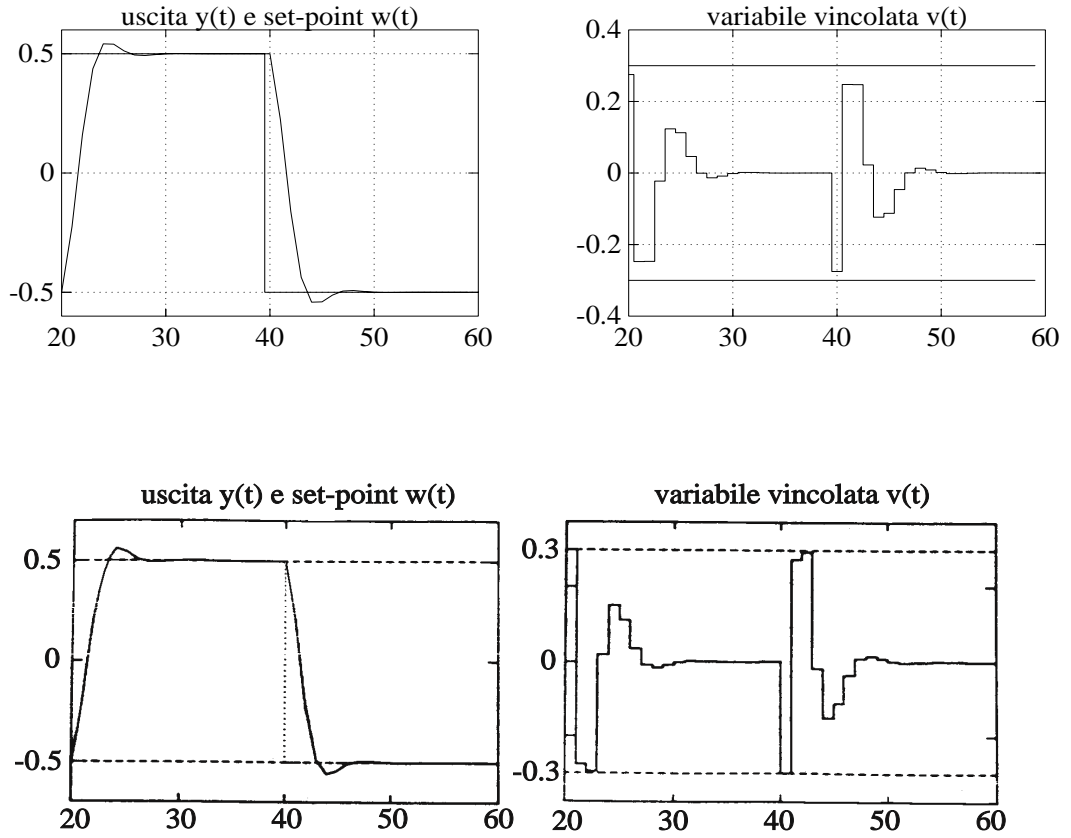


Figura 5.11: Confronto fra metodo con gestione del riferimento e tecnica RHR pura

5.5 Analisi della stabilità

Notiamo innanzitutto che il sistema ad anello chiuso è complessivamente non lineare. Infatti la legge di controllo dipende dalla grandezza $K(\lambda(t))$ e $\lambda(t)$ viene scelto sulla base di una predizione che è dipendente dallo stato attuale $x(t)$. In definitiva, se il tipo di vincolo imposto non dipende dal tempo, $\lambda(t) = \lambda(x(t), w(t))$ e quindi il sistema complessivo diventa non lineare tempo-invariante.

5.5.1 Limitatezza dello stato. Analisi n.1

Dimostreremo adesso che sotto determinate ipotesi lo stato del sistema ad anello chiuso si mantiene limitato.

Assunzione 5.1 *Il vincolo è scrivibile nella forma*

$$v(t+i) \in \Omega_v \quad \forall i = 0, 1, \dots, \infty$$

$$v(t) = \frac{B_v(d)}{A_v(d)} u(t)$$

ed è tale che

$$v(t+i) \in \Omega_v \quad \forall i = 0, 1, \dots, \infty \Rightarrow x(t) \in \Omega_x$$

dove $x(t)$ è lo stato del sistema ad anello chiuso e Ω_x è una regione limitata dello spazio cui $x(t)$ appartiene.

Ad esempio i vincoli del tipo

- $|\delta u| \leq \Omega_{\delta u}$
- $|u| \leq \Omega_u$
- $|y| \leq \Omega_y$
- $\left| \frac{B_v(d)}{A_v(d)} u(t) \right| \leq \Omega_v, \frac{\Delta(d)A_v(d)}{B_v(d)}$ asintoticamente stabile

soddisfano tale assunzione essendo il sistema costituito dal primo anello di regolazione (LQ in questo caso) BIBO stabile (*Bounded Input Bounded Output*) e privo di modi nascosti, cioè asintoticamente stabile.

Assunzione 5.2 *La traiettoria $w(t)$ da inseguire è costante*

$$w(t) \equiv w \quad \forall t \geq 0$$

Assunzione 5.3 *All'istante $t = 0$ esiste un valore di $\lambda(0) \in [0, 1]$ tale che il riferimento $r(0 + i|0)$ è ammissibile su $M = \infty$ passi, eventualmente $\lambda(0) = 1$ e $r(0 + i|0) \equiv 0$.*

Proposizione 5.2 *Se le assunzioni (5.1), (5.2) e (5.3) sono soddisfatte, la legge di controllo descritta nel paragrafo 5.2 è tale che i vincoli sono rispettati $\forall t$ e lo stato $x(t)$ del sistema rimane limitato.*

Dimostrazione. Per induzione possiamo dimostrare che con la legge di controllo descritta nel paragrafo 5.2 il riferimento è ammissibile $\forall t$. Supponiamo infatti che sia ammissibile al passo $t - 1$; si presentano allora due casi:

1. esiste un $\lambda(t) < 1$ che rende $r(t + i|t)$ ammissibile
2. viene posto $r(t + i|t) = r(t + i|t - 1)$ che è ancora ammissibile, in quanto, essendo $w(t) = w(t - 1)$ per l'assunzione (5.2) e $M = \infty$, la predizione effettuata al passo t coincide esattamente con quella al passo $t - 1$

Poiché per $t = 0$ l'assunzione (5.3) garantisce l'esistenza di un riferimento ammissibile, si conclude che i vincoli saranno soddisfatti $\forall t$. Per l'assunzione (5.1) si ha allora che $x(t)$ rimane limitato. \square

5.5.2 Limitatezza dello stato. Analisi n.2

Faremo uso adesso del teorema del *piccolo guadagno*⁵ per dimostrare nuovamente che sotto certe ipotesi lo stato si mantiene limitato.

Assunzione 5.4 *La traiettoria $w(t)$ e lo stato iniziale $x(0)$ sono tali che $\forall t \geq 0 \exists \lambda(t) \leq \lambda_{max} < 1$ tale che i vincoli possono essere soddisfatti su M passi.*

Assunzione 5.5 *La variabile vincolata $v(t)$ è una combinazione lineare dello stato $x(t)$ dell'impianto che ha $\delta u(t)$ come ingresso:*

$$v(t) = H_v x(t) + D_v \delta u(t)$$

Notiamo che sia l'ingresso $u(t)$ che l'uscita $y(t)$ e le variazioni dell'ingresso $\delta u(t)$ sono esprimibili in tale forma.

Lemma 5.1 $\forall \lambda_{max} \in [0, 1) \exists \mu < 1$ tale che $|K(\lambda)| \leq \mu \forall \lambda \in [0, \lambda_{max}]$

⁵In letteratura è noto con il nome di *small gain theorem*. Vedi ad esempio [?]

Dimostrazione. Per quanto dimostrato nel lemma (3.2) la funzione di variabile complessa $K(s)$ è analitica per $|s| < 1$ e quindi la funzione di variabile reale $|K(\lambda)|$ è continua sull'intervallo $[0, \lambda_{max}]$. Pertanto per il teorema di Weierstrass è massima per $\bar{\lambda} \in [0, \lambda_{max}]$. Per il teorema (3.1) $|K(s)| < 1 \forall s$ tale che $|s| < 1$, e quindi

$$\mu := |K(\bar{\lambda})| = \max_{\lambda \in [0, \lambda_{max}]} |K(\lambda)| < 1$$

□

Definizione 5.4 Chiamiamo ℓ_2 lo spazio di tutte le successioni $u = \{\dots, u(-1), u(0), u(1), \dots\}$, $u(k) \in \mathbb{R}^n$, tali che

$$\|u\| = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u_i(k))^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Definizione 5.5 Sia G un operatore che trasforma una successione di vettori reali $u_1 \in \ell_2$ in una successione di vettori reali $y_1 \in \ell_2$. Diciamo che è stabile se ha un guadagno

$$\|G\| := \sup_{u_1 \neq 0} \frac{\|Gu_1\|}{\|u_1\|} < \infty$$

Definizione 5.6 Un sistema dato dalla connessione in retroazione

$$\begin{aligned} y_1 &= G_2 y_2 + u_1 \\ y_2 &= G_1 y_1 + u_2 \end{aligned}$$

come mostrato in figura (5.12) si dice ben posto se per ogni scelta di $u_1, u_2 \in \ell_2$ corrisponde un' unica soluzione $y_1, y_2 \in \ell_2$.

Assunzione 5.6 La traiettoria $w \in \ell_2$, cioè è una successione ad energia finita.

Diamo adesso l'enunciato del teorema del piccolo guadagno, la cui dimostrazione può essere trovata ad esempio in [?].

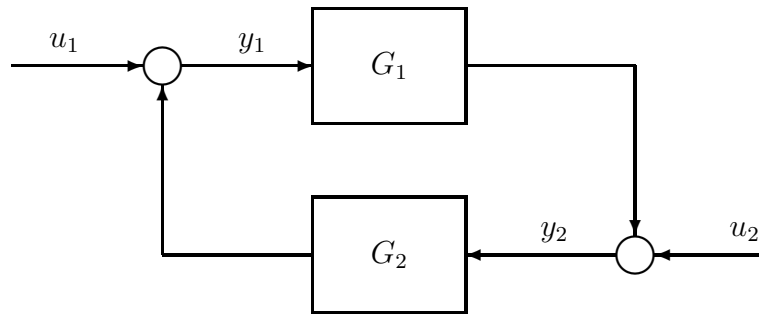


Figura 5.12: Connessione in retroazione

Teorema 5.1 (Piccolo guadagno) *Si consideri la connessione in retroazione indicata in figura (5.12). Siano G_1 e G_2 stabili. Se $\|G_2G_1\| < 1$, allora il sistema in retroazione è ben posto e l'operatore $(I - G_2G_1)^{-1}$ è un operatore stabile.*

Siamo adesso in grado di dimostrare la seguente proprietà di stabilità:

Teorema 5.2 *Nell'ipotesi in cui le assunzioni (5.4), (5.5) e (5.6) siano verificate, la legge di controllo descritta nel paragrafo 5.2 per $N = 1$ è tale che il sistema complessivo è stabile e ben posto. Pertanto i vincoli sono rispettati $\forall t$ e lo stato $x(t)$ rimane limitato.*

Dimostrazione. Le equazioni del sistema di controllo in esame possono essere riassunte nella forma

$$\begin{cases} x(t+1) = \Phi x(t) + G\delta u(t) \\ y(t) = Hx(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

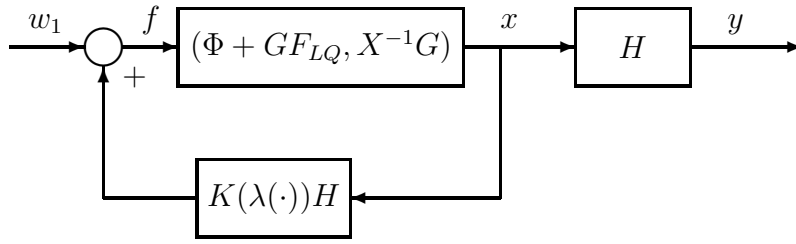


Figura 5.13: Schema a blocchi del sistema controllato

$$\delta u(t) = F_{LQ}x(t) + X^{-1}f(t)$$

$$f(t) = K(\lambda(x(t)))Hx(t) + [K(1) - K(\lambda(x(t)))]w(t)$$

Ponendo $w_1(t) = [K(1) - K(\lambda(x(t)))]w(t)$, possiamo rappresentare in base a tali equazioni il sistema controllato come nel diagramma a blocchi riportato in figura (5.13).

Indicando con f la successione delle $f(t)$ e con x la successione degli stati $x(t)$, in definitiva si ha

$$\begin{cases} x = [I - d(\Phi + GF_{LQ})]^{-1}dX^{-1}Gf & =: G_1f \\ f = K(\lambda(x))Hx + w_1 & =: G_2x + w_1 \end{cases}$$

Consideriamo $\|G_2G_1\|$:

$$\begin{aligned}
\|G_2G_1\| &= \sup_{f \neq 0} \frac{\|G_2G_1f\|}{\|f\|} \\
&= \sup_{f \neq 0} \frac{\|K(\lambda(G_1f))HG_1f\|}{\|f\|} \\
&\leq \sup_{f \neq 0} |K(\lambda(G_1f))| \frac{\|H[I - d(\Phi + GF_{LQ})]^{-1}dX^{-1}Gf\|}{\|f\|} \\
&\leq \mu \sup_{f \neq 0} \frac{\|\frac{B(d)}{E(d)}f\|}{\|f\|} \\
&\leq \mu \max_{\omega \in [0, 2\pi]} \left| \frac{B(e^{j\omega})}{E(e^{j\omega})} \right| \\
&\leq \mu < 1
\end{aligned}$$

Applicando allora il teorema del piccolo guadagno si vede che l'operatore che trasforma la successione $w \in \ell_2$ nella successione x è stabile nel senso della definizione (5.5) e quindi $x \in \ell_2$. \square

Osservazione 5.5

L'assunzione (5.6) esclude il caso in cui $w(t) \equiv w$, cioè un set-point costante, in quanto non apparterebbe allo spazio ℓ_2 . In pratica si può supporre che

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ w & \text{per } 0 \leq t \leq N \\ 0 & \text{per } t > N \end{cases}$$

dove N è un numero arbitrariamente grande e applicare ugualmente il teorema dimostrato.

Osservazione 5.6

Il risultato trovato può essere riletto in termini di diagramma di Nyquist. Di fatto l'anello di regolazione equivale al sistema lineare stabile $B(d)/E(d)$ con in retroazione un blocco statico il cui guadagno è compreso fra $-\mu$ e μ . Si vede che per ogni $K \in [-\mu, \mu]$ il diagramma non avvolge il punto $-\frac{1}{K}$ essendo tutto contenuto nel cerchio unitario. Questa osservazione ci permette di dire che una via da percorrere per ottenere ulteriori risultati di stabilità potrebbe essere quella di affrontare lo studio con criteri in frequenza quali ad esempio quello dei cerchi o di Popov, considerando come variabili dell'anello l'errore di inseguimento $(y - w)$ e il termine di feedforward f , tenendo però conto che $K = K(\lambda(x(t)))$ e quindi in ultima analisi $K = K(t)$.

Capitolo 6

Implementazione delle simulazioni

6.1 Calcolo del fattore spettrale $E(d)$

I metodi di gestione del riferimento sviluppati nei capitoli precedenti sono sempre stati simulati con una legge di controllo primaria di tipo LQ 2–GDL. Come descritto nel paragrafo 3.2 il problema LQ richiede la risoluzione dell'equazione di fattorizzazione spettrale

$$E^*(d)E(d) = \rho\Delta^*(d)A^*(d)A(d)\Delta(d) + B^*(d)B(d) \quad (6.1)$$

dove $A(d)$ e $B(d)$ sono rispettivamente il denominatore e il numeratore della funzione di trasferimento dell'impianto da regolare, $\Delta(d) = 1 - d$ e ρ è il peso sugli ingressi [cfr. par. 3.2 per maggiori dettagli]. Descriviamo qui di seguito come abbiamo ottenuto la soluzione numerica dell'equazione (6.1) in ambiente MATLAB facendo uso del *Control System Toolbox*.

Trasformazione in forma di stato. Mediante la routine `TF2SS.M` fornita nel *toolbox* si è ottenuta una descrizione in forma di stato (Φ, G, H, D) della funzione di trasferimento

$$\frac{B(d)}{\Delta(d)A(d)} = \frac{z\bar{B}(z)}{\Delta(z)\bar{A}(z)}$$

(con $D = 0$ in quanto si suppone che l'impianto sia strettamente causale, cioè $B(0) = 0$). Supponendo che i vettori \mathbf{B} e \mathbf{A} contengano i coefficienti di $\bar{B}(z)$ e $\bar{A}(z)$ in ordine decrescente rispetto al grado, è stato sufficiente porre

```
num=[B 0];  
den=conv(A,[1 -1]);           %Convoluzione fra A(z) e (z-1)  
[PHI,G,H,D]=tf2ss(num,den);
```

Soluzione della ARE (*Algebraic Riccati Equation*). Il *toolbox* mette a disposizione la routine `DLQR.M` che risolve l'equazione algebrica di Riccati

$$P = \Phi' P \Phi - \Phi' P G (\psi_u + G' P G)^{-1} G P' \Phi + \psi_x$$

e fornisce il guadagno di retroazione $F = (\psi_u + G' P G)^{-1} G' P \Phi$ tale che

$$u(t) = -F x(t)$$

è la legge di regolazione LQ. Pertanto:

```
PSIX=H'*H;
PSIU=rho;
[F,P,E1]=dlqr(PHI,G,PSIX,PSIU);
FLQ=-F;
```

Fattore spettrale. Come è noto (cfr. [?]) il polinomio caratteristico ad anello chiuso e il fattore spettrale sono legati dalla relazione

$$\frac{E(d)}{E(0)} = \det[I - d(\Phi + GF_{LQ})]$$

In generale, data una matrice quadrata M di ordine n , si ha che

$$\det(I - dM) = d^n \det(d^{-1}I - M)$$

e quindi i coefficienti del polinomio caratteristico in d si ottengono da quelli del polinomio caratteristico in z semplicemente invertendone l'ordine. Posto allora $\chi(z) = \det[zI - (\Phi + GF_{LQ})]$, si ha che

$$\frac{E(d)}{E(0)} = d^n \chi(z = d^{-1})$$

Mediante la funzione MATLAB `POLY.M` che, assegnata una matrice, ne calcola i coefficienti del polinomio caratteristico monico in z , otteniamo allora i

coefficienti di $p(d) = \frac{E(d)}{E(0)}$:

`CHI=poly(PHI+G*FLQ);`

`P=CHI(length(CHI):-1:1);`

Posto poi $e_0 = E(0)$, dall'equazione (6.1) si ha che

$$E^*(1)E(1) = \rho\Delta^*(1)A^*(1)A(1)\Delta(1) + B^*(1)B(1)$$

$$e_0^2 \frac{E^2(1)}{E^2(0)} = B(1)^2$$

ed essendo $E(d)$ definito a meno del segno, si può porre

$$e_0 = \frac{|B(1)|}{|p(1)|}$$

In definitiva:

`e0=abs(sum(B)/sum(P));`

`E=e0*P;`

Ricordando poi la (3.28) si ha che

`X=e0;`

6.2 Implementazione della legge di controllo in ambiente SIMULAB

L'ambiente di simulazione SIMULAB permette di descrivere mediante rappresentazione grafica a blocchi una qualsiasi catena di controllo (eventualmente non lineare e tempo variante) e di effettuarne la simulazione integrando le equazioni (alle differenze o differenziali) che la descrivono. I risultati delle simulazioni possono essere visualizzati in tempo reale su finestre a forma di oscilloscopio¹ oppure riportati nel "workspace" MATLAB per una ulteriore elaborazione o una visualizzazione grafica. SIMULAB è compatibile al 100% con l'ambiente MATLAB per MS-DOS. Nelle figure (6.1)–(6.4) riportiamo gli schemi usati nella simulazione.

In figura (6.1) riportiamo lo schema principale. Esso è costituito dalle seguenti parti:

- Sottoschema "Sistema controllato con LQ" comprendente l'anello primario di regolazione. Viene riportato esploso in figura (6.2).
- Sottoschema "Oscilloscopi e invio al workspace di MATLAB" che raccoglie i segnali dell'anello e li convoglia verso gli oscilloscopi e il workspace. Viene riportato esploso in figura (6.3).
- Sottoschema "Calcolo di λ e del *feedforward* $f(t)$ " che collega lo schema SIMULAB alla routine MATLAB LAM_NEWT.M la quale effettua la predizione su M passi e calcola $\lambda(t)$ e $f(t)$. Viene riportato esploso in figura (6.4).

¹Vedi ad esempio la figura (3.24).

- Generatore di forme d'onda "Set-point $w(t + N - 1)$ " il quale produce la traiettoria $w(t)$ che deve essere inseguita.
- "Ritardo di $N - 1$ passi". Poichè il controllore ha bisogno di $N - 1$ campioni futuri della traiettoria $w(t)$, la simulazione è stata fatta avvenire in tempo nominale, nel senso che l'istante t di simulazione corrisponde in realtà all'istante $t - (N - 1)$. In tal modo vi è la possibilità di memorizzare in un buffer gli $N - 1$ campioni "futuri" di $w(t)$.
- "F.d.t. da u alla variabile vincolata v " filtra l'ingresso $u(t)$ per ottenere la variabile sulla quale vengono imposti i vincoli. Affinchè la legge di controllo complessiva risulti strettamente causale, al tempo t viene fornita al controllore la misura di $v(t - 1)$. Ad esempio se $v(t) = u(t)$, ciò equivale a dire che per il calcolo di $u(t)$ si suppone noto l'ingresso fino al tempo $t - 1$.

Nella figura (6.2) riportiamo il sottoschema relativo all'anello di regolazione primaria. Notiamo la presenza dei generatori di disturbo in ingresso e in uscita all'impianto. Inoltre notiamo la presenza di una variabile denominata "y vera" la quale rappresenta l'uscita non disturbata dell'impianto. Qualora ad esempio il disturbo $n(t)$ sia un rumore bianco con distribuzione uniforme rappresentante un disturbo dovuto alla quantizzazione, y_{vera} rappresenta l'uscita fisica effettiva dell'impianto.

La figura (6.3) rappresenta invece l'interfacciamento delle variabili di sistema con gli oscilloscopi, che visualizzano in tempo (di simulazione) reale le variabili, e con il *workspace* di MATLAB in cui, al termine della simulazione, vengono caricati tanti vettori quante sono le variabili inviate; ognuno di essi contiene tutta la evoluzione nel tempo della variabile che gli è stata associata.

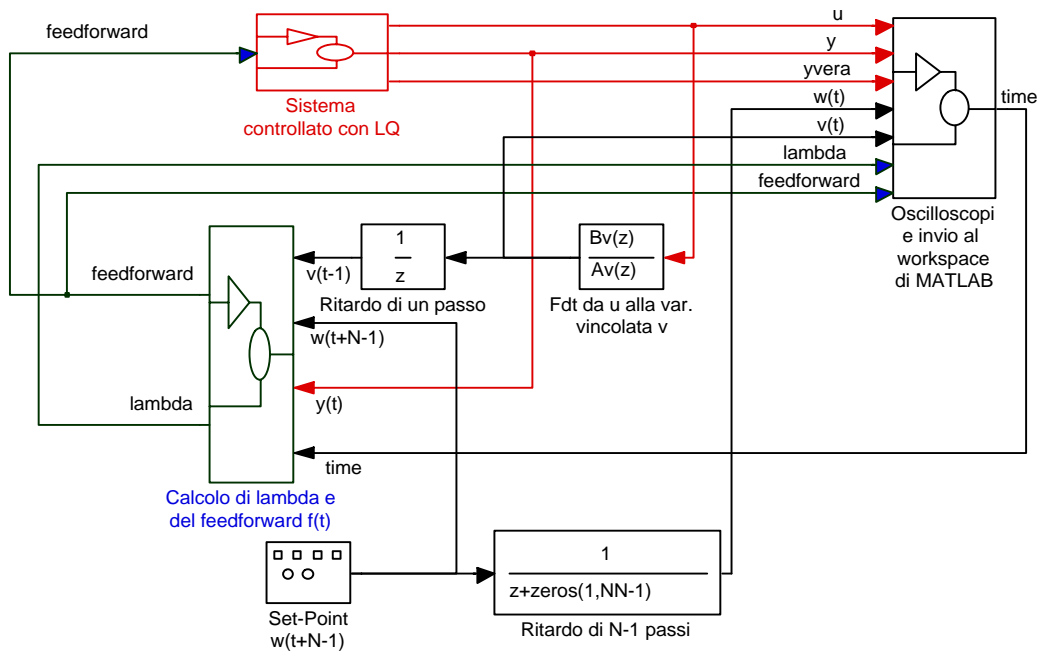


Figura 6.1: Simulazione in SIMULAB: Schema principale

In tal modo è possibile un salvataggio dei dati, una visualizzazione sullo schermo grafico, la creazione di grafici da inviare alla stampante.

Infine in figura (6.4) riportiamo il sottoschema che congiunge effettivamente il potente motore simulativo dell'ambiente SIMULAB al versatile e facilmente programmabile ambiente MATLAB. Il calcolo del termine $f(t)$ da dare in ingresso all'anello regolato con tecnica LQ viene difatti svolto dalla routine LAM_NEWT.M.

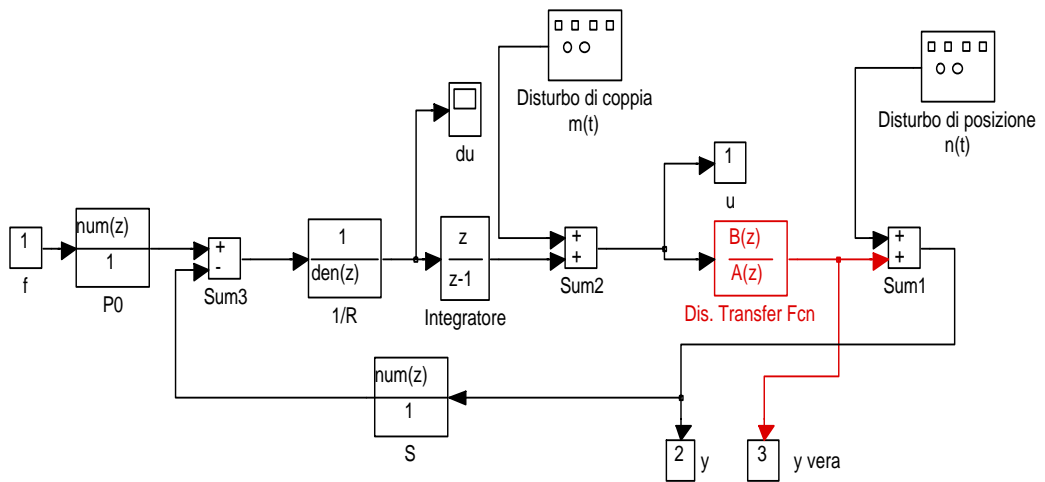


Figura 6.2: Simulazione in SIMULAB: Regolazione LQ 2-GDL

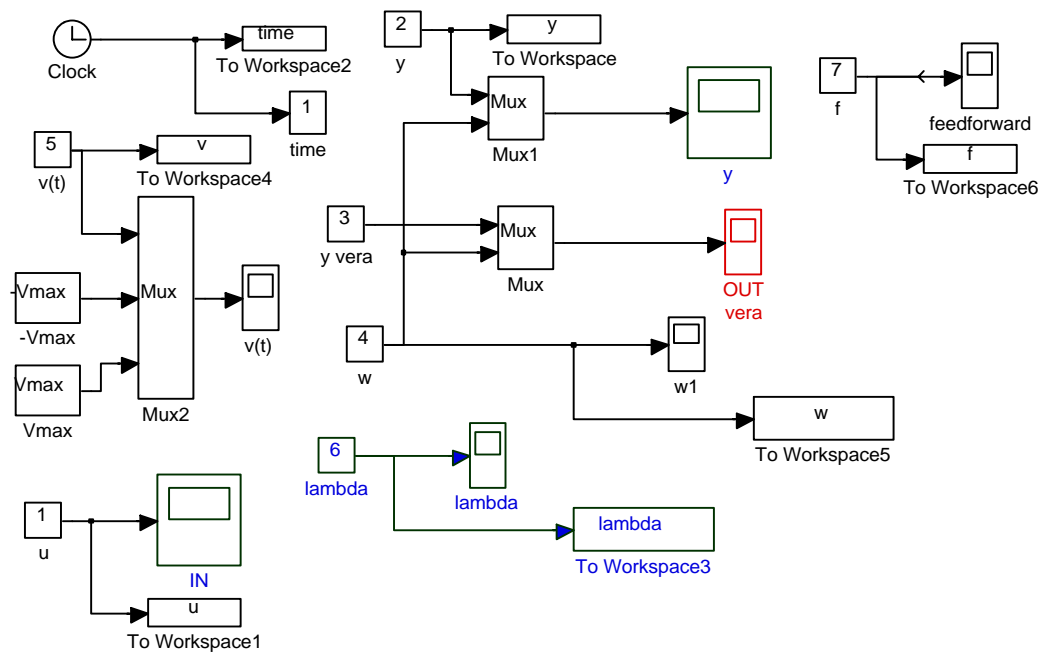


Figura 6.3: Simulazione in SIMULAB: Oscilloscopi e invio al workspace

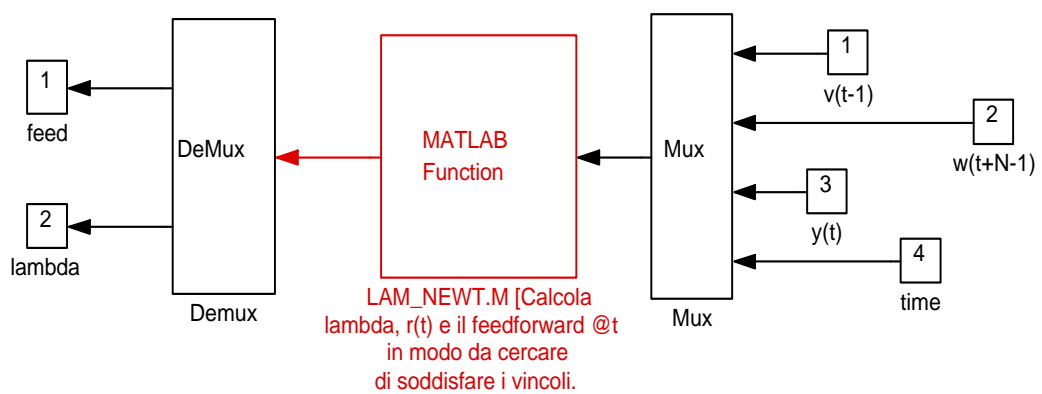


Figura 6.4: Simulazione in SIMULAB: Oscilloscopi e invio al workspace

Conclusioni

L'obiettivo del lavoro di tesi è stato quello di sviluppare delle tecniche di controllo in grado di risolvere problemi in cui si hanno dei vincoli sulle variabili di sistema, come abitualmente accade nelle applicazioni pratiche. Abbiamo visto che gli algoritmi di controllo predittivo ad orizzonte recessivo, basati sulla minimizzazione in linea di un funzionale di costo mediante programmazione matematica, riescono a stabilizzare impianti anche non lineari e tempo-varianti e contemporaneamente a rispettare i vincoli imposti. Tali metodi però possono risultare improponibili in tutte le applicazioni in cui il tempo di campionamento è troppo piccolo per l'elaboratore che deve implementare la legge di controllo. Perseguendo il medesimo obiettivo abbiamo allora ideato e studiato delle strategie che, manipolando in linea il riferimento dato ad un anello di controllo *primario* preventivamente progettato per compensare l'impianto, conseguono il rispetto dei vincoli in maniera meno pesante dal punto di vista computazionale ma altrettanto efficace in termini di prestazioni nell'inseguimento, costituendo quindi una valida alternativa ai suddetti metodi ad orizzonte recessivo. Un tale approccio è applicabile in linea di principio a qualsiasi tipo di processo per il quale si disponga di un modello che permetta di prevederne l'evoluzione, sia esso non-lineare, tempo-variante, a più ingressi e più uscite, derivante da leggi fisiche oppure identificato; per motivi di

semplicità la nostra attenzione si è però rivolta essenzialmente a sistemi SISO lineari tempo-invarianti, per i quali abbiamo visto che la scelta di un controllore primario di tipo LQ a due gradi di libertà dà ottimi risultati, comparabili a quelli conseguibili con l'uso di programmazione quadratica in linea.

Una filosofia di controllo di portata così vasta lascia ovviamente aperti moltissimi problemi. Uno di questi consiste nel capire come una metodologia basata intimamente su un modello predittivo come è quella da noi sviluppata risponda alle incertezze sul modello e sulle variabili misurate. Inoltre non abbiamo approfondito lo studio su sistemi a più ingressi e più uscite né su sistemi non lineari; ed anche nel caso lineare l'analisi della stabilità dovrà essere ulteriormente approfondita. Riteniamo che tali approfondimenti siano infatti ben giustificati dagli eccellenti risultati che ha fornito lo studio di fattibilità costituito dal presente lavoro di tesi.

Bibliografia

- [Ahl53] AHLFORS, L.V. (1953): *Complex Analysis*. McGraw–Hill.
- [AW84] ASTRÖM, K. J. and WITTENMARK, B. (1984): *Computer-Controlled Systems*. Prentice Hall International.
- [CS82] CHEN, C.C. and SHAW, L. (1982): On receding horizon control. *Automatica*, Vol. 18, p. 349-352.
- [CR80] CUTLER, C.R. and RAMAKER, B.L. (1980): Dynamic matrix control - A computer control algorithm. *Proceedings JACC*, San Francisco, U.S.A.
- [CS91] CLARKE, D.W. and SCATTOLINI, R. (1991): Constrained receding horizon predictive control. *Proceedings IEE*, Vol. 138, D, p. 347-354.
- [dKvC85] DE KEYSER, R.M.C. and VAN CAUVENBERGHE, A.R. (1985): Extended prediction self-adaptive control. *Proc. 7th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*, York, UK.
- [DV75] DESOER, C.A. and VIDYASAGAR, M. (1975): *Feedback Systems: Input–Output Properties*. Academic Press.

- [GK92] GRAETTINGER, T.J. and KROGH, B.H. (1992): On the computation of reference signal constraints for guaranteed tracking performance. *Automatica*, Vol. 28, No. 6, pp. 1125-1141
- [GPM89] GARCÍA, C.E., PRETT, D.M. and MORARI, M. (1989): Model predictive control: theory and practice – A survey. *Automatica*, Vol. 25, p. 335-348. C.E. García and D.M. Prett and M. Morari
- [GT91] GILBERT, E.G. and KOK TIN TAN (1991): Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36:1008-1020.
- [KBK83] KWON, W.H., BRUCKSTEIN, A.N. and KAILATH, T (1983): Stabilizing state feedback design via the moving horizon method. *Int. J. Control*, Vol. 37.
- [KG85] KEERTHI, S.S. and GILBERT, E.G. (1985): An existence theorem for discrete-time infinite-horizon optimal control problems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 30:907-909.
- [KG86] KEERTHI, S.S. and GILBERT, E.G. (1986): Optimal infinite-horizon control and the stabilization of linear discrete time systems: state-control constraints and nonquadratic cost functions. *IEEE Trans. Automatic Control*, 31:264-266.
- [KG88] KEERTHI, S.S. and GILBERT, E.G. (1988): Optimal infinite-horizon feedback laws for a general class of constrained discrete-time systems: stability and moving horizon approximations. *J. Optimization Theory and Applications*, 57:265-293.

- [Kle70] KLEINMAN, D.L. (1970): An easy way to stabilize a linear constant system. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 15, p.692.
- [Kle74] KLEINMAN, D.L. (1974): Stabilizing a discrete constant linear system with application to iterative methods for solving the Riccati equation. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 19, p.252-254.
- [LM85] LEMOS, J.M. and MOSCA, E. (1985): A multipredictor-based LQ self-tuning controller. *Proc. 7th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*, p.137-142, York, UK.
- [Mas76a] MARTÍN SÁNCHEZ, J.M. (1976): Adaptive Predictive Control. *Proc. IEEE*, Vol. 64.
- [Mas76b] MARTÍN SÁNCHEZ, J.M. (1976): A new solution to adaptive control. *USA Patent* no. 4, 196, 576. Priority date 4 August.
- [MLZ90] MOSCA, E., LEMOS, J.M. and ZHANG, J. (1990): Stabilizing i/o receding-horizon control. *Proc. 29th IEEE Conf. on Decision and Control*, p. 2518-2523, Honolulu, Hawaii.
- [MM90a] MAYNE, D.Q. and MICHALSKA, H. (1990): Receding horizon control of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 35, p. 814-824.
- [MM90b] MAYNE, D.Q. and MICHALSKA, H. (1990): An implementable receding horizon controller for stabilization of nonlinear systems. *Proc. 29th IEEE Conf. on Decision and Control*, p. 3396-3397, Honolulu, Hawaii.

- [MM91a] MAYNE, D.Q. and MICHALSKA, H. (1991): Robust receding horizon control . *Proc. 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, p. 64-69, Brighton, England.
- [MM91b] MAYNE, D.Q. and MICHALSKA, H. (1991): Receding horizon control of constrained nonlinear systems . *Proc. 1st European Control Conference*, p. 2037-2042, Hermés
- [MOSCA] MOSCA, E. (in corso di stampa): *Optimal, Predictive and Adaptive Control*. Prentice Hall.
- [MZ92] MOSCA, E. and ZHANG, J. (1992): Stable redesign of predictive control. *Automatica*, Vol. 28, p. 1229-1233.
- [Pet84] PETERKA, V. (1984): Predictor-based self-tuning control. *Automatica*, Vol. 20, p. 39-50.
- [RRTP78] RICHALET, J., RAULT., A., TESTUD, J.L. and PAPON, J. (1978): Model predictive heuristic control: applications to industrial processes. *Automatica*, Vol. 14, No. 5, pp. 413-428
- [RT90] RICHALET, J. and TZAFESTAS (EDS.), S. (1990): *Proc. CIM-Europe Workshop on Computer Integrated Design of Controlled Industrial Systems*. Paris, France.
- [SC93] SCOKAERT, P.O.M. and CLARKE, D.W. (1993): Stability questions in predictive control. Part II: incorporation of hard inequality constraints. University of Oxford, Department of Engineering Science, Report No. 1983/93.

- [Sha79] SHAW, L. (1979): Nonlinear control of linear multivariable systems via state-dependent feedback gains. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 24, p. 108-112.
- [Soe92] SOETERBOEK, R. (1992): *Predictive Control: A Unified Approach*. Prentice Hall .
- [TC88] TSANG, T.T.C. and CLARKE, D.W. (1988): Generalized predictive control with input constraints. *Proc. IEE*, Vol. 135, D, p. 451-460.
- [Tho75] THOMAS, Y.A. (1975): Linear quadratic optimal estimation and control with receding horizon. *Electronics Letters*, Vol. 11, p. 19-21.
- [TSS77] THOMAS, Y.A., SARLAT, D. and SHAW, L. (1977): A receding horizon approach to the synthesis of nonlinear multivariable regulators. *Electronics Letters*, Vol. 13-11, p. 329.
- [Yds84] YDSTIE, B.E. (1984): Extended horizon predictive control. *Proc. 9th IFAC World Congress*, Vol. VII, p. 133-137, Budapest, Hungary.

Appendice

Codici MATLAB

Riportiamo qui di seguito una piccola parte del pacchetto di codici scritti in linguaggio MATLAB utilizzati nel lavoro di tesi. In particolare riproduciamo la parte utilizzata per effettuare le simulazioni in ambiente SIMULAB per lo studio degli algoritmi sviluppati nei capitoli 4 e 5. Descriviamo brevemente tali codici sorgenti:

- `OX2_NEW.M`. Definisce l'impianto $B(z)$, $A(z)$ e tutti i parametri necessari per la simulazione $(B_v(z), A_v(z), l_{max}, M, N, \rho, V_{max}, \mu, P_0(d))$.
- `NEW_GO.M`. Risolve il problema di fattorizzazione spettrale costruendo il polinomio $E(d)$ e risolve la equazione diofantina $\Delta(d)A(d)R(d) + B(d)S(d) = X^{-1}P_0(d)E(d)$. Definisce inoltre tutte le variabili che verranno usate nella simulazione con lo schema `SIMULAB NEWT.M`.
- `LAM_NEWT.M`. Calcola un riferimento $r(t + i|t)$ ammissibile e quindi il valore $\lambda(t)$ e il termine di *feedforward* $f(t)$ ad un generico istante t secondo la tecnica sviluppata nel capitolo 5. Questa routine viene chiamata dallo schema `SIMULAB NEWT.M`. Riceve in ingresso $v(t-1)$, $y(t)$ e $w(t + N - 1)$. Il suo funzionamento è sostanzialmente quello descritto nel paragrafo 5.2 a pag. 133. Vengono definite alcune variabili, tra cui
 - `h` che definisce quanti passi sono trascorsi da quando si è trovato un $\lambda < 1$, cioè $\lambda(t - h)$
 - `lold`= $\lambda(t - h)$
 - `y_h`= $y(t - h)$
 - `w_h`= $w(t - h)$

Sottoliniamo che il codice non è ottimizzato, in quanto utilizzato soltanto in ambiente simulativo. Esso potrebbe essere ugualmente ottimizzato, tradotto in linguaggio C e adoperato per le simulazioni in ambiente SIMULAB al fine di velocizzarle.

- `DIOPHANT.M`. Routine che risolve l'equazione diofantina con una assegnata precisione ϵ .
- `MCD.M`. Calcola il Massimo Comune Divisore di due polinomi assegnati. Serve per togliere i fattori comuni.
- `NO_ZERI.M`. Elimina da un vettore le prime componenti nulle. Serve per ottenere il grado effettivo di un polinomio i cui coefficienti sono memorizzati nel vettore.
- `LAM_RIFT.M`. È l'equivalente della funzione `LAM_NEWT` descritta sopra, ma per i metodi di gestione del riferimento sviluppati nel capitolo 4.

```

% OX2_NEW.M File contenente tutti i parametri di simulazione
%
%(C) 1993 by A.Bemporad, Firenze 28/10/'93

Tstop=300;%Durata della simulazione, compreso il tempo in cui il futuro
           %viene caricato nei buffer
lmax=.9999;
MM=20;
NN=1; %Numero di campioni futuri di w(t) che si suppongono noti al
      %controllore

ro=.1;

%Vincolo: v(t+i)<Vmax, i=0,1, ..., MM
Vmax=.8;
mu=.8; %lambda=1,1-mu,...,1-mu^MAX, dove 1-mu^(MAX-1)<lmax

%IMPIANTO Oxford2
B=[1 0]; %Funzione di trasf. in z da u a y
A=[1 -2.3 1.32];

%Definisce fdt da u a v (che puo' essere anche non propria. Ci pensa
%l'algoritmo che calcola il nuovo lambda ad acquisire un v ritardato
%di un passo).

%Per mettere i vincoli su u, poni Bv=[1 0], Av=[1 0]
%Per mettere i vincoli su du, poni Bv=[1 -1], Av=[1 0]

```

```

Bv=[1 0];
%Bv=[1 -1];
%Bv=[.2 0];      %Funzione di trasf. in z da u a v
%Bv=B;

Av=[1 0];
%Av=[1 -1.6 .8]; %v=variabile su cui si mettono i vincoli
%Av=A;

P0=poly(1/.8*ones(1,length(A)-1)); %NOTA: P0(d) deve essere monico
      %(P0(0)=1).
P0=P0/P0(length(P0));      %Inoltre ricorda che P0(z) deve avere
      %un grado pari almeno a na. Ricorda che
      %qualora risultasse length(P0(d))<na+1,
      %P0(z) avra' dei poli in z=0, i quali
      %non danno effetti di attenuazione nella
      %fdt Hun(e^jw)

%P0=1;

%Viene invocato RIF_GO.M
new_go

```

```

%NEW_GO.M Prepara il workspace per la simulazione con il sistema
%
%      SIMULAB denominato RIFER.M. Risolve il problema di
%
%      fattorizzazione spettrale costruendo il polinomio E(d)
%
%      e risolve la equazione diofantina
%
%      Delta A R + B S = PO E.
%
%
%      Viene richiesta la definizione di
%
%      A      = denominatore A(z) dell'impianto Huy(z) ordinato
%
%              secondo potenze decrescenti di z
%
%      B      = numeratore B(z) di tale impianto
%
%      ro     = peso sulle variazioni dell'ingresso du(t+i) nel
%
%              funzionale di costo J che definisce il problema
%
%              LQ sottostante
%
%      NN     = si suppone noto w(t+i) per i=0,1,...,NN-1
%
%      PO     = polinomio osservatore i cui modi, trasparenti in
%
%              ambito deterministico, influenzano soltanto le
%
%              risposte nei confronti di disturbi sull'ingresso
%
%              o sull'uscita.
%
%
%
%      Bv, Av = numeratore/denominatore in z della funzione di
%
%              trasf. da u(t) a v(t)=variabile sulla quale vengono
%
%              messi i vincoli
%
%      MM     = Lunghezza dell'orizzonte nel futuro predetto sul
%
%              quale viene verificato il vincolo
%
%      Vmax   = Vincolo su v(t): v(t+it-1)<Vmax per i=0,1, ...,MM
%
%      mu     = Definisce la scala discreta sulla quale puo'
%
%              variare lambda. lambda=1,1-mu, ..., 1-mu^n dove n
%
%              e' tale che 1-mu^(n-1)<lmax<1-mu^n

```

```

%      lmax   = (vedi sopra)
%      Tstop  = Istante in cui la simulazione deve terminare
%
%(C) 1993 by A.Bemporad, Firenze 29/10/1993

if NN>1,
disp(['NN=' num2str(NN) ' => Futuro: SI'])
else
disp(['NN=' num2str(NN) ' => Futuro: NO'])
end
disp('r(t+it)=l(t)^i y(t) + (1-l(t)^i) w(t+i) per l(t)<1')
disp('      =r(t+it-h)                per l(t)=1')

disp(['MM=' num2str(MM)])
disp([sprintf('Vmax=%0.6f',Vmax) sprintf('; mu=%0.6f',mu)
sprintf('; ro=%0.6f',ro)])
disp(sprintf('lmax=%0.6f',lmax))
P0

Dyu=A;
N=B;

%      1. Viene calcolata la rappresentazione i/s/o (PHI,G,H,DD) di
%      Hy,u(z)=z/(z-1)*Hy,u(z)
%      2. Viene calcolato il numeratore N1(d)=H*B2(d) della fdt
%      Hy,du(d)
%      3. Viene calcolato il guadagno di retroazione FLQ

```

```

%      4. Viene calcolato il fattore spettrale E (polinomio in d)
%      5. Vengono calcolate le matrici X e Y del pb. LQ
%      6. Viene calcolato il guadagno di feedforward Fw
%
%      Dati di ingresso: N,Dyu
%
%(C) 1993 by A.Bemporad, Firenze, 14/9/'93

N1=no_zeri([N(length(N):-1:1),zeros(1,length(Dyu)-length(N))]);
D1=no_zeri(Dyu(length(Dyu):-1:1));

num=[N 0];
den=conv(Dyu,[1 -1]);
%Toglie eventuali radici nulle comuni al numeratore e al denominatore,
%dovute ad un ritardo di trasporto 1/z^sigma e all'integratore
%z/(z-1):
if Dyu(length(Dyu))==0,
num=N;
den=den(1:(length(den)-1));
end

[PHI,G,H,DD]=tf2ss(num,den);    %Rappresentazione i/s/o

PSIX=H'*H;

[F,P,E1]=dlqr(PHI,G,PSIX,ro);
FLQ=-F;                        %Calcolo del guadagno di retroazione FLQ

```

```

CHI=poly(PHI+G*FLQ); %det(zI-(PHI+G*FLQ))

P=CHI(length(CHI):-1:1); %P=E(d)/E(0)

CHIPHI=poly(PHI);

e0=abs(sum(N1)/sum(P));

E=e0*P; %Fattore spettrale
X=e0;
%Y=-X*FLQ;

na=length(D1)-1;
nb=length(N1)-1;
nn=max(na,nb);
ne=max(na+1,nb);

%Converte Bv(z)/Av(z) in Nv1(d)/Dv1(d) con Dv1(0)=1;
nBvAv=max(length(Bv),length(Av));
Dv1=no_zeri([Av(length(Av):-1:1) zeros(1,nBvAv-length(Av))]);
Nv1=no_zeri([Bv(length(Bv):-1:1) zeros(1,nBvAv-length(Bv))]);
Nv1=Nv1/Dv1(length(Dv1));
Dv1=Dv1/Dv1(length(Dv1));

Et=conv(E,Dv1); %Polinomio E~(d);
Bt=conv(D1,Nv1); %Polinomio B~(d);

net=length(Et)-1;

```



```

nbt=length(Bt)-1;

%Calcola i polinomi R(d) e S(d) tali che
%A(d)Delta(d)R(d)+B(d)S(d)=P0(d)E(z)
%dove A(d)=D1(d), B(d)=N1(d)

[R,S]=diophant(conv([-1 1],D1),N1,conv(E/e0,P0));

Ebarra=no_zeri(E(ne+1:-1:1));

nr=length(R)-1;
ns=length(S)-1;
nrs=max(nr,ns);

%INIZIALIZZA VETTORI PER LA MATLAB FUNCTION NEW_RIF.M
vv=zeros(MM+net+1,1);
ww=zeros(NN,1);
yy=zeros(MM+NN+ne,1);
ff=zeros(nbt+1+MM+(NN-1),1);
LL_h=ones(0:max(NN-2+MM,MM));
k_l_h=1;
lambda=1;

%Calcola gli NN valori KK(j) della risposta all'impulso di N(d)/E(d)
nBE=max(nb,ne);
KK=dimpulse([N1(nb+1:-1:1) zeros(1,nBE-nb)], [E(ne+1:-1:1)
zeros(1,nBE-ne)], NN-1);
k_1=sum(N1)/sum(E);

```

```
h=0;
```

```
lold=1;
```

```
global lambda NN MM vv ww yy ff N1 E X ne nb nBE Vmax mu KK k_1
```

```
global Et Bt net nbt futuro reftype lmax h lold y_h w_h LL_h k_l_h
```

```

function out=lam_newt(in)
%Calcola il lambda e termine di feedforward f(t)=sum(ki*r(t+i)) che
%deve essere dato all'impianto. Questa subroutine viene richiamata
%dallo schema Simulab NEWT.M
%Questa subroutine suppone noti all'istante t l'uscita y(t) e la
%variabile v(t-1) misurate dall'impianto.
%
%(C) 1993 by A. Bemporad, Firenze 28/10/1993

%in=[v(t-1), w(t+NN-1), y(t), time]'
%out=[feed(t), lambda(t)]'

time=in(4);

%Inserisce w(t+NN-1) nel buffer ww che ha lunghezza NN
ww=[ww(2:NN);in(2)];

if time<NN-1,      %Finche' non si raggiunge l'istante t=0 nominale
out=[0 1]'; %mantiene lambda=1, f(t)=0 ed esce dalla funzione.
return
end

%Inserisce v(t) nel buffer vv che ha lunghezza net+MM+1
vv=[vv(2:MM+net+1);0];
vv(net)=in(1);

%Inserisce y(t) nel buffer yy che ha lunghezza ne+MM+NN
yy=[yy(2:MM+NN+ne);0];

```

```

yy(ne+1)=in(3);

%Shifta di 1 il buffer ff che ha lunghezza nbt+1+MM e inserisce
%l'ultimo
ff=[ff(2:nbt+1+MM+(NN-1));0];

indice=-1;
condiz1=1;
mumu=1/mu;

while condiz1,
indice=indice+1;
mumu=mumu*mu;
l=1-mumu;

LL=(1*ones(0:max(NN-2+MM,MM))).^(0:max(NN-2+MM,MM));
k_l=polyval(N1,l)/polyval(E,l);

%Guarda se con questo lambda=l i vincoli sono soddisfatti
vincolosodd=1;
j=-1;

while vincolosodd & (j<MM),
j=j+1;

TT=KK(1:NN-2-j+1).*(ones(NN-2-j+1,1)-LL(j+1))*...

```

```

LL(1:NN-2-j+1)');

ff(nbt+1+j)=LL(j+1)*k_l*yy(ne+1)+...
sum(TT.*ww(1+j:1+NN-2))+...
(k_l-LL(j+1)*k_l-sum(TT))*ww(NN);

vv((net+1)+j)=(-sum( Et(1:net)'.*vv((net+1+j-...
    net):(net+1+j-1)))+sum(Bt'.*ff(nbt+1+...
j-nbt:nbt+1+j)))/X;

%QUI SI GUARDA SE v(t+i) SODDISFA IL VINCOLO

if abs(vv((net+1)+j))>Vmax,
vincolosodd=0;
end
end
if (vincolosodd)|(l>lmax),
condiz1=0;
end
end
if l>lmax,
l=1;
h=h+1;
l_h=lold^h;

TT=KK(1:1+NN-2-h).*(ones(NN-2-h+1,1)-l_h*LL_h(1:NN-2-h+1)');

ff(nbt+1)=l_h*k_l_h*y_h+sum(TT.*ww(1:NN-2-h+1))+...

```

```

(k_1-l_h*k_l_h-sum(TT))*w_h;

else
h=0;
lold=1;
y_h=yy(ne+1);
w_h=ww(NN);
LL_h=(1*ones(0:max(NN-2+MM,MM))).^(0:max(NN-2+MM,MM));
k_l_h=polyval(N1,1)/polyval(E,1);

end

lambda=1;

feed=ff(nbt+1)/X;

out=[feed lambda]';

end

```

```

function [R,S]=diophant(A,B,Q,e)
% Uso: [R,S]=DIOPHANT(A,B,Q,e)
% Risolve l'equazione diofantina RA+SB=Q nei polinomi incogniti R e S
% con le condizioni: gradoA=n gradoB<=n gradoR=n gradoS<=n-1 ==>
% gradoQ<=2n.
% e=precisione da usare (se omissso, e=1E-10)
%
% (C) 1991 by Alberto Bemporad - Firenze, 9/ 3/'91
% (C) 1993 by Alberto Bemporad - Firenze, 2/10/'93
% (C) 1993 by Alberto Bemporad - Firenze, 11/10/'93

% Pone A,B,Q come vettori riga
A=A(:)';
B=B(:)';
Q=Q(:)';

error='ERRORE!';
if nargin==3, e=1E-10; end

% Elimina eventuali coefficienti nulli relativi alle potenze di
% grado massimo
A=no_zeri(A);
B=no_zeri(B);

n=length(A)-1;           % n=grado del polinomio A
m=length(B)-1;           % m=grado del polinomio B
l=length(Q)-1;           % l=grado del polinomio Q

```

```

% Controlla che il coefficiente di grado massimo di A non sia 0

if abs(A(1))<=e, disp(error); return; end

% Controlla che gradoB<=n e che gradoQ=2n

if (m>n)|(l>2*n), disp(error); return; end

% Controlla se A e B sono coprimi, usando la subroutine 'mcd'; in caso
% contrario, verifica se Q ha a fattore [A,B] (condizione per la
% risolubilita' dell' equazione diofantina)

c=mcd(A,B,e);
if length(c)~=1,
[Q,r]=deconv(Q,c);
if norm(r)>=e,
disp('Equazione impossibile da risolvere:')
disp('MCD[A,B] non divide QT')
return
end

    % Riduce l' ordine dell' equazione diofantina

h=length(c)-1;
l=l-h;
A=no_zeri(deconv(A,c));
n=n-h;
B=no_zeri(deconv(B,c));

```



```

m=m-h;
disp('A causa di fattori comuni, il grado dell'' equazione')
disp('e' stato ridotto')
end

% Definisce i coefficienti eventualmente mancanti in B relativi alle
% potenze di ordine n, n-1, ..., m+1

B=[zeros(1,n-m),B];

% Costruisce la matrice associata e la colonna dei termini noti del
% sistema lineare che determina i coeff. dei polinomi R e S

R1=toeplitz(A',[A(1),zeros(1,n)]);
R2=[zeros(1,n);toeplitz(B(1:n)',[B(1),zeros(1,n-1)])];
R3=toeplitz(zeros(n,1),[0,A(n+1:-1:2)]);
R4=toeplitz([B(n+1);zeros(n-1,1)],B(n+1:-1:2));

VECTOR=[zeros(1,2*n-1) Q]';
MATRIX=[R1,R2;R3,R4];

% Determina la soluzione del sistema, e quindi i polinomi R e S

SOLUZ=MATRIX\VECTOR;

R=SOLUZ(1:n+1)';
R=no_zeri(R);
S=SOLUZ(n+2:2*n+1)';

```

```
S=no_zeri(S);
```

```
function c=mcd(a,b,e)
```

```
% Uso: c=MCD(a,b,e). Calcola il Massimo Comune Divisore dei polinomi
```

```
%     a e b.
```

```
%     e=tolleranza:  $\text{alfa}=0 \Leftrightarrow \text{abs}(\text{alfa})<e$ . Maggiori sono i gradi di a e b,
```

```
%     piu' grande dovra' essere la tolleranza. Se e viene omesso, si
```

```
%     assume  $e=1E-10$ 
```

```
%
```

```
% (C) 1991 by Alberto Bemporad - Firenze, 8/3/'91
```

```
% L'algoritmo usato e' quello di Euclide, che agisce operando divisioni
```

```
% polinomiali successive
```

```
% Elimina eventuali zeri superflui
```

```
a=no_zeri(a);
```

```
b=no_zeri(b);
```

```
n=length(a);
```

```
m=length(b);
```

```
if m>n, t=a; a=b; b=t; end
```

```
[q,r]=deconv(a,b);  
if nargin==2, e=1E-10; end  
q=no_zeri(b,e);  
r=no_zeri(r,e);  
if norm(r)>e, r=r/r(1); end  
while norm(r)>=e,  
    [q1,r1]=deconv(q,r);  
    q=no_zeri(r,e);  
    r=no_zeri(r1,e);  
    if norm(r)>e, r=r/r(1); end;  
end  
c=q;  
end
```

```

function RR=no_zeri(R,e)
% Uso: A=no_zeri(B,e). Se per es. B=[0 0 0 3 2 0 4] ==> A=[3 2 0 4],
% cioe' A e' uguale a B eccetto eventuali prime componenti nulle. Se B=0,
% viene posto A=0.
% e = tolleranza con cui un numero viene considerato uguale a zero
% (se omissso, viene posto e=max(B)/1e7).

if nargin==1, e=max(R)/1e7; end

if norm(R)<=e, RR=0; return; end
while abs(R(1))<=e,
n=size(R);n=n(2);
R=R(2:n);
end
RR=R;

```

```

function out=lam_rift(in)
%Calcola il lambda e termine di feedforward f(t)=sum(ki*r(t+i))
%che deve essere dato all'impianto. Questa subroutine viene richia-
%mata dallo schema Simulab RIFERT.M.
%Questa subroutine suppone noti all'istante t l'uscita y(t) e la
%variabile v(t-1) misurate dall'impianto.
%
%Questa subroutine suppone che siano definite le variabili
%reftype= 0 se si vuole  $r(t+i)=l^i y(t) + (1-l^i) w(t+i)$ 
%          1 se si vuole  $r(t+i)=l^i y_o(t+i) + (1-l^i) w(t+i)$ ;
%          2 se si vuole  $r(t+i)=l^i y(t) + (1-l^i) w(t+i)$  per  $l < 1$ 
%                               =  $y_o(t+i)$  per  $l=1$ 
%
%futuro = 1 se si vuole che sia noto il futuro di w(t)
%          0 altrimenti
%nBE      = max(nb,ne);
%KK1=dimpulse([N1(nb+1:-1:1) zeros(1,nBE-nb)], [E(ne+1:-1:1)
% zeros(1,nBE-ne)],NN);
%KK=KK1/sum(KK1)/(sum(N1)/sum(E)); %Serve per aggiustare il guadagno
%                               %in continua
%
%(C) 1993 by A. Bemporad, Firenze 28/10/1993

%in=[v(t-1), w(t+MM+NN-1), y(t), time]'
%out=[feed(t), lambda(t)]'

time=in(4);

```

```

%Inserisce v(t) nel buffer vv che ha lunghezza net+MM+1
vv=[vv(2:MM+net+1);0];
vv(net)=in(1);

%Inserisce w(t+MM+NN-1) nel buffer ww che ha lunghezza MM+NN
ww=[ww(2:MM+NN);in(2)];

%Inserisce y(t-1) nel buffer yy che ha lunghezza ne+MM+NN
yy=[yy(2:MM+NN+ne);0];
yy(ne+1)=in(3);

%Shifta di 1 il buffer ff che ha lunghezza nbt+1+MM e inserisce
%l'ultimo
ff=[ff(2:nbt+1+MM+(NN-1));
    sum(KK.*rr(((MM+NN-1)+1):((MM+NN-1+NN-1)+1)))];
%(questa ultima entrata non servirebbe
% nemmeno calcolarla, visto che B(0)=0

%Calcola le  $y^{(t+i, \lambda(t-1))}$ 
for j=1:MM+NN-1,
yy((ne+1)+j)=( -sum( E(1:ne)' .*yy((ne+1+j-ne):(ne+1+j-1))) + ...
    sum(N1' .*ff(nbt+1+j-nb:nbt+1+j)))/X;
end

indice=-1;
condiz1=1;
mumu=1/mu;

```

```

if time<NN+MM-1, %Finche non si raggiunge l'istante t=0
    %nominale mantiene lambda=1;
condiz1=0;
l=1;
end

while condiz1,
indice=indice+1;
mumu=mumu*mu;
l=1-mumu;

LL=(1*ones(0:NN+MM-1)).^(0:NN+MM-1);

%Guarda se con questo lambda=1 i vincoli sono soddisfatti
vincolossodd=1;
j=-1;

%Costruisce un nuovo riferimento con questo lambda=1:
if futuro==1, %cioe' se si vuole che sia usata la conoscenza
    %del futuro di w

if reftype==1,
%r(t+i) raccorda yo(t+i) con w(t+i)

rrnew=[
LL' .*yy(ne+1:MM+NN+ne)+(ones(LL)-LL)' .*ww;
((1^(NN+MM-1))*yy(ne+MM+NN)+(1-1^(NN+MM-1))*...
ww(MM+NN))*ones(NN-1,1)];

```

```

else %if reftype=0 oppure 2
%r(t+i) raccorda y(t) con w(t+i)
rrnew=[
LL'.*(yy(ne+1)*ones(LL)')+(ones(LL)-LL)'.*ww;
((1^(NN+MM-1))*yy(ne+1)+(1-1^(NN+MM-1))*...
ww(NN+MM))*ones(NN-1,1)];
end %if
else %if <niente futuro>,
if reftype==1,
%r(t+i) raccorda yo(t+i) con w(t+i):=w(t)
%(=> suppone w futuro non noto)
rrnew=[
LL'.*yy(ne+1:MM+NN+ne)+ ww(1)*(ones(LL)'-LL');
((1^(NN+MM-1))*yy(ne+MM+NN)+(1-1^(NN+MM-1))...
*ww(1))*ones(NN-1,1)];
else %if reftype=0 oppure 2
%r(t+i) raccorda y(t) con w(t+i):=w(t)
%(=> suppone w futuro non noto)
rrnew=[
LL'.*(yy(ne+1)*ones(LL)')+ ww(1)*...
(ones(LL)'-LL');
((1^(NN+MM-1))*yy(ne+1)+(1-1^(NN+MM-1))*...
ww(1))*ones(NN-1,1)];
end %if
end %if

while vincolosodd & (j<MM),
j=j+1;

```



```

ff(nbt+1+j)=sum(KK.*rrnew((j+1):(j+NN-1+1)));
vv((net+1)+j)=( -sum( Et(1:net)' .*vv((net+1+j-net):(
net+1+j-1)))+sum(Bt' .*ff(nbt+1+j-nbt:nbt+1+j)))/X;

%QUI SI GUARDA SE v(t+i) SODDISFA IL VINCOLO

if abs(vv((net+1)+j))>Vmax,
vincolosodd=0;
end
end
if (vincolosodd)|(l>lmax),
condiz1=0;
end
if l>lmax,
l=1;
%rrnew=[rr(2:length(rr));rr(length(rr))];
end
end
lambda=1;
if l<1,
rr=rrnew;
else
if reftype==0 , %y(t) PURO
rr=[yy(ne+1)*ones(NN+MM+NN-1,1)];
else %if reftype=1 oppure 2 (cioe' yo(t+i) oppure y(t) ibrido)
rr=[yy(ne+1:ne+NN+MM);
yy(ne+MM+NN)*ones(NN-1,1)];
end
end

```

```

end

%Calcola gli f(t+it) che serviranno poi per calcolarsi le yo(t+i)
%al prossimo passo di campionamento

if vincolossodd==0,%(perche' se il vincolo fosse stato soddisfatto
    %questo calcolo
    %sarebbe gia' stato fatto)
for j=0:MM,
ff(nbt+1+j)=sum(KK.*rr((j+1):(j+NN-1+1)));
end
end
for j=MM+1:MM+NN-1,
ff(nbt+1+j)=sum(KK.*rr((j+1):(j+NN-1+1)));
end
feed=ff(nbt+1)/X;
out=[feed lambda]';

```